Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Измаилов, Теоремы о представлении семейств нелинейных отображений и теоремы о неявной функции, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 57–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:26:44

УДК 517.9

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СЕМЕЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

А. Ф. Измаилов

Приводится результат о локальном представлении семейства нелинейных отображений в окрестности 2-регулярной особенности. Теоремы такого рода, являясь специальными формами теорем о неявной функции, содержат в себе многие важнейшие результаты локального нелинейного анализа.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Центральную роль в нелинейном анализе играют различные теоремы о неявной функции (см., например, [1, с. 161, 166]), в основе которых лежит идея линеаризации. Точнее, такие теоремы равносильны соответствующим результатам о приведении гладкого семейства нелинейных отображений в окрестности регулярной точки к линейному виду. Если же условия регулярности не выполнены, то результаты такого рода теряют силу: первый дифференциал при этом не может служить сколь-нибудь адекватной аппроксимацией нелинейного отображения.

Настоящая статья является развитием работы [2], в которой, в частности, получен ряд теорем о приведении нелинейного отображения в окрестности особенности определенного класса к линейно-квадратичному виду. Здесь предлагается более общий результат о представлении параметрических семейств нелинейных отображений, который в совокупности с теоремой о существовании неявной функции из [3] содержит в себе более общую теорему о существовании неявной функции для 2-регулярных отображений.

Оговорим некоторые обозначения и термины. Пусть $B_X(x, \delta) = \{\xi \in X \mid \|\xi - x\| < \delta\}$ – открытый шар в линейном нормированном пространстве X с центром в точке $x \in X$ радиуса $\delta > 0$, I_X – тождественный оператор в X . Определим расстояние

$$\rho_X(x, M) = \inf\{\|x - \xi\| \mid \xi \in M\}$$

от точки $x \in X$ до множества $M \subset X$. Через $T_x M$ обозначим касательный конус (множество касательных векторов [4, с. 40]) к множеству M в точке $x \in M$.

Для линейных нормированных пространств X и Y через $\mathcal{L}(X, Y)$ будем обозначать пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y , а через $\mathcal{L}^2(X, Y)$ – пространство непрерывных билинейных отображений, действующих из

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 97-01-00188 и № 99-01-00472.

$X \times X$ в Y . Действие отображения $B \in \mathcal{L}^2(X, Y)$ на пару $(x^1, x^2) \in X \times X$ обозначается через $B[x^1, x^2]$. Каждому элементу $h \in X$ поставим в соответствие линейный оператор $B[h] \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B[h]x = B[h, x]$.

Для произвольных множеств X и Y и отображения $F: X \rightarrow Y$ через $F^{-1}: Y \rightarrow 2^X$ обозначается отображение, сопоставляющее каждому $y \in Y$ его полный прообраз при отображении F ; если F биективно, то считаем, что $F^{-1}: Y \rightarrow X$ – обычное (не многозначное) отображение. Если X и Y – линейные нормированные пространства, $\Lambda: X \rightarrow Y$ – линейный оператор, то

$$\|\Lambda^{-1}\| = \sup\{\rho_X(0, \Lambda^{-1}y) \mid y \in Y, \|y\| = 1\}$$

– “норма” отображения Λ^{-1} ; в случае биективного Λ это действительно операторная норма в пространстве $\mathcal{L}(Y, X)$.

Если X_i , $i = 1, \dots, s$ ($s \in \mathbb{N}$), и Y – линейные нормированные пространства, Ξ – окрестность точки $\xi = (x^1, \dots, x^s)$ в $\bigotimes_{i=1}^s X_i$, то для отображения $F: \Xi \rightarrow Y$ через $\partial_i F(x^1, \dots, x^s)$ обозначается первая, а через $\partial_i^2 F(x^1, \dots, x^s)$ – вторая частная производная в точке ξ по i -й переменной, $i = 1, \dots, s$.

Линейное подпространство L банахова пространства X называется *топологически дополняемым*, если оно замкнуто и имеет замкнутое прямое дополнение (называемое *топологическим дополнением* подпространства L в X). Подпространство L топологически дополняемо в X тогда и только тогда, когда существует непрерывный проектор на L в X , т.е. оператор $\Pi \in \mathcal{L}(X, X)$ такой, что $\Pi^2 = \Pi$, $\text{Im } \Pi = L$ (при этом *дополнительный к Π проектор* $I_X - \Pi$ на топологическое дополнение $\text{Ker } \Pi$ подпространства L в X также непрерывен).

2. Теорема о представлении.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Σ – топологическое, а X и Y – банаховы пространства, $\sigma_0 \in \Sigma$, V – окрестность точки x_* в X . Пусть отображение $F: \Sigma \times V \rightarrow Y$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и симметричное отображение $B \in \mathcal{L}^2(X, Y)$ такие, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся окрестность $\mathcal{W}$ точки σ_0 в Σ и число $\omega > 0$ такие, что

$$\left\| F(\sigma, x_* + x^1) - F(\sigma, x_* + x^2) - A(x^1 - x^2) - \frac{1}{2}B[x^1, x^1] + \frac{1}{2}B[x^2, x^2] \right\| \leq \varepsilon (\|x^1\| + \|x^2\|) \|x^1 - x^2\| \quad \forall \sigma \in \mathcal{W}, \quad \forall x^1, x^2 \in B_X(0, \omega)$$

(условие квадратичной аппроксимации), причем $\text{Im } A$ замкнуто и топологически дополняемо в Y , R – непрерывный проектор на $\text{Im } A$ в Y , $P = I_Y - R$ – дополнительный к R проектор;

2) для некоторого конуса K в X

$$\sup\{\|(A + PB[h])^{-1}\| \mid h \in K, \|h\| = 1\} < \infty. \quad (1)$$

Тогда найдутся окрестности $\mathcal{U}$ точки σ_0 в Σ и U точки 0 в X и отображение $\varphi: \mathcal{U} \times U \rightarrow X$ такие, что

а) $\varphi(\mathcal{U} \times U) \subset V$;

- б) $F(\sigma, \varphi(\sigma, x)) = F(\sigma, x_*) + Ax + \frac{1}{2}PB[x, x] \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}, \quad \forall x \in U \cap K;$
 в) $\varphi(\sigma, 0) = x_* \quad \forall \sigma \in \mathcal{U},$ и для некоторого числа $C > 0$

$$\begin{aligned} \|\varphi(\sigma, x) - (x_* + x)\| &\leq C \left(\|R(F(\sigma, x_* + x) - F(\sigma, x_*) - Ax)\| \right. \\ &\quad \left. + \|x\|^{-1} \left\| P \left(F(\sigma, x_* + x) - F(\sigma, x_*) - \frac{1}{2}B[x, x] \right) \right\| \right) \\ &\quad \forall \sigma \in \mathcal{U}, \quad \forall x \in U \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем такое число $r > 0$, что $B_X(x_*, 2r) \subset V$. Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma$ и $x \in B_X(0, r)$ корректно определено многозначное отображение

$$\Phi_{\sigma, x}: B_X(0, r) \rightarrow 2^X,$$

$$\Phi_{\sigma, x}(\xi) = \xi - (A + PB[x])^{-1} \left(F(\sigma, x_* + x + \xi) - F(\sigma, x_*) - Ax - \frac{1}{2}PB[x, x] \right),$$

для которого в силу (1) справедливо

$$\Phi_{\sigma, x}(\xi) \neq \emptyset \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad \forall x \in (B_X(0, r) \cap K) \setminus \{0\}, \quad \forall \xi \in B_X(0, r). \quad (2)$$

Фиксируем число $\theta \in (0, 1)$. Обозначим число, стоящее в левой части (1), через C' , $C' > 0$. Тогда в силу условия квадратичной аппроксимации найдутся окрестность $\mathcal{W}$ точки σ_0 в Σ и числа $\omega \in (0, r]$ и $\gamma \in (0, r/\omega]$ такие, что $\forall \sigma \in \mathcal{W}, \quad \forall x \in B_X(0, \omega), \quad \forall \xi^1, \xi^2 \in B_X(0, \gamma\|x\|)$

$$\|R(F(\sigma, x_* + x + \xi^1) - F(\sigma, x_* + x + \xi^2) - A(\xi^1 - \xi^2))\| \leq \frac{\theta}{2C'}\|\xi^1 - \xi^2\|, \quad (3)$$

$$\|P(F(\sigma, x_* + x + \xi^1) - F(\sigma, x_* + x + \xi^2) - B[x, \xi^1 - \xi^2])\| \leq \frac{\theta}{2C'}\|x\|\|\xi^1 - \xi^2\|. \quad (4)$$

Кроме того, вновь привлекая условие квадратичной аппроксимации, получаем существование окрестностей $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ точки σ_0 в Σ и $U \subset B_X(0, \omega)$ точки 0 в X таких, что $\forall \sigma \in \mathcal{U}, \quad \forall x \in U \setminus \{0\}$

$$\|R(F(\sigma, x_* + x) - F(\sigma, x_*) - Ax)\| < \frac{1 - \theta}{2C'}\gamma\|x\|, \quad (5)$$

$$\left\| P \left(F(\sigma, x_* + x) - F(\sigma, x_*) - \frac{1}{2}B[x, x] \right) \right\| < \frac{1 - \theta}{2C'}\gamma\|x\|^2. \quad (6)$$

Положим $r(x) = \gamma\|x\|$, $x \in B_X(0, \omega)$. В силу (1), (3), (4) для хаусдорфова расстояния $\mathfrak{N}_X(\cdot, \cdot)$ в пространстве X имеем: $\forall \sigma \in \mathcal{U}, \quad \forall x \in (U \cap K) \setminus \{0\}, \quad \forall \xi^1, \xi^2 \in B_X(0, r(x))$

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_X(\Phi_{\sigma, x}(\xi^1), \Phi_{\sigma, x}(\xi^2)) &= \inf\{\|x^1 - x^2\| \mid x^i \in \Phi_{\sigma, x}(\xi^i), i = 1, 2\} \\ &= \inf\left\{ \|\xi\| \mid \xi \in X, (A + PB[\|x\|^{-1}x])\xi = (A + PB[\|x\|^{-1}x])(\xi^1 - \xi^2) \right. \\ &\quad \left. - R(F(\sigma, x_* + x + \xi^1) - F(\sigma, x_* + x + \xi^2)) \right. \\ &\quad \left. - \|x\|^{-1}P(F(\sigma, x_* + x + \xi^1) - F(\sigma, x_* + x + \xi^2)) \right\} \\ &\leq C' \left(\|R(F(\sigma, x_* + x + \xi^1) - F(\sigma, x_* + x + \xi^2) - A(\xi^1 - \xi^2))\| \right. \\ &\quad \left. + \|x\|^{-1} \|P(F(\sigma, x_* + x + \xi^1) - F(\sigma, x_* + x + \xi^2) - B[x, \xi^1 - \xi^2])\| \right) \leq \theta\|\xi^1 - \xi^2\|. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, в силу (1), (5), (6) получаем: $\forall \sigma \in \mathcal{U}, \forall x \in (U \cap K) \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
 \rho_X(0, \Phi_{\sigma, x}(0)) &= \inf \{ \|\xi\| \mid \xi \in \Phi_{\sigma, x}(0) \} = \inf \left\{ \|\xi\| \mid \xi \in X, (A + PB[\|x\|^{-1}x])\xi \right. \\
 &= R(F(\sigma, x_* + x) - F(\sigma, x_*) - Ax) \\
 &\quad \left. + \|x\|^{-1}P \left(F(\sigma, x_* + x) - F(\sigma, x_*) - \frac{1}{2}B[x, x] \right) \right\} \\
 &\leq C' \left(\|R(F(\sigma, x_* + x) - F(\sigma, x_*) - Ax)\| \right. \\
 &\quad \left. + \|x\|^{-1} \left\| P \left(F(\sigma, x_* + x) - F(\sigma, x_*) - \frac{1}{2}B[x, x] \right) \right\| \right) < (1 - \theta)r(x). \tag{8}
 \end{aligned}$$

Соотношения (2), (7), (8) в совокупности означают, что для каждого $\sigma \in \mathcal{U}$ и $x \in (U \cap K) \setminus \{0\}$ отображение $\Phi_{\sigma, x}$ в шаре $B_X(0, r(x))$ удовлетворяет всем условиям принципа многозначных сжимающих отображений [4, с. 42], т.е. найдется элемент $\xi(\sigma, x) \in B_X(0, r(x))$ такой, что

$$\xi(\sigma, x) \in \Phi_{\sigma, x}(\xi(\sigma, x)), \tag{9}$$

причем

$$\|\xi(\sigma, x)\| \leq \frac{2}{1 - \theta} \rho_X(0, \Phi_{\sigma, x}(0)). \tag{10}$$

Положим $\xi(\sigma, 0) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}$. Тогда в силу (9), (10) и промежуточного неравенства в (8) отображение

$$\varphi: \mathcal{U} \times U \rightarrow X, \quad \varphi(\sigma, x) = \begin{cases} x_* + x + \xi(\sigma, x), & \text{если } x \in U \cap K, \\ x_* + x, & \text{если } x \in U \setminus K, \end{cases}$$

является искомым (в качестве константы в в) следует взять $C = 2C'/(1 - \theta)$). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие квадратичной аппроксимации включает в себя и так называемое *условие линейной аппроксимации*: существует оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ такой, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся окрестность $\mathcal{W}$ точки σ_0 в Σ и число $\omega > 0$ такие, что

$$\|F(\sigma, x_* + x^1) - F(\sigma, x_* + x^2) - A(x^1 - x^2)\| \leq \varepsilon \|x^1 - x^2\| \quad \forall \sigma \in \mathcal{W}, \quad \forall x^1, x^2 \in B_X(0, \omega)$$

(см. [1, с. 161]). Последнее же предполагает строгую дифференцируемость отображения $x \rightarrow F(\sigma_0, x): V \rightarrow Y$ в точке x_* , причем по необходимости $A = \partial_2 F(\sigma_0, x_*)$. Наоборот, если существует такая окрестность $\mathcal{V}$ точки σ_0 в Σ , что отображение F дифференцируемо по Фреше по второй переменной на $\mathcal{V} \times V$, причем отображение $\partial_2 F: \mathcal{V} \times V \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ непрерывно в точке (σ_0, x_*) , то условие линейной аппроксимации выполнено с указанным оператором A (это следует из теоремы о среднем).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Правая часть представления в б) содержит σ , а не только σ_0 . Усилить данный результат, избавившись от указанной зависимости в представлении, в общем случае нельзя, что иллюстрируется простейшим примером отображения $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\sigma, x) = \sigma + x^2$ в точке $(0, 0)$ (здесь можно взять $K = \mathbb{R}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из утверждения в) теоремы 1 и условия квадратичной аппроксимации вытекает, что отображение $x \rightarrow \varphi(\sigma_0, x): U \rightarrow X$ можно считать дифференцируемым по Фреше в точке 0, причем $\partial_2 \varphi(\sigma_0, 0) = I_X$.

Ниже обсуждаются некоторые приложения теоремы 1.

3. Теоремы о существовании неявной функции. В [3] доказана следующая теорема о существовании неявной функции.

ТЕОРЕМА 2*. Пусть в условиях теоремы 1 $F(\sigma_0, x_*) = 0$, а вместо 2) выполнено следующее:

2*) существует элемент $h_* \in \text{Ker } A$ такой, что $B[h_*, h_*] \in \text{Im } A$, $\text{Im}(A + PB[h_*]) = Y$;

3) отображение $\sigma \rightarrow F(\sigma, x_*): \Sigma \rightarrow Y$ непрерывно в точке σ_0 (условие непрерывности).

Тогда найдутся окрестность $\mathcal{U}$ точки σ_0 в Σ и отображение $\chi: \mathcal{U} \rightarrow X$ такие, что:

- а) $\chi(\mathcal{U}) \subset V$;
- б) $F(\sigma, \chi(\sigma)) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}$;
- в) для некоторого числа $C > 0$

$$\|\chi(\sigma) - x_*\| \leq C(\|RF(\sigma, x_*)\| + \|PF(\sigma, x_*)\|^{1/2}) \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}.$$

В регулярном случае, т.е. когда $\text{Im } A = Y$, условие 2*) теоремы 2* выполнено тривиальным образом для любого отображения $B \in \mathcal{L}^2(X, Y)$, поскольку при этом $P = 0$, и в качестве h_* можно взять любой элемент из $\text{Ker } A$, например, $h_* = 0$. Поэтому с учетом замечания 1 теорема 2* является обобщением стандартной теоремы о существовании неявной функции из [1, с. 161] (см. также замечание 4 ниже). Однако, такое обобщение не может считаться исчерпывающим, например потому, что теорема 2* в нерегулярном случае принципиально неприменима при $X = Y = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Привлекая дополнительно теорему 1, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в условиях теоремы 1 $F(\sigma_0, x_*) = 0$, причем выполнено условие 3) теоремы 2*. Введем множество

$$\tilde{\Sigma} = \left\{ \sigma \in \Sigma \mid \exists x \in K : -F(\sigma, x_*) = Ax + \frac{1}{2}PB[x, x] \right\}. \quad (11)$$

Тогда найдутся окрестность $\mathcal{U}$ точки σ_0 в Σ и отображение $\chi: \mathcal{U} \rightarrow X$ такие, что:

- а) $\chi(\mathcal{U}) \subset V$;
- б) $F(\sigma, \chi(\sigma)) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{U} \cap \tilde{\Sigma}$;
- в) для некоторого числа $C > 0$

$$\|\chi(\sigma) - x_*\| \leq C(\|RF(\sigma, x_*)\| + \|PF(\sigma, x_*)\|^{1/2}) \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что существует такое число $\beta > 0$, что

$$\{x \in K_\beta \mid Ax = 0, PB[x, x] = 0\} = \{0\}, \quad (12)$$

где

$$K_\beta = \bigcup_{x \in K} B_X(x, \beta \|x\|).$$

Но тогда в силу леммы 3 в [2] найдется такое число $C' > 0$, что

$$\|x\| \leq C' \left(\|Ax\| + \left\| \frac{1}{2} PB[x, x] \right\|^{1/2} \right) \quad \forall x \in K.$$

Поэтому согласно (11) для каждого $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ найдется такой элемент $x(\sigma) \in K$, что

$$Ax(\sigma) + \frac{1}{2} PB[x(\sigma), x(\sigma)] = -F(\sigma, x_*), \quad (13)$$

$$\|x(\sigma)\| \leq C' (\|RF(\sigma, x_*)\| + \|PF(\sigma, x_*)\|^{1/2}). \quad (14)$$

Пусть окрестности $\mathcal{U}$, U и отображение φ определены в соответствии с теоремой 1. В силу (14) и условия непрерывности можем при необходимости сузить окрестность $\mathcal{U}$ так, чтобы выполнялось $x(\sigma) \in U \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}$. Тогда согласно (13) искомым будет отображение

$$\chi: \mathcal{U} \rightarrow X, \quad \chi(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma, x(\sigma)), & \text{если } \sigma \in \mathcal{U} \cap \tilde{\Sigma}, \\ x_*, & \text{если } x \in \mathcal{U} \setminus \tilde{\Sigma} \end{cases}$$

(для обоснования утверждения в) нужно привлечь условие квадратичной аппроксимации (14) и, возможно, еще сузить окрестность $\mathcal{U}$).

Пусть теперь условие (12) не выполнено ни для какого числа $\beta > 0$. Используя теорему о малом возмущении сюръективного линейного оператора [5, с. 26], несложно убедиться, что при этом выполнены все условия теоремы 2*, что и дает требуемый результат. Теорема доказана.

Вообще говоря, расширить множество $\tilde{\Sigma}$ (например, положив $\tilde{\Sigma} = \Sigma$) в утверждении теоремы 2 нельзя (см. замечание 2).

Условие (1) в теоремах 1 и 2 (как и условие 2*) в теореме 2*) играет роль ослабленного условия регулярности. Условия такого рода подробно обсуждаются в [2], [6]. Здесь отметим лишь, что если размерность X конечна и нечетна, $\dim Y \geq 2$, то в нерегулярном случае выполнение (1) при $K = X$ паталогично.

Важно отметить, что теорема 2* содержится в теореме 2. Действительно, в условиях теоремы 2*, вновь привлекая теорему о малом возмущении сюръективного линейного оператора, выберем число $\beta > 0$ такое, что

$$\sup \{ \| (A + PB[h])^{-1} \| \mid h \in B_X(h_*, \beta) \} < \infty,$$

и положим $K = \text{cone } B_X(h_*, \beta)$. Тогда, применяя к отображению

$$\Phi: X \rightarrow Y, \quad \Phi(x) = Ax + \frac{1}{2} PB[x, x],$$

в точке h_* стандартную теорему о существовании неявной функции [1, с. 161] (точнее, теорему о накрывании), имеем: найдется такая окрестность W точки 0 в Y , что

$$\Phi^{-1}(y) \cap K \neq \emptyset \quad \forall y \in W.$$

Отсюда, используя условие непрерывности, получаем, что вводимое в соответствии с (11) множество $\tilde{\Sigma}$ является окрестностью точки σ_0 в Σ , что и дает требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если отображение $x \rightarrow F(\sigma_0, x): V \rightarrow Y$ дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_* , то по необходимости в условии квадратичной аппроксимации $B = \partial_2^2 F(\sigma_0, x_*)$. Отметим, что в приведенных теоремах условие квадратичной аппроксимации можно несколько ослабить: достаточно предполагать, что выполнено условие линейной аппроксимации (см. замечание 1) и существует симметричное отображение $B \in \mathcal{L}^2(X, Y)$ такое, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся окрестность $\mathcal{W}$ точки σ_0 в Σ и число $\omega > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} & \left\| P \left(F(\sigma, x_* + x^1) - F(\sigma, x_* + x^2) - \frac{1}{2}B[x^1, x^1] + \frac{1}{2}B[x^2, x^2] \right) \right\| \\ & \leq \varepsilon (\|x^1\| + \|x^2\|) \|x^1 - x^2\| \quad \forall \sigma \in \mathcal{W}, \quad \forall x^1, x^2 \in B_X(0, \omega). \end{aligned}$$

Например, не зависящее от параметра отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x) = (x_1 + |x_1|^{3/2}, 0)$, в точке 0 удовлетворяет ослабленному условию квадратичной аппроксимации, но не имеет второй производной и не удовлетворяет условию квадратичной аппроксимации. В соответствующей формулировке теорема 2* содержит в себе стандартную теорему о существовании неявной функции из [1, с. 161] без всяких оговорок.

Кроме того, нужно иметь в виду, что в отличие от условия линейной аппроксимации условие квадратичной аппроксимации – не просто условие гладкости. Никакие требования гладкости на отображение F , вообще говоря, не гарантируют выполнение условия квадратичной аппроксимации (даже ослабленного), что иллюстрируется примером отображения $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\sigma, x) = \sigma x$, в точке $(0, 0)$.

Можно указать следующие условия, достаточные для выполнения ослабленного условия квадратичной аппроксимации: существует такая окрестность $\mathcal{V}$ точки σ_0 в Σ , что отображение F дважды дифференцируемо по Фреше по второй переменной на $\mathcal{V} \times V$, причем отображения $\partial_2 F: \mathcal{V} \times V \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ и $\partial_2^2 F: \mathcal{V} \times V \rightarrow \mathcal{L}^2(X, Y)$ непрерывны в точке (σ_0, x_*) и

$$P\partial_2 F(\sigma, x_*) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{V} \quad (15)$$

(это следует из теоремы о среднем). В теоремах 2* и 2 вместо (15) достаточно предполагать выполненным более слабое условие: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ точки σ_0 в Σ такая, что

$$\|P\partial_2 F(\sigma, x_*)\| \leq \varepsilon (\|RF(\sigma, x_*)\| + \|PF(\sigma, x_*)\|^{1/2}) \quad \forall \sigma \in \mathcal{W}$$

(см. [2]). Заметим, что такие условия не гарантируют выполнения условия квадратичной аппроксимации (даже ослабленного); простейшим примером служит отображение $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\sigma, x) = \sigma + \sigma x$, в точке $(0, 0)$.

В теореме 1 указанная замена условий не проходит даже при выполнении условия непрерывности, что иллюстрируется примером отображения $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(\sigma, x) = (x_1, \sigma + \sigma x_1 + x_2^2)$, в точке $(0, 0)$.

Наконец, приведем еще одни условия (с пониженными требованиями гладкости), достаточные для выполнения условия квадратичной аппроксимации: существует такая окрестность $\mathcal{V}$ точки σ_0 в Σ , что отображение F дифференцируемо по Фреше по второй переменной на $\mathcal{V} \times V$ и дважды дифференцируемо по Фреше по второй переменной в точке (σ_0, x_*) , причем

$$\partial_2 F(\sigma, x) = \partial_2 F(\sigma_0, x) \quad \forall \sigma \in \mathcal{V}, \forall x \in V$$

(это следует из теоремы о среднем). В частности, если отображение $F: V \rightarrow Y$ не зависит от параметра, то для выполнения условия квадратичной аппроксимации достаточно двукратной дифференцируемости F по Фреше в точке x_* .

В связи с замечанием 4 еще раз подчеркнем, что ни одна из теорем 1 и 2 не содержит в себе другую полностью.

4. Другие приложения. Оговорим еще некоторые понятия и обозначения [3], [5], [6]. Пусть X и Y – банаховы пространства, V – окрестность точки x_* в X , отображение $F: V \rightarrow Y$ дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_* . Полагая, что P – проектор на некоторое прямое дополнение $\text{Im } F'(x_*)$ в Y , введем семейство линейных операторов

$$\Psi_2(P, h): X \rightarrow Y, \quad \Psi_2(P, h) = F'(x_*) + PF''(x_*)[h], \quad h \in X,$$

и конус

$$T_2 = \{h \in \text{Ker } F'(x_*) \mid F''(x_*)[h, h] \in \text{Im } F'(x_*)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение F называется *2-регулярным в точке x_* на элементе $h \in X$* , если $\text{Im } \Psi_2(P, h) = Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение F называется *2-регулярным в точке x_* на множестве $H \subset X$* , если оно 2-регулярно в этой точке на любом элементе $h \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отображение F называется *2-регулярным в точке x_** , если оно 2-регулярно в этой точке на множестве $T_2 \setminus \{0\}$.

Подчеркнем, что введенные условия 2-регулярности на самом деле инвариантны по отношению к выбору прямого дополнения подпространства $\text{Im } F'(x_*)$ в Y , т.е. к выбору проектора P . Очевидно, если отображение F регулярно в точке x_* , то оно 2-регулярно в этой точке на множестве X .

Привлекая замечания 3 и 4, получаем такое следствие теоремы 1 (в [2] этот результат о представлении нелинейного отображения доказан непосредственно).

ТЕОРЕМА 3. Пусть X и Y – банаховы пространства, V – окрестность точки x_* в X . Пусть отображение $F: V \rightarrow Y$ дважды дифференцируемо по Фреше в точке x_* , $\text{Im } F'(x_*)$ замкнуто и топологически дополняемо в Y , R – непрерывный проектор на $\text{Im } F'(x_*)$ в Y , $P = I_Y - R$ – дополнительный к R проектор, причем для некоторого конуса K в X

$$\sup\{\|(\Psi_2(P, h))^{-1}\| \mid h \in K, \|h\| = 1\} < \infty. \quad (16)$$

Тогда найдутся окрестность U точки 0 в X и дифференцируемое по Фреше в точке 0 отображение $\varphi: U \rightarrow X$ такие, что

- а) $\varphi(U) \subset V$;
- б) $F(\varphi(x)) = F(x_*) + F'(x_*)x + \frac{1}{2}PF''(x_*)[x, x] \quad \forall x \in U \cap K$;
- в) $\varphi(0) = x_*$, $\varphi'(0) = I_X$.

В регулярном случае теорема 3 дает некоторый результат о линеаризации нелинейного отображения. Отметим, что “выпрямляющее” отображение φ из теоремы 3 не удовлетворяет, вообще говоря, условиям стандартных теорем об обратном отображении, несмотря на существование и биективность производной $\varphi'(0)$. Дело в том, что $\varphi(\cdot)$

не обладает, вообще говоря, строгой дифференцируемостью в точке 0 (в частности, в окрестности этой точки не утверждается даже непрерывность $\varphi(\cdot)$). Таким образом, $\varphi(\cdot)$ нельзя считать “заменой переменных” (об условиях, обеспечивающих локальную биективность и гладкость $\varphi(\cdot)$, т.е. об обобщении классической леммы Морса, см. [2]). Тем не менее, результат теоремы 3 достаточен для ряда важных приложений.

Например, теорема 3 содержит в себе обобщенную теорему Люстерника о касательном конусе [3], [5, с. 157]. Будем рассматривать множество уровня

$$M = \{x \in V \mid F(x) = F(x_*)\}$$

отображения F , содержащее точку x_* .

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, кроме (16).

Тогда для множества уровня M справедливо:

а) $T_{x_*}M \subset T_2$;

б) если отображение F 2-регулярно в точке x_* на элементе $h \in T_2$, то $h \in T_{x_*}M$.

В частности, если отображение F 2-регулярно в точке x_* , то $T_{x_*}M = T_2$.

Действительно, в условиях п.б) имеем:

$$F(\varphi(th)) = F(x_*) + tF'(x_*)h + \frac{t^2}{2}PF''(x_*)[h, h] = F(x_*) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

где число $\varepsilon > 0$ определяется из условия $th \in U \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, а окрестность U и отображение φ взяты из теоремы 3, применяемой к конусу $K = \text{lin } h$. При этом

$$\|\varphi(th) - (x_* + th)\| = o(t).$$

Отметим такое обобщение стандартного результата о накрывании, содержащееся в теореме 2* (с учетом замечания 4).

ТЕОРЕМА 5. Пусть в условиях теоремы 3 вместо (16) выполнено следующее: отображение F 2-регулярно в точке x_* на некотором элементе $h_* \in T_2$.

Тогда найдутся окрестность W точки $F(x_*)$ в Y и число $C > 0$ такие, что

$$\rho_X(x_*, F^{-1}(y)) \leq C(\|R(y - F(x_*))\| + \|P(y - F(x_*))\|^{1/2}) \quad \forall y \in W.$$

Если провести аналогию с регулярным случаем, то можно предположить справедливость такого следствия теоремы 2*: равенство $T_{x_*}M = T_2$ в теореме 4 имеет место при выполнении условия 2-регулярности отображения F в точке x_* хотя бы на одном элементе из конуса T_2 . Однако, последнее неверно. Точнее, если обозначить $\overline{T}_2 = \{\xi \in T_2 \mid \text{Im } \Psi_2(P, \xi) = Y\}$, то из теоремы 4 и замкнутости касательного конуса к любому множеству в любой точке [4, с. 41] вытекает включение $\text{cl } \overline{T}_2 \subset T_{x_*}M$; включение же $T_2 \setminus \text{cl } \overline{T}_2 \subset T_{x_*}M$ может не иметь места, даже если $\overline{T}_2 \neq \emptyset$. Например, для отображения $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, x_1(x_1 - x_3 - x_3^2))$, в точке 0 имеем: $(0, \pm 1, 1) \in \overline{T}_2$, $(1, 0, 1) \in T_2$, но, как нетрудно убедиться, последний вектор не является касательным к множеству M .

В заключение этого раздела отметим недавно опубликованный вариант обобщенной теоремы о накрывании [7], основанный на совершенно иных идеях.

5. О гладких уточнениях теорем о неявной функции. Оценки в) в теоремах 2*, 2 гарантируют непрерывность неявной функции χ в точке σ_0 . Никакие дополнительные требования гладкости на отображение F не позволяют в условиях этих теорем гарантировать существование гладких ветвей решений (при естественной параметризации; напомним, что в условиях теоремы 2 такая “ветвь” вообще определена на множестве, которое может не содержать окрестности точки σ_0 в Σ). Примером может служить бесконечно гладкое по совокупности переменных отображение $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\sigma, x) = \sigma - x_1 x_2$, в точке $(0, 0)$. Действительно, здесь выполнены все условия теоремы 2*, но если предположить существование окрестности $\mathcal{U}$ точки 0 в $\mathbb{R}$ и дифференцируемого хотя бы в самой точке 0 отображения $\chi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ таких, что

$$\chi_1(\sigma)\chi_2(\sigma) = \sigma \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}, \quad (17)$$

$$\chi(0) = 0, \quad (18)$$

то, дифференцируя левую и правую части равенства (17) по σ в точке 0, получим

$$\dot{\chi}_1(0)\chi_2(0) + \chi_1(0)\dot{\chi}_2(0) = 1.$$

Последнее равенство противоречит (18).

Обратимся к другому вопросу: можно ли за счет повышенных требований гладкости на отображение F снять в теоремах 2*, 2 весьма обременительное условие квадратичной аппроксимации, положив $A = \partial_2 F(\sigma_0, x_*)$, $B = \partial_2^2 F(\sigma_0, x_*)$ (см. замечание 4)? В случае теоремы 2* положительный ответ на этот вопрос может быть получен с помощью известного приема, позволяющего выводить теоремы о неявной функции из соответствующих теорем об обратном отображении (на возможность применения данного приема в рассматриваемой ситуации автору указал А. В. Арутюнов).

ТЕОРЕМА 6. Пусть Σ , X и Y – банаховы пространства, $\mathcal{V}$ – окрестность точки σ_0 в Σ , V – точки x_* в X . Пусть отображение $F: \mathcal{V} \times V \rightarrow Y$ дважды дифференцируемо по Фреше в точке (σ_0, x_*) , $\text{Im } \partial_2 F(\sigma_0, x_*)$ замкнуто и топологически дополняемо в Y , R – некоторый непрерывный проектор на $\text{Im } \partial_2 F(\sigma_0, x_*)$ в Y , $P = I_Y - R$ – дополнительный к R проектор, причем существует элемент $h_* \in \text{Ker } \partial_2 F(\sigma_0, x_*)$ такой, что $\partial_2^2 F(\sigma_0, x_*)[h_*, h_*] \in \text{Im } \partial_2 F(\sigma_0, x_*)$ и отображение $x \rightarrow F(\sigma_0, x): V \rightarrow Y$ 2-регулярно в точке x_* на элементе h_* . Пусть $F(\sigma_0, x_*) = 0$.

Тогда найдутся окрестность $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ точки σ_0 в Σ и отображение $\chi: \mathcal{U} \rightarrow X$ такие, что:

- а) $\chi(\mathcal{U}) \subset V$;
- б) $F(\sigma, \chi(\sigma)) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}$;
- в) для некоторого числа $C > 0$

$$\|\chi(\sigma) - x_*\| \leq C(\|\sigma - \sigma_0\| + \|P\partial_1 F(\sigma_0, x_*)(\sigma - \sigma_0)\|^{1/2}) \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем открытое множество $\mathcal{O} = \mathcal{V} \times V$ в пространстве $\Sigma \times X$ и отображение

$$\Phi: \mathcal{O} \rightarrow E, \quad \Phi(z) = (\sigma, F(\sigma, x)), \quad z = (\sigma, x),$$

где $E = \Sigma \times Y$. Непосредственно проверяется, что в сделанных предположениях это отображение удовлетворяет всем условиям теоремы 5 в точке $z_* = (\sigma_0, x_*)$. В частности, Φ 2-регулярно в точке z_* на элементе $\zeta_* = (\sigma, h_*) \in \text{Ker } \Phi'(z_*) = \{0\} \times \text{Ker } \partial_2 F(\sigma_0, x_*)$, причем $\Phi''(z_*)[\zeta_*, \zeta_*] \in \text{Im } \Phi'(z_*)$. Отметим, что в качестве непрерывного проектора на подпространство $\text{Im } \Phi'(z_*)$ в E можно взять, например, оператор T , определяемый формулой

$$Te = (\mu, Ry + P\partial_1 F(\sigma_0, x_*)\mu), \quad e = (\mu, y) \in E.$$

В силу теоремы 5 найдутся окрестности $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ точки σ_0 в Σ и W точки 0 в Y и отображение $\psi: \mathcal{U} \times W \rightarrow X$ такие, что:

$$\begin{aligned} \psi(\mathcal{U} \times W) &\subset V, \\ F(\sigma, \psi(\sigma, y)) &= y \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}, \quad \forall y \in W, \end{aligned}$$

причем для некоторого числа $C' > 0$

$$\begin{aligned} \|\psi(\sigma, y) - z_*\| &\leq C' \left(\left\| \begin{pmatrix} \sigma - \sigma_0 \\ Ry + P\partial_1 F(\sigma_0, x_*)(\sigma - \sigma_0) \end{pmatrix} \right\| \right. \\ &\quad \left. + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ P(y - \partial_1 F(\sigma_0, x_*)(\sigma - \sigma_0)) \end{pmatrix} \right\|^{1/2} \right) \quad \forall \sigma \in \mathcal{U}, \quad \forall y \in W. \end{aligned}$$

Тогда искомое отображение χ определяется формулой

$$\chi(\sigma) = \psi(\sigma, 0), \quad \sigma \in \mathcal{U}$$

(оценка в) выполняется при $C = C' \max\{1, \|P\partial_1 F(\sigma_0, x_*)\|\}$. Теорема доказана.

Оценка в) в теореме 2*, вообще говоря, сильнее оценки в) в теореме 6. Тем не менее, и последняя оценка вполне содержательна.

Что же касается общей теоремы 2, то в ней никакие дополнительные требования гладкости на отображение F не позволяют отказаться от условий типа квадратичной аппроксимации. Рассмотрим, например, бесконечно гладкое по совокупности переменных отображение

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(\sigma, x) = \left(\sigma + x_1 + x_2, \frac{3}{8}\sigma(x_1 + x_2) + x_1x_2 \right),$$

в точке $(0, 0)$. Зафиксируем произвольное число $\nu \in (0, 1]$ и введем конус

$$\begin{aligned} K &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq (1 + \nu)x_1, x_2 \leq (1 - \nu)x_1\} \\ &\cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq (1 + \nu)x_1, x_2 \geq (1 - \nu)x_1\}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что для такого конуса K выполнены все условия теоремы 2 при $A = \partial_2 F(0, 0)$, $B = \partial_2^2 F(0, 0)$, кроме условия квадратичной аппроксимации, причем $\Sigma = \mathbb{R}$. Заметим, что здесь не выполнено ни одно из условий, которыми согласно замечанию 4 можно заменить условие квадратичной аппроксимации в теореме 2. Именно поэтому уравнение

$$F(\sigma, x) = 0$$

относительно переменной x не имеет решений ни при каком $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [2] Измаилов А. Ф. О некоторых обобщениях леммы Морса // Тр. МИАН. 1998. Т. 220. С. 142–156.
- [3] Аваков Е. Р. Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 5. С. 3–13.
- [4] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [5] Измаилов А. Ф., Третьяков А. А. Факторанализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
- [6] Аваков Е. Р., Аграчев А. А., Арутюнов А. В. Множество уровня гладкого отображения в окрестности особой точки и нули квадратичного отображения // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 8. С. 1091–1104.
- [7] Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции и аномальные точки // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 8. С. 3–5.

Вычислительный Центр РАН, г. Москва
E-mail: izmaf@ccas.ru

Поступило
13.10.1998
Исправленный вариант
07.09.1999