Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кораблева, Параболические подстановочные представления групп ${}^2F_4(q)$ и ${}^3D_4(q^3)$, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 69–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm815>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:09:48

УДК 512.542.5

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВОЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ${}^2F_4(q)$ И ${}^3D_4(q^3)$

В. В. Кораблева

В работе находятся ранги, степени, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочных представлений ограниченных групп ${}^2F_4(q)$ и ${}^3D_4(q^3)$ по параболическим максимальным подгруппам неминимального индекса.

Библиография: 8 названий.

Изучение свойств конечных простых групп остается актуальным и после завершения в начале 80-х годов классификации конечных простых групп. На первый план выходит изучение различных свойств известных простых групп. Для этого используется информация о представлениях групп подстановками. Важнейший класс подстановочных представлений групп лиевского типа составляют параболические представления, т.е. представления на смежных классах по параболическим подгруппам.

Пусть G – конечная группа лиевского типа и P – параболическая максимальная подгруппа в группе G . Тогда можно рассмотреть представление группы G подстановками множества Ω правых смежных классов по подгруппе P , в котором элементу g из G соответствует подстановка, переводящая каждый смежный класс Px в Pxg . Обозначим через n степень этого представления. Подгруппа P является стабилизатором G_α точки $\alpha = P$ из Ω в данном представлении.

Рассмотрим действие G_α на $\Omega - \{\alpha\}$, и пусть $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ – все G_α -орбиты из $\Omega - \{\alpha\}$; тогда число $k + 1$ является подстановочным рангом подстановочного представления (G, Ω) , а подстепени n_i этого представления равны мощностям орбит Ω_i и могут быть вычислены как индексы двойных стабилизаторов $N_i = G_\alpha \cap G_{\alpha_i}$ в группе G_α , где $\alpha_i \in \Omega_i$. Полагаем $n_{k+1} = 1$ и $N_{k+1} = P$.

В обзоре [1] указывается на важность исследований параболических подстановочных представлений. Во-первых, подстановочные представления минимальной степени, как правило, параболические (см. [2] и [3]). Во-вторых, примитивные подстановочные представления большого ранга групп лиевского типа почти всегда являются параболическими (см. § 6 из [1]). Параболические представления минимальной степени скрученных групп изучены в [4].

В данной работе находятся ранги, степени, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочных представлений скрученных групп ${}^2F_4(q)$ и ${}^3D_4(q^3)$ по параболическим максимальным подгруппам неминимального индекса.

Обозначим через $X \cdot Y$ (соответственно $X : Y$) расширение (расщепляемое расширение) группы X посредством группы Y , X^l – прямое произведение l изоморфных копий

группы X , a – циклическую группу порядка a . Также используем определения и обозначения, связанные с группами лиевского типа из [5].

Основные результаты работы содержатся в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА 1. Для групп ${}^2F_4(q)$, $q = 2^s$, $s \geq 1$ и s нечетно, степень n , подстепеней n_i и двойные стабилизаторы N_i подстановочного представления по параболической максимальной подгруппе неминимального индекса содержатся в следующем списке:

1. $n = (q^3 + 1)(q^2 + 1)(q^6 + 1)$;
2. $n_1 = q^{11}$, $n_2 = q^2(q + 1)$, $n_3 = q^8(q + 1)$, $n_4 = q^5(q + 1)$, $n_5 = 1$;
3. $N_1 \cong GL_2(q)$, $N_2 \cong (2^s \cdot 2^{4s} \cdot 2^{5s}) : (q - 1)^2$, $N_3 \cong (2^s \cdot 2^s \times 2^{2s}) : (q - 1)^2$, $N_4 \cong (2^{3s} \cdot 2^{3s}) : (2^s : (q - 1)^2)$, $N_5 \cong (2^{2s} \cdot 2^s \cdot 2^{2s} \cdot 2^{4s} \cdot 2^{2s}) : GL_2(q)$.

Ранг представления равен 5.

ТЕОРЕМА 2. Для групп ${}^3D_4(q^3)$, $q = p^s$, степень n , подстепеней n_i и двойные стабилизаторы N_i подстановочного представления по параболической максимальной подгруппе неминимального индекса содержатся в следующем списке:

1. $n = (q^3 + 1)(q^8 + q^4 + 1)$;
2. $n_1 = q^3(q + 1)$, $n_2 = q^{11}$, $n_3 = q^7(q + 1)$, $n_4 = 1$;
3. $N_1 \cong (p^s \cdot p^{8s}) : ((q^3 - 1) \times (q - 1))$, $N_2 \cong d \cdot (PSL_2(q) \times (q^3 - 1)/d) \cdot d$, $N_3 \cong p^{5s} : ((q^3 - 1) \times (q - 1))$, $N_4 \cong (p^{2s} \cdot (p^{3s} \cdot p^{6s})) : (d \cdot (PSL_2(q) \times (q^3 - 1)/d) \cdot d)$, где $d = (2, q - 1)$.

Ранг представления равен 4.

Доказательствам этих теорем посвящены разделы 1 и 2.

1. Группа ${}^2F_4(q)$. Если e_1, e_2, e_3, e_4 – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^4$, то система корней типа F_4 состоит из 48 корней e_i , $e_i + e_j$, $(e_i + e_j + e_k + e_l)/2$, где $i, j, k, l = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, $|i|, |j|, |k|, |l|$ все различны и $e_{-i} = -e_i$ для всех i .

Простые корни имеют вид: $p_1 = e_2 - e_3$, $p_2 = e_3 - e_4$, $p_3 = e_4$, $p_4 = (e_1 - e_2 - e_3 - e_4)/2$.

Пусть $G = {}^2F_4(q)$, $q = 2^{2m+1}$, $m \geq 0$, $K = GF(q)$, W – группа Вейля группы G . Используем форму записи элементов из W , предложенную Ри в работе [6].

Группа W состоит из элементов вида $w(\varepsilon, \delta, \infty)$, $w(\infty, \varepsilon, \delta)$, $w(\varepsilon, \delta, \eta)$, действующих на $\mathbb{R}^4$ следующим образом:

$$w(\varepsilon, \delta, \infty): e_1 \rightarrow \varepsilon e_1, e_2 \rightarrow \varepsilon e_2, e_3 \rightarrow \delta e_3, e_4 \rightarrow \delta e_4,$$

$$w(\infty, \varepsilon, \delta): e_1 \rightarrow \varepsilon e_3, e_2 \rightarrow \varepsilon e_4, e_3 \rightarrow \delta e_1, e_4 \rightarrow \delta e_2,$$

$$w(\varepsilon, \delta, \eta): e_1 \rightarrow \frac{1}{2}(\varepsilon(e_1 + e_2) + \delta(e_3 + e_4)),$$

$$e_2 \rightarrow \frac{1}{2}(\varepsilon(e_1 - e_2) + \delta(e_3 - e_4)),$$

$$e_3 \rightarrow \frac{1}{2}\eta(\varepsilon(e_1 + e_2) - \delta(e_3 + e_4)),$$

$$e_4 \rightarrow \frac{1}{2}\eta(\varepsilon(e_1 - e_2) - \delta(e_3 - e_4)),$$

где $\varepsilon, \delta, \eta = \pm 1$.

Корень r вида e_i , $e_i + e_j$, $(e_i + e_j + e_k + e_l)/2$ обозначается через i , ij , $ijkl$ соответственно, при этом пишем i' вместо $-i$. Будем писать $x_i(t)$, $x_{ij}(t)$, $x_{ijkl}(t)$ для обозначения элемента $x_r(t)$, где r соответственно является корнем вида e_i , $e_i + e_j$, $(e_i + e_j + e_k + e_l)/2$. Например, $x_{123'4'}(t)$ означает $x_r(t)$, где $r = (e_1 + e_2 - e_3 - e_4)/2$.

Система корней типа F_4 разбивается на шестнадцать классов:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{2, 12', 1, 12\}, & S_{-1} &= \{2', 1'2, 1', 1'2'\}, \\ S_2 &= \{4, 34', 3, 34\}, & S_{-2} &= \{4', 3'4, 3', 3'4'\}, \\ S_3 &= \{12'34', 24, 1234, 13\}, & S_{-3} &= \{1'23'4, 2'4', 1'2'3'4', 1'3'\}, \\ S_4 &= \{12'3'4, 24', 123'4', 13'\}, & S_{-4} &= \{1'234', 2'4, 1'2'34, 1'3\}, \\ S_5 &= \{14, 1234'\}, & S_{-5} &= \{1'4', 1'2'3'4'\}, \\ S_6 &= \{14', 123'4'\}, & S_{-6} &= \{1'4, 1'2'34'\}, \\ S_7 &= \{23, 12'34\}, & S_{-7} &= \{2'3', 1'23'4'\}, \\ S_8 &= \{23', 12'3'4'\}, & S_{-8} &= \{2'3, 1'234\}. \end{aligned}$$

Классами, содержащими простые корни, являются классы S_2 и S_8 , поэтому в группе G с точностью до сопряжения две параболические максимальные подгруппы, а именно P_{S_2} и P_{S_8} . Одна из них, а именно P_{S_2} , является максимальной собственной подгруппой наименьшего индекса, и подстановочное представление группы G по ней исследовано в [4]. Рассмотрим другую параболическую максимальную подгруппу $P = P_{S_8}$. Опишем ее строение, используя разложение Леви (8.5.2 и 13.5 в [5]): $P = UL$, где $U = \langle X_{S_i} \mid i = 1, 2, \dots, 7 \rangle$ – унипотентный радикал, а $L = \langle H, X_{S_8}, X_{S_{-8}} \rangle$ – подгруппа Леви параболической подгруппы P . Здесь X_{S_i} являются корневыми подгруппами в G , а H – подгруппой Картана из G и $H \cong K^* \times K^*$. Подробнее об этих подгруппах см. 13.6, 13.7 и 14.1.2 из [5] или 2.1–2.4 из [7].

Пусть $\theta = 2^m$. Определим строение корневых подгрупп X_{S_i} , $1 \leq i \leq 8$. Для этого рассмотрим 12 типов элементов группы G , введенных в [6]:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= x_4(t^\theta) x_{34'}(t) x_3(t^{\theta+1}), & \alpha_2(t) &= x_3(t^\theta) x_{34}(t), \\ \alpha_3(t) &= x_{12'3'4'}(t^\theta) x_{23'}(t), & \alpha_4(t) &= x_{12'3'4}(t^\theta) x_{24'}(t) x_{123'4'}(t^{\theta+1}), \\ \alpha_5(t) &= x_2(t^\theta) x_{12'}(t) x_1(t^{\theta+1}), & \alpha_6(t) &= x_{12'34'}(t^\theta) x_{24}(t) x_{1234}(t^{\theta+1}), \\ \alpha_7(t) &= x_{12'34}(t^\theta) x_{23}(t), & \alpha_8(t) &= x_{123'4'}(t^\theta) x_{13'}(t), \\ \alpha_9(t) &= x_{123'4}(t^\theta) x_{14'}(t), & \alpha_{10}(t) &= x_{1234'}(t^\theta) x_{14}(t), \\ \alpha_{11}(t) &= x_{1234}(t^\theta) x_{13}(t), & \alpha_{12}(t) &= x_1(t^\theta) x_{12}(t). \end{aligned}$$

Приведем полный список (*) коммутаторных соотношений для этих элементов (см. [7]):

$$[\alpha_1(u), \alpha_3(t)] = \alpha_4(ut) \alpha_5(u^{2\theta+1} t^{2\theta}) \alpha_7(u^{2\theta+2} t) \alpha_{11}(u^{4\theta+3} t^{2\theta+1}) \alpha_{12}(u^{4\theta+3} t^{2\theta+2}),$$

$$\begin{aligned}
[\alpha_1(u), \alpha_4(t)] &= \alpha_5(ut^{2\theta})\alpha_6(u^{2\theta}t)\alpha_7(u^{2\theta+1}t)\alpha_9(ut^{2\theta+1}) \\
&\quad \times \alpha_{10}(u^{2\theta+1}t^{2\theta+1})\alpha_{11}(u^{2\theta+2}t^{2\theta+1})\alpha_{12}(u^{2\theta+1}t^{2\theta+2}), \\
[\alpha_1(u), \alpha_6(t)] &= \alpha_7(ut), \quad [\alpha_1(u), \alpha_8(t)] = \alpha_9(ut)\alpha_{11}(u^{2\theta+2}t)\alpha_{12}(u^{2\theta+1}t^{2\theta}), \\
[\alpha_1(u), \alpha_9(t)] &= \alpha_{10}(u^{2\theta}t)\alpha_{11}(u^{2\theta+1}t)\alpha_{12}(ut^{2\theta}), \\
[\alpha_1(u), \alpha_{10}(t)] &= \alpha_{11}(ut), \\
[\alpha_2(u), \alpha_3(t)] &= \alpha_5(ut^{2\theta})\alpha_6(ut)\alpha_7(u^{2\theta}t)\alpha_8(ut^{2\theta+1})\alpha_9(u^{2\theta}t^{2\theta+1})\alpha_{11}(u^{2\theta+1}t^{2\theta+1}), \\
[\alpha_2(u), \alpha_4(t)] &= \alpha_7(ut)\alpha_{11}(u^{2\theta}t^{2\theta+1})\alpha_{12}(ut^{2\theta+2}), \\
[\alpha_2(u), \alpha_8(t)] &= \alpha_{10}(ut)\alpha_{11}(u^{2\theta}t)\alpha_{12}(ut^{2\theta}), \\
[\alpha_2(u), \alpha_9(t)] &= \alpha_{11}(ut), \quad [\alpha_3(u), \alpha_5(t)] = \alpha_8(ut), \\
[\alpha_3(u), \alpha_6(t)] &= \alpha_8(u^{2\theta}t)\alpha_9(ut^{2\theta})\alpha_{12}(ut^{2\theta+1}), \\
[\alpha_3(u), \alpha_7(t)] &= \alpha_9(u^{2\theta}t)\alpha_{10}(ut^{2\theta}), \quad [\alpha_3(u), \alpha_{11}(t)] = \alpha_{12}(ut), \\
[\alpha_4(u), \alpha_5(t)] &= \alpha_9(ut), \\
[\alpha_4(u), \alpha_7(t)] &= \alpha_{10}(u^{2\theta}t)\alpha_{11}(ut^{2\theta})\alpha_{12}(u^{2\theta+1}t), \\
[\alpha_4(u), \alpha_{10}(t)] &= \alpha_{12}(ut), \quad [\alpha_5(u), \alpha_6(t)] = \alpha_{10}(ut), \\
[\alpha_5(u), \alpha_7(t)] &= \alpha_{11}(ut), \quad [\alpha_6(u), \alpha_9(t)] = \alpha_{12}(ut), \\
[\alpha_7(u), \alpha_8(t)] &= \alpha_{12}(ut), \quad [\alpha_i(u), \alpha_i(t)] = \alpha_{j(i)}(u^{2\theta}t + ut^{2\theta}),
\end{aligned} \tag{*}$$

где $j(i) = 2, 8, 12, 11$ соответствуют $i = 1, 4, 5, 6$. Все другие коммутаторы $[\alpha_i(u), \alpha_j(t)]$ равны 1. Кроме того, $\alpha_i(u)\alpha_i(t) = \alpha_i(u+t)\alpha_{j(i)}(ut^{2\theta})$ для $i = 1, 4, 5, 6$.

Пусть $s = 2m + 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
X_{S_1} &= \langle \alpha_5(t), \alpha_{12}(u) \mid u, t \in K \rangle \cong 2^s \cdot 2^s, \\
X_{S_2} &= \langle \alpha_1(t), \alpha_2(u) \mid u, t \in K \rangle \cong 2^s \cdot 2^s, \\
X_{S_3} &= \langle \alpha_6(t), \alpha_{11}(u) \mid u, t \in K \rangle \cong 2^s \cdot 2^s, \\
X_{S_4} &= \langle \alpha_4(t), \alpha_8(u) \mid u, t \in K \rangle \cong 2^s \cdot 2^s, \\
X_{S_5} &= \langle \alpha_{10}(t) \mid t \in K \rangle \cong 2^s, \quad X_{S_6} = \langle \alpha_9(t) \mid t \in K \rangle \cong 2^s, \\
X_{S_7} &= \langle \alpha_7(t) \mid t \in K \rangle \cong 2^s, \quad X_{S_8} = \langle \alpha_3(t) \mid t \in K \rangle \cong 2^s.
\end{aligned}$$

Используя только те соотношения из (*), в которых не встречается $\alpha_3(t)$, получаем, что $U \cong 2^{2s} \cdot 2^s \cdot 2^{2s} \cdot 2^{4s} \cdot 2^{2s}$. Подгруппа Леви $L = \langle H, X_{S_8}, X_{S_{-8}} \rangle$ изоморфна $GL_2(q)$ (см. 2.4 из [7]).

Получаем окончательно

$$P = UL \cong (2^{2s} \cdot 2^s \cdot 2^{2s} \cdot 2^{4s} \cdot 2^{2s}) : GL_2(q),$$

$$|P| = q^{12}(q^2 - 1)(q - 1) \text{ и } n = |G : P| = (q^3 + 1)(q^2 + 1)(q^6 + 1).$$

Рассмотрим теперь представление группы G на смежных классах по P . Для того, чтобы определить двойные стабилизаторы, т. е. подгруппы вида $P \cap P^x$, необходимо выбрать подходящие элементы x из G . Согласно предложению 13.6.5 из [5] $X_S^{n_w} = n_w X_S n_w^{-1} = X_{w(S)}$ для некоторого специально выбранного элемента n_w из G . Поэтому действие сопряжением элемента n_w на множестве корневых подгрупп X_{S_i} определяется действием элемента w группы W на множестве классов S_i , $i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 8$, и в дальнейшем можно отождествить эти действия и писать $X_{S_i}^w$ вместо $X_{S_i}^{n_w}$.

Рассмотрим действие элемента $w_1 = w(-1, -1, \infty)$ из W на множестве классов S_i . Поскольку $w_1(e_j) = -e_j$ для $1 \leq j \leq 4$, то $w_1(S_i) = S_{-i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, 8$. Имеем $N_1 = P \cap P^{w_1} = L$ и $n_1 = |P : N_1| = |U| = q^{11}$.

Положим $w_2 = w(1, -1, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} w_2: e_1 &\rightarrow \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4), & e_2 &\rightarrow \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4), \\ e_3 &\rightarrow \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), & e_4 &\rightarrow \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4). \end{aligned}$$

Получаем $w_2(S_1) = S_4$, $w_2(S_2) = S_3$, $w_2(S_3) = S_1$, $w_2(S_4) = S_{-2}$, $w_2(S_5) = S_6$, $w_2(S_6) = S_8$, $w_2(S_7) = S_5$, $w_2(S_8) = S_{-7}$, $w_2(S_{-8}) = S_7$. Отсюда $N_2 = P \cap P^{w_2} = (U \cap P^{w_2}) : (L \cap P^{w_2}) = X_{S_1} X_{S_3} X_{S_4} X_{S_5} X_{S_6} X_{S_7} : \langle H, X_{S_8} \rangle$. Используя соотношения (*), получаем $N_2 \cong (2^s \cdot 2^{4s} \cdot 2^{5s}) : (q-1)^2$ и $n_2 = |P : N_2| = q^{12}(q^2 - 1)(q-1)/(q^{10}(q-1)^2) = q^2(q+1)$.

Положим $w_3 = w(-1, -1, -1)$. Тогда

$$\begin{aligned} w_3: e_1 &\rightarrow \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 - e_4), & e_2 &\rightarrow \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 + e_4), \\ e_3 &\rightarrow \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4), & e_4 &\rightarrow \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4). \end{aligned}$$

Получаем $w_3(S_1) = S_{-3}$, $w_3(S_2) = S_4$, $w_3(S_3) = S_{-2}$, $w_3(S_4) = S_{-1}$, $w_3(S_5) = S_{-7}$, $w_3(S_6) = S_{-5}$, $w_3(S_7) = S_8$, $w_3(S_8) = S_{-6}$, $w_3(S_{-8}) = S_6$. Отсюда $N_3 = P \cap P^{w_3} = (U \cap P^{w_3}) : (L \cap P^{w_3}) = X_{S_4} X_{S_6} : \langle H, X_{S_8} \rangle$. Используя соотношения (*), получаем $N_3 \cong (2^s \cdot 2^s \times 2^{2s}) : (q-1)^2$ и $n_3 = |P : N_3| = q^8(q+1)$.

Далее, положим $w_4 = w(\infty, 1, -1)$. Тогда

$$w_4: e_1 \rightarrow e_3, e_2 \rightarrow e_4, e_3 \rightarrow -e_1, e_4 \rightarrow -e_2.$$

Получаем $w_4(S_1) = S_2$, $w_4(S_2) = S_{-1}$, $w_4(S_3) = S_{-4}$, $w_4(S_4) = S_3$, $w_4(S_5) = S_{-8}$, $w_4(S_6) = S_7$, $w_4(S_7) = S_{-6}$, $w_4(S_8) = S_5$, $w_4(S_{-8}) = S_{-5}$. Отсюда $N_4 = P \cap P^{w_4} = (U \cap P^{w_4}) : (L \cap P^{w_4}) = X_{S_2} X_{S_3} X_{S_5} X_{S_7} : \langle H, X_{S_{-8}} \rangle$. Используя соотношения (*), получаем $N_4 \cong (2^{3s} \cdot 2^{3s}) : (2^s : (q-1)^2)$ и $n_4 = |P : N_4| = q^{12}(q^2 - 1)(q-1)/(q^7(q-1)^2) = q^5(q+1)$.

Выполняется равенство $n - 1 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, поэтому $N_5 = P$, $n_5 = 1$ и ранг представления группы G на смежных классах по подгруппе P равен 5.

2. Группа ${}^3D_4(q^3)$. Простые корни системы корней типа D_4 обозначим через p_1, p_2, p_3, p_4 . Существует симметрия порядка 3 диаграммы Дынкина этой системы. Обозначим через $\bar{r}$ образ простого корня r при этой симметрии. Пусть $G = {}^3D_4(q^3)$, $K = GF(q^3)$, $q = p^s$, p – простое число.

Система корней типа D_4 разбивается на следующие двенадцать классов, образующих систему корней типа G_2 :

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1 &= \{p_1, p_3, p_4\}, & \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 &= \{p_1 + p_2, p_2 + p_4, p_2 + p_3\}, \\ 2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 &= \{p_1 + p_2 + p_3, p_1 + p_2 + p_4, p_2 + p_3 + p_4\}, \\ 3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2 &= \{p_1 + 2p_2 + p_3 + p_4\}, & 3\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 &= \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4\}, \\ \tilde{p}_2 &= \{p_2\}, & -\tilde{p}_1 &= \{-p_1, -p_3, -p_4\}, \\ -\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 &= \{-p_1 - p_2, -p_2 - p_4, -p_2 - p_3\}, \\ -2\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 &= \{-p_1 - p_2 - p_3, -p_1 - p_2 - p_4, -p_2 - p_3 - p_4\}, \\ -3\tilde{p}_1 - 2\tilde{p}_2 &= \{-p_1 - 2p_2 - p_3 - p_4\}, \\ -3\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 &= \{-p_1 - p_2 - p_3 - p_4\}, & -\tilde{p}_2 &= \{-p_2\}.\end{aligned}$$

Заметим, что в этом разбиении встречаются классы двух видов. Для классов первого вида $S = \{r\}$ соответствующая корневая подгруппа $X_S = \{x_r(t) \mid t = t^q, t \in K\} \cong p^s$, а для классов второго вида $S = \{r, \bar{r}, \bar{\bar{r}}\}$ корневая подгруппа $X_S = \{x_r(t)x_{\bar{r}}(t^q)x_{\bar{\bar{r}}}(t^{q^2}) \mid t \in K\} \cong p^{3s}$.

Группа G является подгруппой группы $D_4(q^3)$. В G с точностью до сопряжения две параболические максимальные подгруппы $P_{\tilde{p}_1}$ и $P_{\tilde{p}_2}$. Подгруппа $P_{\tilde{p}_1}$ является максимальной собственной подгруппой наименьшего индекса, и подстановочное представление группы G по ней исследовано в [4]. Положим $P = P_{\tilde{p}_2}$ и определим ранг, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочного представления группы G на смежных классах по подгруппе P . Воспользуемся разложением Леви (8.5.2 из [5]) $P = UL$, где $U = X_{\tilde{p}_1} \cdot X_{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2} \cdot X_{2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2} \cdot X_{3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2} \cdot X_{3\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}$, $L = \langle H, X_{\tilde{p}_2}, X_{-\tilde{p}_2} \rangle$, H – подгруппа Картана из G , изоморфная $(q^3 - 1) \times (q - 1)$.

Выпишем нетривиальные коммутаторные соотношения для корневых подгрупп подгруппы U , вытекающие из коммутаторной формулы Шевалле (теорема 5.2.2 из [5]):

$$\begin{aligned}1 \neq [X_{\tilde{p}_1}, X_{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}] &\leq X_{2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2} X_{3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2} X_{3\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}, \\ 1 \neq [X_{2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}, X_{\tilde{p}_1}] &\leq X_{3\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}, \quad 1 \neq [X_{2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}, X_{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}] \leq X_{3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2}.\end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что подгруппа U изоморфна $p^{2s} \cdot (p^{3s} \cdot p^{6s})$.

Подгруппа $L' = \langle X_{\tilde{p}_2}, X_{-\tilde{p}_2} \rangle$ изоморфна $SL_2(q)$ (см. [5]).

Рассмотрим элемент $h_{2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}(\lambda)$ из H , где $\lambda \in K^*$. Используя свойства корней системы G_2 , получаем $h_{2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}(\lambda) = h_{\tilde{p}_1}(\lambda^2)h_{\tilde{p}_2}(\lambda^3)$. С другой стороны, из доказательства теоремы 13.7.2 в [5] следует $h_{\tilde{p}_1}(t) = h_{p_1}(t)h_{p_3}(t^q)h_{p_4}(t^{q^2})$ и $h_{\tilde{p}_2}(\mu) = h_{p_2}(\mu)$, где $\mu^q = \mu$ и $\mu, t \in K^*$.

В силу леммы 20 из [8, § 3] получаем, что $h_{2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}(\lambda)x_{\tilde{p}_2}(t)h_{2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}(\lambda)^{-1} = x_{\tilde{p}_2}(\lambda^{A_{2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, \tilde{p}_2}}t)$, где $A_{r,s}$ – число Картана и $A_{2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, \tilde{p}_2} = 0$, поэтому

$h_{2\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}(\lambda)x_{\tilde{p}_2}(t)h_{2\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}(\lambda)^{-1} = x_{\tilde{p}_2}(t)$ и $h_{2\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}(\lambda)$ централизует подгруппу L' при любом λ из K^* .

Рассмотрим $\langle h_{2\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}(\lambda) \mid \lambda \in K^* \rangle \cap L'$. Отметим, что

$$h_{2\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}(\lambda) = h_{p_1}(\lambda^2)h_{p_2}(\lambda^3)h_{p_3}((\lambda^2)^q)h_{p_4}((\lambda^2)^{q^2}).$$

Причем $h_{2\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}(\lambda) \in L'$ тогда и только тогда, когда $\lambda^2 = 1$. При таких λ имеем $h_{2\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}(\lambda) = h_{p_2}(\lambda)$ и $\lambda^q = \lambda$.

Согласно 12.1 из [5] $Z(L') = \{h_{\tilde{p}_2}(\mu) \mid \mu \in K^*, \mu^q = \mu, \mu^2 = 1\} = \{h_{p_2}(\mu) \mid \mu \in K^*, \mu^q = \mu, \mu^2 = 1\}$.

Получаем, что $L \cong d \cdot (PSL_2(q) \times (q^3 - 1)/d) \cdot d$, где $d = (2, q - 1)$, и, следовательно,

$$P \cong (p^{2s} \cdot (p^{3s} \cdot p^{6s})) : (d \cdot (PSL_2(q) \times (q^3 - 1)/d) \cdot d).$$

Отсюда $|P| = q^{12}(q^2 - 1)(q^3 - 1)$ и $n = |G : P| = (q^3 + 1)(q^8 + q^4 + 1)$.

Определим подстепени и двойные стабилизаторы подстановочного представления группы G на смежных классах по подгруппе P . Согласно лемме 13.6.5 из [5] так же, как и для группы ${}^2F_4(q)$, действие элемента группы G на множестве корневых подгрупп из G определяется действием подходящего элемента из группы Вейля на системе корней.

Возьмем $w_1 = w_{\tilde{p}_1}$; тогда

$$\begin{aligned} w_1(\tilde{p}_1) &= -\tilde{p}_1, & w_1(\tilde{p}_2) &= 3\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, & w_1(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) &= 2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, \\ w_1(3\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) &= \tilde{p}_2, & w_1(2\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) &= \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, \\ w_1(-\tilde{p}_2) &= -(3\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2), & w_1(3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2) &= 3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2. \end{aligned}$$

Используя формулу Шевалле и строение H из [5], получаем

$$\begin{aligned} N_1 &= P \cap P^{w_1} = (U : L) \cap P^{w_1} = (U \cap P^{w_1}) : (L \cap P^{w_1}) \\ &= \langle X_{3\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}, X_{3\tilde{p}_1+2\tilde{p}_2}, X_{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}, X_{2\tilde{p}_1+\tilde{p}_2} \rangle : \langle H, X_{\tilde{p}_2} \rangle \\ &\cong \langle X_{3\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}, X_{3\tilde{p}_1+2\tilde{p}_2}, X_{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}, X_{2\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}, X_{\tilde{p}_2} \rangle : H \cong (p^s \cdot p^{8s}) : ((q^3 - 1) \times (q - 1)). \end{aligned}$$

Отсюда $n_1 = |P : N_1| = q^3(q + 1)$.

Элемент $w_2 = w_{2\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}$ оставляет на месте корни $\tilde{p}_2$ и $-\tilde{p}_2$, а остальные пять положительных корней переводит в отрицательные, поэтому $N_2 = P \cap P^{w_2} = L$ и $n_2 = |P : N_2| = q^{11}$.

Рассмотрим элемент $w_3 = w_{3\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} w_3(\tilde{p}_2) &= 3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2, & w_3(\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2) &= \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2, \\ w_3(3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2) &= \tilde{p}_2, & w_3(-\tilde{p}_2) &= -(3\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_2). \end{aligned}$$

Элемент w_3 отображает остальные три положительных корня в отрицательные и поэтому

$$\begin{aligned} N_3 &= P \cap P^{w_3} = (U : L) \cap P^{w_3} = (U \cap P^{w_3}) : (L \cap P^{w_3}) \\ &= \langle X_{3\tilde{p}_1+2\tilde{p}_2}, X_{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2} \rangle : \langle H, X_{\tilde{p}_2} \rangle \\ &\cong \langle X_{3\tilde{p}_1+2\tilde{p}_2}, X_{\tilde{p}_1+\tilde{p}_2}, X_{\tilde{p}_2} \rangle : H \cong p^{5s} : ((q^3 - 1) \times (q - 1)). \end{aligned}$$

Отсюда $n_3 = |P : N_3| = q^7(q + 1)$. Очевидно, что $n - 1 = n_1 + n_2 + n_3$, поэтому $N_4 = P$, $n_4 = 1$ и ранг представления равен 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // УМН. 1986. Т. 41. № 1 (247). С. 57–96.
- [2] Cooperstein B. N. Minimal degree for a permutation representation of a classical group // Israel J. Math. 1978. V. 30. № 3. P. 213–235.
- [3] Liebeck M. W., Saxl J. On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. 1987. V. 55. P. 299–330.
- [4] Васильев А. В. Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп скрученного типа // Алгебра и логика. 1998. Т. 37. № 1. С. 17–35.
- [5] Carter R. W. Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1972.
- [6] Ree R. A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type (F_4) // Amer. J. Math. 1961. V. 83. P. 401–420.
- [7] Shinoda K. A characterization of odd order extension of Ree groups ${}^2F_4(q)$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1975. V. 22. P. 79–102.
- [8] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.

Челябинский государственный университет

Поступило

06.09.1997

Исправленный вариант

20.04.1999