Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. П. Лукашенко, Об аналогах теоремы Колмогорова–Селиверстова–Плесснера для неортогональных систем функций, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 87–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 18:06:50

УДК 517.518 + 517.982

ОБ АНАЛОГАХ ТЕОРЕМЫ КОЛМОГорова–СЕЛИВЕРСТОВА–ПЛЕССНЕРА ДЛЯ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

Т. П. Лукашенко

Для произвольных систем функций получены оценки роста частичных сумм в зависимости от роста функций Лебега. Аналоги теорем Колмогорова–Селиверстова–Плесснера о сходимости тригонометрических рядов и Качмажа о сходимости ортогональных рядов доказываются для любых (неортогональных) систем функций, а также для ортоподобных и обобщенных ортоподобных систем.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. В 1925 году одновременно и независимо А. Н. Колмогоровым и Г. А. Селиверстовым в [1], [2] и А. И. Плесснером в [3] была доказана теорема о сходимости почти всюду тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

при условии сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \ln n$. Этот результат 40 лет являлся наилучшим в теории тригонометрических рядов, широко использовался (см. [4, глава V]), пока в 1966 году Л. Карлесон в [5] не решил проблему Н. Н. Лузина, доказав, что тригонометрический ряд сходится почти всюду при условии сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$. После результата Л. Карлесона теорема Колмогорова–Селиверстова–Плесснера, связывавшая сходимость с ростом констант Лебега, потеряла свое значение в теории тригонометрических рядов, но распространенная в 1929 году С. Качмажем в [6] на общие ортогональные ряды осталась важным результатом теории таких рядов, связывающим сходимость с поведением функций Лебега (см. [7, гл. 5, § 9], [8, гл. III, § 1], [9, гл. 8, § 1]).

Автором в тезисах [10] и в статье [11] было дано определение более общих, чем ортогональные, систем разложения в гильбертовом пространстве – систем разложения, подобных ортогональным, или, более кратко, ортоподобных. Ортоподобные системы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00332, и программы поддержки ведущих научных школ РФ, грант № 96/97-15-96073.

разложения с системой индексов из пространства с неотрицательной мерой обладают почти всеми свойствами ортогональных систем: имеют аналог равенства Парсеваля, аналог теоремы Рисса–Фишера, аналог тождества Бесселя (см. [12], [13]). В случае, когда H – пространство Лебега L^2 , они имеют аналоги многих замечательных свойств ортогональных рядов: аналог теоремы Меньшова–Радемахера о сходимости почти всюду, аналоги теорем Орлича и Тандори о безусловной сходимости почти всюду (см. [14]). В [15] автор ввел еще более общее понятие обобщенной ортоподобной системы разложения, которое охватило систему экспонент $\{\exp(2\pi i\omega x)\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ из преобразования Фурье и систему функций $\{1/(\pi(\omega - x))\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ из преобразования Гильберта, которые не являются ортоподобными системами разложения. Эти системы также имеют аналоги почти всех свойств ортогональных систем: аналог равенства Парсеваля, аналог теоремы Рисса–Фишера, тождества Бесселя (см. [15]). В случае, когда H – пространство Лебега L^2 , аналог теоремы Меньшова–Радемахера о сходимости почти всюду и аналоги теорем Орлича и Тандори о безусловной сходимости почти всюду из [15] справедливы для обобщенных ортоподобных систем, так как при доказательстве этих теорем для ортоподобных систем в [15] использовались только те свойства ортоподобных систем, которые имеют и обобщенные ортоподобные системы.

В данной работе доказываются аналоги теорем Колмогорова–Селиверстова–Плесснера и Качмажа для общих неортогональных систем функций, а также для ортоподобных и обобщенных ортоподобных систем. Заметим, что еще в 1976 году К. Тандори в [16] перенес на некоторые счетные неортогональные системы функций на отрезке теорему Качмажа. Для счетных ортоподобных систем функций на пространстве с мерой аналог этой теоремы был недавно получен Т. В. Родионовым как следствие его результатов об ортогонализации счетных ортоподобных систем. Отметим что К. Тандори в [16] также использовал ортогонализацию. В данной статье ортогонализация не применяется.

2. Оценка частичных интегралов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если H – пространство, а Ω – множество, то систему $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ элементов H будем называть *системой в H с индексами из Ω* .

В случае, когда Ω является множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, это счетная система элементов H .

Будем далее предполагать, что X – пространство со счетно аддитивной неотрицательной мерой ν , H – пространство действительных или комплексных функций на X , Ω – пространство со счетно аддитивной неотрицательной мерой μ , $\{e^\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$ – система в H с индексами из Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Аналогом функции Лебега системы $\{e^\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$ для измеримого множества $\Upsilon \subset \Omega$ по измеримому множеству $E \subset X$ будем называть функцию

$$L_\Upsilon^E(x) = \int_E \left| \int_\Upsilon e^\omega(x) \overline{e^\omega(t)} d\mu(\omega) \right| d\nu(t),$$

где интегралы по Υ и по E понимаются как интегралы Лебега от функции с параметрами x, t в первом интеграле и с параметром x во втором.

ПРИМЕЧАНИЕ. Разумеется, могут представлять интерес и другие трактовки обоих интегралов. Так интеграл по Υ может пониматься как в более общем, чем у Лебега смысле (например, в несобственном), так и в смысле интеграла Лебега от функции со значениями в некотором банаховом пространстве функций.

ЛЕММА 1. Пусть дан конечный набор измеримых подмножеств $\{\Omega_k\}_{k=0}^K$, причем $\Omega_0 = \emptyset$, $\Omega_{k-1} \subset \Omega_k$ для $1 \leq k \leq K$, и измеримое множество $E \subset X$; функция $e^\omega(x)e^\omega(y)$ суммируема на $\Omega_K \times E^2$. Пусть $L_k(x) = L_{\Omega_k}^E(x)$ – аналоги функций Лебега системы $\{e^\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$ для подмножеств Ω_k по измеримому множеству $E \subset X$, а λ_k , $k = 0, 1, \dots, K$, – неубывающая строго положительная числовая последовательность.

Тогда для любой измеримой, принимающей целочисленные значения $0, 1, \dots, K$ функции $k(x)$ на E и любой функции $c(\omega)$ на Ω (действительно или комплексно-значной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) с $C = \left(\int_{\Omega_K} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ при условии суммируемости функции $c(\omega)e^\omega(x)$ на $\Omega_K \times E$ для частичных интегралов $I_k(x) = \int_{\Omega_k} c(\omega)e^\omega(x) d\mu(\omega)$ выполняется оценка

$$\left| \int_E \frac{I_{k(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{k(x)}}} d\nu(x) \right| \leq \sqrt{2} C \left(\int_E \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{L_k(x)}{\lambda_k} d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$I = \int_E \frac{I_{k(x)}(x)}{\sqrt{\lambda_{k(x)}}} d\nu(x) = \int_E \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k(x)}}} \int_{\Omega_N} c(\omega) \chi_{k(x)}(\omega) e^\omega(x) d\mu(\omega) d\nu(x),$$

где $\chi_k(\omega)$ – характеристическая функция множества Ω_k .

Используя суммируемость $c(\omega)e^\omega(x)$ как функции на $\Omega_K \times E$, измеримость функции $k(x)$ на E и теорему Фубини (см. [17, с. 208]), переставим порядок интегрирования и затем применим неравенство Гёльдера из [17, с. 134]) для $p = 2$. Получим

$$\begin{aligned} |I|^2 &= \left| \int_{\Omega_N} c(\omega) \int_E \frac{\chi_{k(x)}(\omega) e^\omega(x)}{\sqrt{\lambda_{k(x)}}} d\nu(x) d\mu(\omega) \right|^2 \\ &\leq \int_{\Omega_N} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \cdot \int_{\Omega} \left| \int_E \chi_{k(x)}(\omega) e^\omega(x) d\nu(x) \right|^2 d\mu(\omega). \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим последний сомножитель в (2) как $\mathcal{I}$. Записывая квадрат модуля интеграла в нем в виде произведения интегралов, мы получаем, что

$$\mathcal{I} = \int_{\Omega} \int_E \int_E \frac{\chi_{k(x)}(\omega) \chi_{k(y)}(\omega) e^\omega(x) \overline{e^\omega(y)}}{\sqrt{\lambda_{k(x)} \lambda_{k(y)}}} d\nu(x) d\nu(y) d\mu(\omega).$$

По условию функция $e^\omega(x)e^\omega(y)$ суммируема на $\Omega_K \times E^2$. Значит, пользуясь теоремой Фубини (см. [18, с. 208]), мы можем поменять порядок интегрирования и сделать интегрирование по ω из последнего первым. Так как

$$\int_{\Omega} \chi_{k(x)}(\omega) \chi_{k(y)}(\omega) e^\omega(x) \overline{e^\omega(y)} d\mu(\omega) = \int_{\Omega_{k(x,y)}} e^\omega(x) \overline{e^\omega(y)} d\mu(\omega),$$

где $k(x, y) = \min\{k(x), k(y)\}$, то, учитывая неубывание конечной последовательности λ_k , получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\leq \int_E \int_E \left| \frac{1}{\lambda_{k(x, y)}} \int_{\Omega_{k(x, y)}} e^\omega(x) \overline{e^\omega(y)} d\mu(\omega) \right| d\nu(x) d\nu(y) \\ &\leq \int_E \frac{1}{\lambda_{k(x)}} \int_E \left| \int_{\Omega_{k(x)}} e^\omega(x) \overline{e^\omega(y)} d\mu(\omega) \right| d\nu(y) d\nu(x) \\ &\quad + \int_E \frac{1}{\lambda_{k(y)}} \int_E \left| \int_{\Omega_{k(y)}} e^\omega(x) \overline{e^\omega(y)} d\mu(\omega) \right| d\nu(x) d\nu(y) \\ &\leq \int_E \frac{L_k(x)(x)}{\lambda_{k(x)}} d\nu(x) + \int_E \frac{L_k(y)(y)}{\lambda_{k(y)}} d\nu(y) \leq 2 \int_E \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{L_k(x)}{\lambda_k} d\nu(x). \end{aligned}$$

Оценка (1) установлена, лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть дан конечный набор измеримых подмножеств $\{\Omega_k\}_{k=0}^K$, причем $\Omega_0 = \emptyset$, $\Omega_{k-1} \subset \Omega_k$ для $1 \leq k \leq K$ и измеримое множество $E \subset X$; функция $e^\omega(x)e^\omega(y)$ суммируема на $\Omega_K \times E^2$. Пусть $L_k(x) = L_{\Omega_k}^E(x)$ – аналоги функций Лебега системы $\{e^\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$ для подмножеств Ω_k по измеримому множеству $E \subset X$, а λ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, – неубывающая строго положительная числовая последовательность.

Тогда для любой функции $c(\omega)$ на Ω (действительно или комплекснозначной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) с $\mathbf{C} = \left(\int_{\Omega_K} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ при условии суммируемости функции $c(\omega)e^\omega(x)$ на $\Omega_K \times E$ для частичных интегралов $I_k(x) = \int_{\Omega_k} c(\omega) e^\omega(x) d\mu(\omega)$ выполняется оценка

$$\int_E \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{|I_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} d\nu(x) \leq 4\sqrt{2} \mathbf{C} \left(\int_E \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{L_k(x)}{\lambda_k} d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq K} \frac{|I_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} &\leq \max_{1 \leq k \leq K} \frac{|\operatorname{Re} I_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} + \max_{1 \leq k \leq K} \frac{|\operatorname{Im} I_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \leq \max_{0 \leq k \leq K} \frac{\operatorname{Re} I_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \\ &\quad + \max_{0 \leq k \leq K} \frac{-\operatorname{Re} I_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} + \max_{0 \leq k \leq K} \frac{\operatorname{Im} I_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} + \max_{0 \leq k \leq K} \frac{-\operatorname{Im} I_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}, \end{aligned}$$

где четыре последних слагаемых неотрицательны, а из леммы 1 следует справедливость оценок

$$\int_E \max_{0 \leq k \leq K} \frac{\pm \operatorname{Re} I_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} d\nu(x) \leq \sqrt{2} \mathbf{C} \left(\int_E \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{L_k(x)}{\lambda_k} d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\int_E \max_{0 \leq k \leq K} \frac{\pm \operatorname{Im} I_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} d\nu(x) \leq \sqrt{2} \mathbf{C} \left(\int_E \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{L_k(x)}{\lambda_k} d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

то лемма 2 верна.

ТЕОРЕМА 1. Пусть дан счетный набор измеримых подмножеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$, причем $\Omega_{k-1} \subset \Omega_k$ для $k \in \mathbb{N}$, и измеримое множество $E \subset X$; функция $e^\omega(x)e^\omega(y)$ суммируема на $\Omega_k \times E^2$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $L_k(x) = L_{\Omega_k}^E$, аналоги функций Лебега системы $\{e^\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$ для подмножеств Ω_k по измеримому множеству $E \subset X$ таковы, что $L_k(x) \leq D(x)\lambda_k$ для $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$, где неотрицательная функция $D(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E , а λ_k , $k \in \mathbb{N}$, – неубывающая положительная числовая последовательность.

Тогда для любой функции $c(\omega)$ на Ω (действительно или комплекснозначной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) с $\int_\Omega |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \infty$ при условии суммируемости функции $c(\omega)e^\omega(x)$ на $\Omega_k \times E$ при всех $k \in \mathbb{N}$ для частичных интегралов $I_k(x) = \int_{\Omega_k} c(\omega)e^\omega(x) d\mu(\omega)$ почти во всех точках множества E выполняется оценка

$$I_k(x) = O_x(\sqrt{\lambda_k}),$$

где $O_x(\cdot)$ зависит от точки $x \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 2 и теорему Леви (см. [17, с.168]), получаем, что почти всюду на E существует конечный предел

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq K} \frac{|I_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|I_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}},$$

что и доказывает теорему.

Если в качестве Ω взять множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с $\mu(n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то частным случаем теоремы 1 является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть измеримое множество $E \subset X$ и $\{e^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность суммируемых на E функций, а m_k , $k \in \mathbb{N}$, – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Пусть $L_{m_k}(x) = L_{\{n \in \mathbb{N} : n \leq m_k\}}^E = \int_E \left| \sum_{n=1}^{m_k} e^n(x) \overline{e^n(t)} \right| dv(t)$, аналоги функций Лебега системы $\{e^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ для подмножеств $\{n \in \mathbb{N} : n \leq m_k\}$ по измеримому множеству $E \subset X$ таковы, что $L_{m_k}(x) \leq D(x)\lambda_k$ для $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$, где неотрицательная функция $D(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E , а λ_k , $k \in \mathbb{N}$, – неубывающая положительная числовая последовательность.

Тогда для любой последовательности c_n , $n \in \mathbb{N}$, (действительно или комплекснозначной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) с $\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 < \infty$ для частичных сумм $S_{m_k}(x) = \sum_{n=1}^{m_k} c_n e^n(x)$ почти во всех точках множества E выполняется оценка

$$S_{m_k}(x) = O_x(\sqrt{\lambda_k})$$

при $k \rightarrow \infty$, где $O_x(\cdot)$ зависит от точки $x \in E$.

3. О сходимости частичных интегралов почти всюду.

ЛЕММА 3. Пусть дан счетный набор измеримых подмножеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$, причем $\Omega_{k-1} \subset \Omega_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любой функции $c(\omega)$ на Ω (действительно или комплекснозначной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) и любой неубывающей последовательности γ_k , $k \in \mathbb{N}$, для частичных интегралов $I_k(x) = \int_{\Omega_k} c(\omega) e^{\omega}(x) d\mu(\omega)$ выполняется оценка

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_j}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma_{j+1}}} \right) |\sigma_j(x)| + \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sigma_k(x)|}{\sqrt{\gamma_k}}, \quad (4)$$

где $\sigma_j(x) = \sum_{r=1}^j \sqrt{\gamma_r} \int_{\Omega_r \setminus \Omega_{r-1}} c(\omega) e^{\omega}(x) d\mu(\omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$I_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{\gamma_j}} \sqrt{\gamma_j} \int_{\Omega_j \setminus \Omega_{j-1}} c(\omega) e^{\omega}(x) d\mu(\omega),$$

используя преобразование Абеля, получим равенство

$$I_k(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_j}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma_{j+1}}} \right) \sigma_j(x) + \frac{1}{\sqrt{\gamma_k}} \sigma_k(x),$$

где $\sigma_j(x) = \sum_{r=1}^j \sqrt{\gamma_r} \int_{\Omega_r \setminus \Omega_{r-1}} c(\omega) e^{\omega}(x) d\mu(\omega)$, из которого следует оценка (4). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2 (аналог теоремы Колмогорова–Селиверстова–Плесснера для неортогональных систем). Пусть дан счетный набор измеримых подмножеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$, причем $\Omega_{k-1} \subset \Omega_k$ для $k \in \mathbb{N}$, и измеримое множество $E \subset X$; функция $e^{\omega}(x) e^{\omega}(y)$ суммируема на $\Omega_k \times E^2$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $L_k(x) \equiv L_{\Omega_k}^E$, аналоги функций Лебега системы $\{e^{\omega}(x)\}_{\omega \in \Omega}$ для подмножеств Ω_k по измеримому множеству $E \subset X$ таковы, что $L_k(x) \leq D(x) \lambda_k$ для $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$, где неотрицательная функция $D(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E , а λ_k , $k \in \mathbb{N}$, – неубывающая положительная числовая последовательность.

Тогда для любой функции $c(\omega)$ на Ω (действительно или комплекснозначной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) и любой неубывающей последовательности $\gamma_k > 0$, $\gamma_k \geq \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, с величинами $\mathbf{C} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ и $\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma_{k+1}}} \right) < \infty$ при условии суммируемости функции $c(\omega) e^{\omega}(x)$ на $\Omega_k \times E$ при всех $k \in \mathbb{N}$ для частичных интегралов $I_k(x) = \int_{\Omega_k} c(\omega) e^{\omega}(x) d\mu(\omega)$ выполняется оценка

$$\int_E \sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k(x)| dv(x) \leq 4\sqrt{2} \mathbf{C} (\mathbf{S} + 1) \left(\int_E D(x) dv(x) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

и последовательность частичных интегралов $I_k(x)$ сходится на E почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя неравенство (4) из леммы 3 и пользуясь следующими из (3) и теоремы Леви (см. [17, с. 168] или [18, с. 49]) оценками

$$\int_E |\sigma_j(x)| d\nu(x) \leq 4\sqrt{2} C \sqrt{\lambda_k} \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_E \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sigma_k(x)|}{\sqrt{\gamma_k}} d\nu(x) \leq 4\sqrt{2} C \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

получаем оценку (5).

Так как $\overline{\lim}_{n,m \rightarrow \infty} |I_n(x) - I_m(x)| \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} |I_n(x)|$, следствием (5) является следующая оценка

$$\int_E \overline{\lim}_{n,m \rightarrow \infty} |I_n(x) - I_m(x)| d\nu(x) \leq 8\sqrt{2} C(S+1) \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Но при $n, m > N$ разность $I_n(x) - I_m(x)$ не зависит от значений функции $c(\omega)$ на Ω_N , поэтому $\overline{\lim}_{n,m \rightarrow \infty} |I_n(x) - I_m(x)|$ не изменится при замене функции $c(\omega)$ на функцию $c(\omega)\chi_{\Omega \setminus \Omega_N}(\omega)$. За счет выбора N величина C , соответствующая функции $c(\omega)\chi_{\Omega \setminus \Omega_N}(\omega)$, может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно,

$$\int_E \overline{\lim}_{n,m \rightarrow \infty} |I_n(x) - I_m(x)| d\nu(x) = 0;$$

последовательность частичных интегралов $I_k(x)$ сходится на E почти всюду. Теорема доказана.

Если в качестве Ω взять множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с $\mu(n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то частным случаем теоремы 2 является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть измеримое множество $E \subset X$ и $\{e^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность суммируемых на E функций, а m_k , $k \in \mathbb{N}$, – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Пусть

$$L_{m_k}(x) \equiv L_{\{n \in \mathbb{N}: n \leq m_k\}}^E = \int_E \left| \sum_{n=1}^{m_k} e^n(x) \overline{e^n(t)} \right| d\nu(t),$$

аналоги функций Лебега системы $\{e^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ для подмножеств $\{n \in \mathbb{N}: n \leq m_k\}$ по измеримому множеству $E \subset X$ таковы, что $L_{m_k}(x) \leq D(x)\lambda_k$ для $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$, где неотрицательная функция $D(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E , а λ_k , $k \in \mathbb{N}$, – неубывающая положительная числовая последовательность.

Тогда для любой последовательности c_n , $n \in \mathbb{N}$, (действительно или комплекснозначной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) и любой неубывающей последовательности $\gamma_k > 0$, $\gamma_k \geq \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, с величинами

$$C = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \sum_{n=m_{k-1}+1}^{m_k} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (\text{считаем } m_0 = 0) \quad \text{и}$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma_{m+1}}} \right) < \infty$$

для частичных сумм $S_{m_k}(x) = \sum_{n=1}^{m_k} c_n e^n(x)$ выполняется оценка

$$\int_E \sup_{k \in \mathbb{N}} |S_{m_k}(x)| d\nu(x) \leq 4\sqrt{2} \mathbf{C}(\mathbf{S} + 1) \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

и последовательность частичных сумм $S_{m_k}(x)$ сходится на E почти всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для неубывающих последовательностей λ_k и γ_k , $\gamma_k > 0$, $\gamma_k \geq \lambda_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} (1/\sqrt{\gamma_k} - 1/\sqrt{\gamma_{k+1}})$ эквивалентна сходимости ряда $\sqrt{\lambda_1}/\sqrt{\gamma_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\sqrt{\lambda_k} - \sqrt{\lambda_{k-1}})/\sqrt{\gamma_k}$. Если последовательность λ_k ограничена, то написанные ряды сходятся для постоянной, а значит, и любой ограниченной последовательности γ_k . Если $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, то последний ряд при $\gamma_k = \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, расходится, а при $\gamma_k = \lambda_k^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, сходится (см. [19, с. 290]). Последовательность частичных интегралов в теореме 2 (сумм в следствии 2) сходится почти всюду, если $\gamma_k = \lambda_k^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕЧАНИЕ. В теореме и следствии утверждения о сходимости почти всюду на E легко обобщить, заменив требования конечности меры множества E и интегрируемости $D(x)$ на нем требованиями конечности меры множеств E_k и интегрируемости $D(x)$ на них; множеств E_k не более чем счетно и $\bigcup_k E_k = E$. При этом еще возможно функции Лебега по множеству E заменить соответственно функциями Лебега по множествам E_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (необязательно сепарабельное), а Ω – пространство со счетно аддитивной действительной мерой μ . Систему $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ в H с индексами из Ω будем называть *ортоподобной (подобной ортогональной) системой разложения* в H , если любой элемент $y \in H$ можно представить в виде

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega),$$

где $\hat{y}_{\omega} = (y, e^{\omega})$; интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H , причем в последнем случае есть такое исчерпывающее $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ пространства Ω (все Ω_k измеримы, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$), быть может зависящее от y и называемое *подходящим* для y , что функция $\hat{y}_{\omega} e^{\omega}$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega_k} \hat{y}_{\omega} e^{\omega} d\mu(\omega).$$

Ортонормированные системы являются ортоподобными системами разложения в замыкании своей линейной оболочки; при этом для любой точки $\omega \in \Omega$ $\mu(\omega) \equiv 1$ и для счетных систем в качестве Ω можно брать $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

ТЕОРЕМА 3 (аналог теоремы Колмогорова–Селиверстова–Плесснера для ортоподобных систем). Пусть H – пространство Лебега $L^2(X)$ действительнзначных или комплекснзначных функций на пространстве X со счетно аддитивной неотрицательной мерой ν , а $\{e^{\omega}(x)\}_{\omega \in \Omega}$ – ортоподобная система в H с индексами из Ω . Пусть дан счетный набор измеримых подмножеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем

$\Omega_{k-1} \subset \Omega_k$ для $k \in \mathbb{N}$, и измеримое множество конечной меры $E \subset X$; функция $e^\omega(x)e^\omega(y)$ суммируема на $\Omega_k \times E^2$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $L_k(x) \equiv L_{\Omega_k}^E$, аналоги функций Лебега системы $\{e^\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$ для подмножеств Ω_k по множеству $E \subset X$ таковы, что $L_k(x) \leq D(x)\lambda_k$ для $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$, где неотрицательная функция $D(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E , а λ_k , $k \in \mathbb{N}$, – неубывающая положительная числовая последовательность.

Тогда для любой функции $c(\omega)$ на Ω (действительно или комплекснозначной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) с величиной

$$C = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

при условии суммируемости функции $c(\omega)e^\omega(x)$ на $\Omega_k \times E$ при всех $k \in \mathbb{N}$ для частичных интегралов $I_k(x) = \int_{\Omega_k} c(\omega)e^\omega(x) d\mu(\omega)$ выполняется оценка

$$\int_E \sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k(x)| d\nu(x) \leq C \sqrt{\frac{\nu(E)}{\lambda_1}} + 4\sqrt{2} C \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

и последовательность частичных интегралов $I_k(x)$ сходится на E почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенством (4) из леммы 3 с $\gamma_k = \lambda_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{j+1}}} \right) |\sigma_j(x)| + \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sigma_k(x)|}{\sqrt{\gamma_k}}, \quad (7)$$

где $\sigma_j(x) = \sum_{r=1}^j \sqrt{\lambda_r} \int_{\Omega_r \setminus \Omega_{r-1}} c(\omega)e^\omega(x) d\mu(\omega)$. Пользуясь неравенством Коши–Буняковского–Шварца (см. [17, с. 269]) и экстремальным свойством коэффициентов разложения по ортоподобным системам (см. [12] или [13]), получаем оценку

$$\left(\int_E |\sigma_j(x)| d\nu(x) \right)^2 \leq \nu(E) \int_E |\sigma_j(x)|^2 d\nu(x) \leq C^2 \nu(E).$$

Из (3) и теоремы Леви (см. [17, с. 168] или [18, с. 49]) получаем оценку

$$\int_E \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sigma_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} d\nu(x) \leq 4\sqrt{2} C \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из двух последних оценок и (7) получаем оценку (6).

Так как $\lim_{n,m \rightarrow \infty} |I_n(x) - I_m(x)| \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} |I_n(x)|$, следствием (5) является следующая оценка

$$\int_E \overline{\lim}_{n,m \rightarrow \infty} |I_n(x) - I_m(x)| d\nu(x) \leq 2C \sqrt{\frac{\nu(E)}{\lambda_1}} + 8\sqrt{2} C \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Но при $n, m > N$ разность $I_n(x) - I_m(x)$ не зависит от значений функции $c(\omega)$ на Ω_N , поэтому $\overline{\lim}_{n, m \rightarrow \infty} |I_n(x) - I_m(x)|$ не изменится при замене функции $c(\omega)$ на функцию $c(\omega)\chi_{\Omega \setminus \Omega_N}(\omega)$. За счет выбора N величина $\mathbf{C}$, соответствующая функции $c(\omega)\chi_{\Omega \setminus \Omega_N}(\omega)$, может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно,

$$\int_E \overline{\lim}_{n, m \rightarrow \infty} |I_n(x) - I_m(x)| d\nu(x) = 0,$$

последовательность частичных интегралов $I_k(x)$ сходится на E почти всюду. Теорема доказана.

Если в качестве Ω взять множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с $\mu(n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то частным случаем теоремы 2 является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть дано измеримое множество конечной меры $E \subset X$ и $\{e^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – счетная ортоподобная система в H с индексами из $\mathbb{N}$, m_k , $k \in \mathbb{N}$, – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Пусть

$$L_{m_k}(x) = L_{\{n \in \mathbb{N}: n \leq m_k\}}^E = \int_E \left| \sum_{n=1}^{m_k} e^n(x) \overline{e^n(t)} \right| d\nu(t),$$

аналоги функций Лебега системы $\{e^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ для подмножеств $\{n \in \mathbb{N}: n \leq m_k\}$ по измеримому множеству $E \subset X$ таковы, что $L_{m_k}(x) \leq D(x)\lambda_k$ для $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$, где неотрицательная функция $D(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E , а λ_k , $k \in \mathbb{N}$, – неубывающая положительная числовая последовательность.

Тогда для любой последовательности c_n , $n \in \mathbb{N}$, (действительно или комплекснозначной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) с величиной

$$\mathbf{C} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sum_{m_{k-1}+1}^{m_k} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

(считаем $m_0 = 0$) для частичных сумм $S_{m_k}(x) = \sum_{n=1}^{m_k} c_n e^n(x)$ выполняется оценка

$$\int_E \sup_{k \in \mathbb{N}} |S_{m_k}(x)| d\nu(x) \leq \mathbf{C} \sqrt{\frac{\nu(E)}{\lambda_1}} + 4\sqrt{2} \mathbf{C} \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

и последовательность частичных сумм $S_{m_k}(x)$ сходится на E почти всюду.

ПРИМЕЧАНИЕ. В теореме и следствии утверждения о сходимости почти всюду на E легко обобщить, заменив требования конечности меры множества E и интегрируемости $D(x)$ на нем требованиями конечности меры множеств E_k и интегрируемости $D(x)$ на них; множеств E_k не более чем счетно и $\bigcup_k E_k = E$. При этом еще возможно функции Лебега по множеству E заменить соответственно функциями Лебега по множествам E_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть H – гильбертово пространство, Ω – пространство со счетно аддитивной неотрицательной мерой μ , $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ – система замкнутых расширяющихся подпространств в H , объединение которых всюду плотно в H , а $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – система, каждый элемент которой e^ω является последовательностью $\{e_n^\omega\}_{n=1}^\infty$ элементов H и e_n^ω – ортогональная проекция e_{n+1}^ω на H_n . Эта система будет называться *обобщенной ортоподобной системой разложения в H с системой подпространств H_n и с индексами из Ω* , если любой элемент $y \in H_n$ представляется в виде

$$y = \int_{\Omega} \hat{y}_\omega^n e_n^\omega d\mu(\omega),$$

где $\hat{y}_\omega^n = (y, e_n^\omega)$, интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H .

Если в обобщенной ортоподобной системе разложения в каждом элементе $e^\omega \equiv \{e_n^\omega\}_{n=1}^\infty$ все e_n^ω одинаковы и все $H_n = H$, то получается определение ортоподобной системы разложения, в частности, охватывающее полные ортонормированные системы.

Пусть X – счетно конечное (σ -конечное) пространство со счетно аддитивной неотрицательной мерой ν , H – пространство Лебега $\mathcal{L}^2(X)$ действительных или комплекснозначных функций на пространстве X со счетно аддитивной неотрицательной мерой ν , $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ – обобщенная ортоподобная система в H (с системой подпространств H_n и с индексами из Ω).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Аналогом функции Лебега обобщенной системы $\{e^\omega\}_{\omega \in \Omega}$ для измеримого множества $\Upsilon \subset \Omega$ по измеримому множеству $E \subset X$ будем называть последовательность функций

$$L_\Upsilon^E(n, x) = \int_E \left| \int_\Upsilon e_n^\omega(x) \overline{e_n^\omega(t)} d\mu(\omega) \right| d\nu(t).$$

ТЕОРЕМА 4 (аналог теоремы Колмогорова–Селиверстова–Плесснера для обобщенных ортоподобных систем). Пусть H – пространство Лебега $\mathcal{L}^2(X)$ действительных или комплекснозначных функций на пространстве X со счетно аддитивной неотрицательной мерой ν , а $\{e^\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$ – обобщенная ортоподобная система в H с системой подпространств H_n и с индексами из Ω . Пусть дан счетный набор измеримых подмножеств $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$, причем $\Omega_{k-1} \subset \Omega_k$ для $k \in \mathbb{N}$, и измеримое множество конечной меры $E \subset X$; все функции $e_n^\omega(x) e_n^\omega(y)$ суммируемы на $\Omega_k \times E^2$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $L_k^n(x) = L_{\Omega_k}^E(n, x)$, аналоги функций Лебега системы $\{e^\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$ для подмножеств Ω_k по множеству $E \subset X$ таковы, что для бесконечного множества номеров n выполняется неравенство $L_k^n(x) \leq D(x) \lambda_k$ для $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$, где неотрицательная функция $D(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E , а λ_k , $k \in \mathbb{N}$, – неубывающая положительная числовая последовательность.

Тогда для любой функции $c(\omega)$ на Ω (действительно или комплекснозначной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) с величиной

$$C = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_{\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}} |c(\omega)|^2 d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

при условии суммируемости функций $c(\omega)e_n^\omega(x)$ на $\Omega_k \times E$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$ для частичных интегралов $I_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_k^n(x)$, где $I_k^n(x) = \int_{\Omega_k} c(\omega)e_n^\omega(x) d\mu(\omega)$ и предельный переход происходит по норме пространства $L^2(X)$, выполняется оценка

$$\int_E \sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k(x)| d\nu(x) \leq C \left(4\sqrt{2} + \sqrt{\frac{\nu(E)}{\lambda_1}} \right) \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

и последовательность частичных интегралов $I_k(x)$ сходится на E почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$I_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \sqrt{\lambda_j} (I_j(x) - I_{j-1}(x)),$$

используя преобразование Абеля, получим равенство

$$I_k(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{j+1}}} \right) \sigma_j(x) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sigma_k(x),$$

где $\sigma_j(x) = \sum_{r=1}^j \sqrt{\lambda_r} (I_r(x) - I_{r-1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^j \sqrt{\lambda_r} \int_{\Omega_r \setminus \Omega_{r-1}} c(\omega)e_n^\omega(x) d\mu(\omega)$.

Из него получаем оценку

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{j+1}}} \right) |\sigma_j(x)| + \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sigma_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}}. \quad (9)$$

Из неравенства Коши–Буняковского–Шварца (см. [17, с.269]) и экстремального свойства коэффициентов разложения по обобщенным ортоподобным системам (см. [14]) имеем оценку

$$\left(\int_E |\sigma_j(x)| d\nu(x) \right)^2 \leq \nu(E) \int_E |\sigma_j(x)|^2 d\nu(x) \leq C^2 \nu(E). \quad (10)$$

По условию найдется такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_j , что аналоги функций Лебега $L_k^{n_j}(x) \leq D(x)\lambda_k$.

В [12] доказано, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $I_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_k^n(x)$ по метрике пространства $H = L^2(X)$, а значит, и по мере ν . Из подпоследовательности n_j выберем такую подпоследовательность n_j^1 , что $I_1(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} I_1^{n_j^1}(x)$ почти всюду

на X (см. [19, с.38]). Далее из каждой построенной строго возрастающей последовательности натуральных чисел n_j^l выберем такую подпоследовательность n_j^{l+1} , что $\mathbf{I}_{l+1}(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{I}_{l+1}^{n_j^{l+1}}(x)$ почти всюду на X . Так построим для каждого $l \in \mathbb{N}$ подпоследовательность n_j^l . Положим теперь $m_j = n_j^j$; это подпоследовательность последовательности n_j и для каждого $r \in \mathbb{N}$ частичный интеграл $\mathbf{I}_r(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{I}_r^{m_j}(x)$ почти всюду на X , значит,

$$\begin{aligned} \sigma_k(x) &= \sum_{r=1}^k \sqrt{\lambda_r} (\mathbf{I}_r(x) - \mathbf{I}_{r-1}(x)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_k^{m_j}(x) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^k \sqrt{\lambda_r} (\mathbf{I}_r^{m_j}(x) - \mathbf{I}_{r-1}^{m_j}(x)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^k \sqrt{\lambda_r} \int_{\Omega_r \setminus \Omega_{r-1}} c(\omega) e_{m_j}^\omega(x) d\mu(\omega) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sup_{1 \leq k \leq K} \frac{|\sigma_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{|\sigma_k^{m_j}(x)|}{\sqrt{\lambda_k}}$$

почти всюду на X . По лемме 2 и лемме Фату (см. [17, с.170, 189]) имеем оценку

$$\begin{aligned} \int_E \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{|\sigma_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} d\nu(x) &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{|\sigma_k^{m_j}(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} d\nu(x) \\ &\leq 4\sqrt{2} \mathbf{C} \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int_E \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{L_k^{m_j}(x)}{\lambda_k} d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 4\sqrt{2} \mathbf{C} \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Из нее, пользуясь теоремой Леви (см. [17, с.168] или [19, с.49]), получаем оценку

$$\int_E \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\sigma_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} d\nu(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_E \sup_{1 \leq k \leq K} \frac{|\sigma_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} d\nu(x) \leq 4\sqrt{2} \mathbf{C} \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Из (9), используя оценки (10) и (11), получаем оценку (8).

Так как $\overline{\lim}_{n,m \rightarrow \infty} |\mathbf{I}_n(x) - \mathbf{I}_m(x)| \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathbf{I}_n(x)|$, следствием (8) является следующая оценка

$$\int_E \overline{\lim}_{n,m \rightarrow \infty} |\mathbf{I}_n(x) - \mathbf{I}_m(x)| d\nu(x) \leq 2\mathbf{C} \left(4\sqrt{2} + \sqrt{\frac{\nu(E)}{\lambda_1}} \right) \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Но при $n, m > N$ разность $\mathbf{I}_n(x) - \mathbf{I}_m(x)$ не зависит от значений функции $c(\omega)$ на Ω_N , поэтому $\overline{\lim}_{n,m \rightarrow \infty} |\mathbf{I}_n(x) - \mathbf{I}_m(x)|$ не изменится при замене функции $c(\omega)$ на функцию $c(\omega)\chi_{\Omega \setminus \Omega_N}(\omega)$. За счет выбора N величина $\mathbf{C}$, соответствующая функции $c(\omega)\chi_{\Omega \setminus \Omega_N}(\omega)$, может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно,

$$\int_E \overline{\lim}_{n,m \rightarrow \infty} |\mathbf{I}_n(x) - \mathbf{I}_m(x)| d\nu(x) = 0,$$

последовательность частичных интегралов $\mathbf{I}_k(x)$ сходится на E почти всюду. Теорема доказана.

Если в качестве Ω взять множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с $\mu(n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то частным случаем теоремы 2 является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть H – пространство Лебега $\mathfrak{L}^2(X)$ действительнзначных или комплекснзначных функций на пространстве X со счетно аддитивной неотрицательной мерой ν , а $\{e^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – обобщенная ортоподобная система в H с системой подпространств H_n и с индексами из $\mathbb{N}$. Пусть дано измеримое множество конечной меры $E \subset X$ и $\{e^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – счетная ортоподобная система в H с индексами из $\mathbb{N}$, m_k , $k \in \mathbb{N}$, – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Пусть $L_k^n(x) = L_{\Omega_k}^E(n, x)$, аналоги функций Лебега системы $\{e^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ для подмножеств $\{n \in \mathbb{N} : n \leq m_k\}$ по множеству $E \subset X$ таковы, что для бесконечного множества номеров n выполняется неравенство $L_k^n(x) \leq D(x)\lambda_k$ для $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$, где неотрицательная функция $D(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E , а λ_k , $k \in \mathbb{N}$, – неубывающая положительная числовая последовательность.

Тогда для любой последовательности c_l , $l \in \mathbb{N}$, (действительно или комплекснозначной в зависимости от того, какие значения принимают функции из H) с величиной

$$C = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} |c_l|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

(считаем $m_0 = 0$) для частичных сумм $S_{m_k}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{m_k} c_l e_n^l(x)$ выполняется оценка

$$\int_E \sup_{k \in \mathbb{N}} |S_{m_k}(x)| d\nu(x) \leq C \left(4\sqrt{2} + \sqrt{\frac{\nu(E)}{\lambda_1}} \right) \left(\int_E D(x) d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

и последовательность частичных сумм $S_{m_k}(x)$ сходится на E почти всюду.

ПРИМЕЧАНИЕ. В теореме и следствии утверждения о сходимости почти всюду на E легко обобщить, заменив требования конечности меры множества E и интегрируемости $D(x)$ на нем требованиями конечности меры множеств E_k и интегрируемости $D(x)$ на них, множеств E_k не более чем счетно и $\bigcup_k E_k = E$. При этом еще возможно функции Лебега по множеству E заменить соответственно функциями Лебега по множествам E_k .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Колмогоров А. Н., Селиверстов Г. А. Sur la convergence des séries de Fourier // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1925. V. 178. P. 303–305.
- [2] Колмогоров А. Н., Селиверстов Г. А. Sur la convergence des séries de Fourier // Rend. R. Acad. Lincei. 1926. V. 3. P. 307–310.
- [3] Плесснер А. И. Über die Konvergenz von trigonometrischen Reihen // J. Reine und Angew. Math. 1926. V. 155. P. 15–25.
- [4] Вари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [5] Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. V. 116. P. 135–157.
- [6] Kaczmarz S. Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux // Studia Math. 1929. V. 1. P. 87–121.
- [7] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958.
- [8] Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1963.

- [9] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
- [10] Лукашенко Т. П. О системах разложения, подобных ортогональным // Международн. конф. по теор. приближ. функций, посв. памяти проф. П. П. Коровкина. Калуга, 26-29 июня 1996 г. Тезисы докл. Т. 2. Тверь: Изд-во ТГУ, 1996. С. 135–136.
- [11] Лукашенко Т. П. Системы разложения, подобные ортогональным // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3. № 2. С. 487–517.
- [12] Лукашенко Т. П. Ортоподобные неотрицательные системы разложения // Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1997. № 5. С. 27–31.
- [13] Лукашенко Т. П. О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12. С. 57–72.
- [14] Лукашенко Т. П. Обобщенные системы разложения, подобные ортогональным // Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1998. № 4. С. 6–10.
- [15] Лукашенко Т. П. О свойствах систем разложения, подобных ортогональным // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 187–206.
- [16] Tandori K. Weitere Bemerkungen über die Konvergenz und Summierbarkeit der Funktionenreihen // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1976. V. 28. № 1–2. P. 119–127.
- [17] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.
- [18] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Изд. 7-ое. Т. 2. М.: Наука, 1970.
- [19] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. Изд. 2-ое. М.: Наука, 1988.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
10.01.1999