Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, О теореме Блюма–Хансона для квантовых квадратичных процессов, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 102–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm818>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:39:17

УДК 517.98+519.21

О ТЕОРЕМЕ БЛЮМА–ХАНСОНА ДЛЯ КВАНТОВЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ф. М. Мухамедов

В предлагаемой работе доказывается аналог теоремы Блюма–Хансона для квантовых квадратичных процессов на алгебре фон Неймана, т.е. доказано, что следующие условия эквивалентны:

- i) $P^{(t)}x$ сходится слабо к x_0 ;
- ii) для любой последовательности $\{a_n\}$ неотрицательных интегрируемых функций на $[1, \infty)$ таких, что $\int_1^\infty a_n(t) dt = 1$ для любого n и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_\infty = 0$, $\int_1^\infty a_n(t) \times P^{(t)}x dt$ сходится сильно к x_0 в $L^2(M, \varphi)$, где $x \in M$, $P^{(t)}$ – квантовый квадратичный процесс, M – алгебра фон Неймана и φ – точное нормальное состояние на M .

Библиография: 13 названий.

Пусть $(X, \mathcal{F}, m)$ – измеримое пространство с конечной мерой и T – линейный оператор на $L^1(X, \mathcal{F}, m)$, индуцированный некоторым сохраняющим меру m преобразованием пространства X . В [1] доказано, что следующие условия эквивалентны:

- i) последовательность T^n сходится слабо;
- ii) $(1/n) \sum_{i=1}^n T^{k_i}$ сходится сильно для любой строго возрастающей последовательности $\{k_i\}$ натуральных чисел.

В дальнейшем этот результат в [2] был обобщен для произвольных сжатий T , действующих на гильбертовом пространстве, а в [3], [4] аналогичный результат доказан для сильно непрерывных сжимающих полугрупп.

В предлагаемой работе доказывается аналог теоремы Блюма–Хансона для квантовых квадратичных процессов на алгебре фон Неймана.

Пусть M – алгебра фон Неймана с точным нормальным состоянием φ . Определим линейное отображение $U: M \otimes M \rightarrow M \otimes M$ такое, что $U(x \otimes y) = y \otimes x$ для всех x, y из M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство линейных отображений $P^{(t)}: M \rightarrow M \otimes M$, $t \geq 1$, называется *квантовым квадратичным стохастическим процессом* (к.к.с.п.), если отображения $P^{(t)}$ ультра-слабо непрерывны при всех t и удовлетворяют следующим условиям:

- i) $P^{(t)}\mathbf{1}_M = \mathbf{1}_{M \otimes M}$, где $\mathbf{1}_M$ и $\mathbf{1}_{M \otimes M}$ единицы алгебр M и $M \otimes M$ соответственно;
- ii) $P^{(t)}(M_+) \subset (M \otimes M)_+$, где M_+ и $(M \otimes M)_+$ положительные части алгебр M и $M \otimes M$ соответственно;
- iii) $\varphi \otimes \varphi(P^{(t)}x) = \varphi(x)$ для всех $x \in M_+$;
- iv) $P^{(t)}(M) \subset \{x \in M \otimes M \mid Ux = x\}$.

$\vee) P^{(t+s)}x = (P^{(t)} \otimes \varphi)(P^{(s)}x)$ для всех $x \in M$ и $t, s \geq 1$,

где

$$P^{(t)} \otimes \varphi(a \otimes b) := \varphi(b)P^{(t)}a, \quad a, b \in M.$$

Квантовые квадратичные стохастические процессы на алгебрах фон Неймана были определены в [5], [6].

ЗАМЕЧАНИЕ. Если алгебра фон Неймана M конечномерная коммутативная алгебра, т.е. $l_n^\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in C, i = 1, \dots, n, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\}$, то к.к.с.п. $P^{(t)}$ совпадает с квадратичным процессом, который задается кубической матрицей $(p_{ij,k}^{(t)})_{i,j,k=1}^n$ такой, что

$$p_{ij,k}^{(t)} \geq 0, \quad p_{ij,k}^{(t)} = p_{ji,k}^{(t)}, \quad \sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(t)} = 1,$$

где $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. А именно, полагаем $p_{ij,k}^{(t)} = (P^{(t)}e_k)_{i,j}$, где $e_k = (0, \dots, 0, 1_k, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, n$, и тогда уравнение $\vee)$ имеет вид

$$p_{ij,k}^{(t+s)} = \sum_{m,l=1}^n p_{ij,m}^{(t)} p_{ml,k}^{(s)} x_l,$$

где $(x_i)_{i=1}^n$ – начальное вероятностное распределение такое, что

$$x_k = \sum_{i,j=1}^n p_{ij,k}^{(t)} x_i x_j.$$

Обратно, если мы имеем квадратичный процесс $(p_{ij,k}^{(t)})_{i,j,k=1}^n$, который определен как выше, то можем определить к.к.с.п. $P^{(t)}$ следующим образом:

$$(P^{(t)}f)_{i,j} = \sum_{k=1}^n f_k p_{ij,k}^{(t)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (f_i) \in l_n^\infty.$$

Таким образом, определение 1 обобщает понятие квадратичных процессов, которые возникают при исследовании некоторых моделей со взаимодействиями, например, моделей биологических систем. А именно, рассмотрим модель Менделя, в которой генотип содержит ген с двумя аллелями A и a . Если обозначить через $p_{ij,k}$ вероятность появления генотипа k при взаимодействии генотипов i и j , где $i, j, k \in \{A, a\}$, то закон Менделя (см. [7]) выражается как

$$p_{AA,A}^{(1)} = 1, \quad p_{aa,a}^{(1)} = 1, \quad p_{aA,a}^{(1)} = \frac{1}{2}.$$

За начальное распределение берется равномерное распределение, т.е. $x_a = 1/2$, $x_A = 1/2$. Основной задачей является изучение предельного приведения последовательности $\{p_{ij,k}^{(n)}\}$, $i, j, k \in \{A, a\}$. Известно [8], что для этой последовательности существует

предел, который стремится к равновесному распределению, т.е. $p_{ij,k}^{(\infty)} = 1/2$ для всех $i, j, k \in \{A, a\}$, где $p_{ij,k}^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij,k}^{(n)}$.

Изучению квадратичных операторов и процессов посвящены многочисленные работы (см., например, [7], [9]–[12]).

Пусть далее $H = L^2(M, \varphi)$ – пополнение пространства M по норме $\|\cdot\|_{2,\varphi}$, где $\|A\|_{2,\varphi} = \varphi(A^*A)^{1/2}$. Покажем, что к.к.с.п., определенный на M , можно продолжить на некоторое подпространство пространства H . Для любого самосопряженного оператора $A \in M$ в силу неравенства Шварца (см. [13, предложение 3.2.4]) имеет место неравенство $P^{(t)}(A)^2 \leq P^{(t)}(A^2)$. Следовательно, $\|P^{(t)}(A)\|_{2,\psi} \leq \|A\|_{2,\varphi}$ для всех самосопряженных операторов $A \in M$, где $\psi = \varphi \otimes \varphi$. Пусть X замыкание в H множества $\{A \in M: A^* = A\}$. Тогда $P^{(t)}$ продолжается до линейного непрерывного отображения $\mathcal{H} = X + iX$ в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, которое мы также обозначим через $P^{(t)}$, причем

$$\|P^{(t)}x\|_{2,\psi} \leq \|x\|_{2,\varphi} \quad \text{для всех } x \in X. \quad (1)$$

Далее мы будем предполагать, что к.к.с.п. сильно непрерывен, т.е. для всех $x \in \mathcal{H}$ и $s \geq 1$ имеет место

$$\lim_{t \rightarrow s} \|P^{(t)}x - P^{(s)}x\|_{2,\psi} = 0.$$

Отсюда следует, что для любой комплекснозначной интегрируемой (в смысле Лебега) функции $a(t)$ на $[1, \infty)$, векторнозначная функция $t \rightarrow a(t)P^{(t)}x$, $x \in M$, на $[1, \infty)$ также интегрируема.

ТЕОРЕМА. Пусть $P^{(t)}$ – к.к.с.п. на алгебре фон Неймана M с точным нормальным состоянием φ . Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ следующие условия эквивалентны:

- i) $P^{(t)}x$ сходится слабо к x_0 ;
- ii) для любой последовательности $\{a_n\}$ неотрицательных интегрируемых функций на $[1, \infty)$ таких, что $\int_1^\infty a_n(t) dt = 1$ для любого n и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_\infty = 0$, $\int_1^\infty a_n(t)P^{(t)}x dt$ сходится сильно (по норме $\|\cdot\|_{2,\psi}$) к x_0 .

Прежде чем доказывать эту теорему, докажем одно вспомогательное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $P^{(t)}$ – к.к.с.п. на алгебре фон Неймана M с точным нормальным состоянием φ . Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ следующие условия эквивалентны:

- i) $P^{(n)}x$ сходится слабо к x_0 ;
- ii) $(1/n) \sum_{i=1}^n P^{(k_i)}x$ сходится сильно к x_0 , для каждой строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\{k_i\}$ такой, что $k_i \geq i$, $k_j - k_i \geq j - i$.

Для доказательства этого предложения нам понадобится следующая

ЛЕММА. Пусть для некоторого $x_0 \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ имеет место следующее равенство:

$$P \otimes \varphi(x_0) = x_0.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$P^{(n)} \otimes \varphi(x_0) = x_0,$$

где $P = P^{(1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по индукции. Пусть $n = 2$, тогда имеем

$$P^{(2)} \otimes \varphi(x_0) = (P \otimes \varphi)(P \otimes \varphi(x_0)) = P \otimes \varphi(x_0) = x_0.$$

Предположим, что $P^{(k)} \otimes \varphi(x_0) = x_0$. При $n = k + 1$ имеем

$$P^{(k+1)} \otimes \varphi(x_0) = (P \otimes \varphi)(P^{(k)} \otimes \varphi(x_0)) = x_0.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Если $P^{(n)}x$ не сходится к x_0 слабо, то существуют $y \in H \otimes H$, $\varepsilon > 0$ и последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \dots$ такие, что $|(P^{(k_i)}x - x_0, y)| > \varepsilon$ для каждого i . Но тогда имеем

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(k_i)}x - x_0 \right\|_{2,\psi} \geq \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(k_i)}x - x_0, \frac{y}{\|y\|_{2,\psi}} \right) \right| > \frac{\varepsilon}{\|y\|_{2,\psi}}.$$

Обратно, предположим, что $x \in X$ и $P^{(n)}x \rightarrow x_0$ слабо. Из равенства $P^{(n+1)}x = (P \otimes \varphi)(P^{(n)}x)$ предельным переходом находим $P \otimes \varphi(x_0) = x_0$. В силу этого равенства мы можем предполагать, что $x_0 = 0$; если это не так, то x заменим элементом $y = x - \varphi(x_0)$. Отсюда, используя лемму, получим

$$P^{(n)}y = P^{(n)}x - P^{(n)} \otimes \varphi(x_0) = P^{(n)}x - x_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В силу неравенства (1) имеем $\inf \|P^{(n)}x\|_{2,\psi} = \lim \|P^{(n)}x\|_{2,\psi} = \alpha$. Если $\alpha = 0$, то доказывать нечего. Итак, предположим $\alpha = 1$ (в силу линейности P). Для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют натуральные числа N и K такие, что $\|P^{(N)}x\|_{2,\psi} < 1 + \varepsilon$ и $|(P^{(N)}x, P^{(N+k)}x)| < \varepsilon$ для $k \geq K$. Тогда для $m \geq N$ и $n \geq K + m$ имеем

$$\begin{aligned} 2\Re(P^{(m)}x, P^{(n)}x) &= \|P^{(m)}x + P^{(n)}x\|_{2,\psi}^2 - \|P^{(m)}x\|_{2,\psi}^2 - \|P^{(n)}x\|_{2,\psi}^2 \\ &\leq \|P^{(m-N)} \otimes \varphi(P^{(N)}x + P^{(n-m+N)}x)\|_{2,\psi}^2 - 2 \\ &\leq \|P^{(N)}\|_{2,\psi}^2 + \|P^{(n-m+N)}x\|_{2,\psi}^2 + 2\Re(P^{(N)}x, P^{(n-m+N)}x) - 2 \leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Если $\{k_i\}$ произвольная строго возрастающая последовательность, удовлетворяющая

условию ii), имеем

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(k_i)} x \right\|_{2,\psi}^2 &= \Re \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(k_i)} x, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(k_i)} x \right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \Re(P^{(k_i)} x, P^{(k_j)} x) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \Re(P^{(k_i)} x, P^{(k_i)} x) + \frac{2}{n^2} \sum_{i < j}^n \Re(P^{(k_i)} x, P^{(k_j)} x) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \|P^{(k_i)} x\|_{2,\psi}^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{i < N; j > i}^n \Re(P^{(k_i)} x, P^{(k_j)} x) \\
 &\quad + \frac{2}{n^2} \sum_{i \geq N; i < j < K+i}^n \Re(P^{(k_i)} x, P^{(k_j)} x) \\
 &\quad + \frac{2}{n^2} \sum_{i \geq N; j \geq K+i}^n \Re(P^{(k_i)} x, P^{(k_j)} x) \\
 &\leq \frac{\|x\|_{2,\varphi}^2}{n} + \frac{2(N-1)n\|x\|_{2,\varphi}^2}{n^2} + \frac{2(K-1)n\|x\|_{2,\varphi}^2}{n^2} + 4\varepsilon,
 \end{aligned}$$

так как $k_i \geq i$, $k_j - k_i \geq j - i$. Отсюда для достаточно больших n это выражение может быть сделано сколь угодно малым. Пусть теперь $x \in \mathcal{H}$. Тогда существуют такие $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + ix_2$. Из слабой сходимости $P^{(n)}x$ к x_0 следует слабая сходимость $P^{(n)}x_i$ к некоторому x_0^i ($i = 1, 2$, $x_0 = x_0^1 + ix_0^2$). Отсюда в силу доказанного выше получим требуемое соотношение; следовательно предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. i) $\Rightarrow$ ii). Пусть $x \in X$ и $P^{(t)}x$ сходится слабо к x_0 . Из равенства iv) определения к.к.с.п. следует, что $x_0 = (P^{(s)} \circ \varphi)(x_0)$ для всех $s \geq 1$. Поэтому, мы можем предполагать, что $x_0 = 0$. Из iii) определения 1 следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|P^{(t)}\|_{2,\psi}$ существует. Таким образом, в силу слабой непрерывности отображения $x \rightarrow \varphi(P^{(t)}x)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное N такое, что

$$|(\varphi(P^{(t)}x), x)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|P^{(t)}x\|_{2,\psi}^2 - \|P^{(t+s)}x\|_{2,\psi}^2 < \varepsilon^2$$

для всех $t > N$ и всех $s > 1$. Из этого следует, что

$$\begin{aligned}
 &\|P_{(s)}^* P^{(t+s)} x - \varphi(P^{(t)}x)\|_{2,\varphi}^2 \\
 &= (P_{(s)}^* P^{(t+s)} x - \varphi(P^{(t)}x), P_{(s)}^* P^{(t+s)} x - \varphi(P^{(t)}x)) \\
 &= \|P_{(s)}^* P^{(t+s)} x\|_{2,\varphi}^2 + \|\varphi(P^{(t)}x)\|_{2,\varphi}^2 - 2(P_{(s)}^* P^{(t+s)} x, \varphi(P^{(t)}x)) \\
 &\leq \|P^{(t+s)}x\|_{2,\psi}^2 + \|P^{(t)}x\|_{2,\psi}^2 - 2\|P^{(t+s)}x\|_{2,\psi}^2 \\
 &= \|P^{(t)}x\|_{2,\psi}^2 - \|P^{(t+s)}x\|_{2,\psi}^2 < \varepsilon^2
 \end{aligned}$$

для всех $t > N$ и $s > 1$, где $P_{(s)}^*$ сопряженный оператор к $P^{(s)}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} |(P^{(t+s)}x, P^{(s)}x)| &\leq |(P^{(t+s)}x, P^{(s)}x) - (\varphi(P^{(t)}x), x)| + |\varphi(P^{(t)}x, x)| \\ &\leq |(P_{(s)}^* P^{(t+s)}x - \varphi(P^{(t)}x), x)| + \varepsilon \\ &\leq \|P_{(s)}^* P^{(t+s)}x - \varphi(P^{(t)}x)\|_{2,\varphi} \|x\|_{2,\varphi} + \varepsilon \leq \varepsilon(1 + \|x\|_{2,\varphi}) \end{aligned}$$

для всех $t > M$ и всех $s > 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \int_1^\infty a_n(t) P^{(t)} x dt \right\|_{2,\psi}^2 &= \left(\int_1^\infty a_n(t) P^{(t)} x dt, \int_1^\infty a_n(t) P^{(t)} x dt \right) \\ &= \int_1^\infty \int_1^\infty (a_n(t) P^{(t)} x dt, a_n(s) P^{(s)} x dt) dt ds \\ &\leq \int_1^\infty \int_1^\infty a_n(t) a_n(s) |(P^{(t)}x, P^{(s)}x)| dt ds \\ &\leq \|x\|_{2,\varphi}^2 \|a_n\|_\infty (2N) \int_1^\infty a_n(t) dt \\ &\quad + \varepsilon (\|x\|_{2,\varphi} + 1) \int_1^\infty a_n(t) dt \int_1^\infty a_n(s) ds \\ &= \|x\|_{2,\varphi}^2 \|a_n\|_\infty (2N) + \varepsilon (\|x\|_{2,\varphi} + 1). \end{aligned}$$

В силу условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_\infty = 0$ получим требуемое. Пусть $x \in \mathcal{H}$. Тогда, рассуждая как при доказательстве предложения, докажем справедливость условия ii).

ii) $\Rightarrow$ i). Пусть выполнено условие ii). Для фиксированного положительного целого N положим $S = P^{(1+\frac{1}{N})}$ и обозначим

$$g = \int_1^{1+\frac{1}{N}} \varphi(P^{(t)}x) dt,$$

где $x \in M$. Траектория S определяется следующим образом:

$$S^{(n+1)}x = (S^{(n)} \otimes \varphi)(Sx), \quad x \in M.$$

Тогда легко видеть, что справедливы следующие равенства:

$$S^{(n)} = P^{(n+\frac{n}{N})} S^{(n)} g = N \int_{n+1+\frac{n}{N}}^{n+1+\frac{n+1}{N}} P^{(t)} x dt.$$

По последовательности $\{k_i\}$, удовлетворяющей условию (ii) предложения, определим последовательность функций $\{a_n\}$ следующим образом:

$$a_n(t) = \begin{cases} \frac{N}{n}, & k_i + 1 + \frac{k_i}{N} \leq t \leq k_i + 1 + \frac{k_i+1}{N}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что таким образом определенная последовательность удовлетворяет условиям теоремы. Кроме того, имеет место равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S^{(k_i)} g = \int_1^\infty a_n(t) P^{(t)} x dt.$$

В силу условия ii) имеем

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S^{(k_i)} g \rightarrow x_\infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

относительно сходимости по норме $\|\cdot\|_{2,\psi}$. Согласно предложению для каждого $u \in H \otimes H$ находим $(S^{(n)}g, u) \rightarrow (x_\infty, u)$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда

$$\left(N \int_{n+1+\frac{n}{N}}^{n+1+\frac{n+1}{N}} P^{(t)} x \, dt, u \right) \rightarrow (x_\infty, u). \quad (2)$$

В силу сильной непрерывности к.к.с.п. $P^{(t)}$ для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N , что для любых $t, s \geq 1$: $|t - s| < 1/N$ имеет место

$$\|P^{(t)}x - P^{(s)}x\|_{2,\psi} < \varepsilon.$$

Для $s: n+1+\frac{n}{N} \leq s \leq n+1+\frac{n+1}{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| P^{(s)}x - N \int_{n+1+\frac{n}{N}}^{n+1+\frac{n+1}{N}} P^{(t)}x \, dt \right\|_{2,\psi} &= \left\| N \int_{n+1+\frac{n}{N}}^{n+1+\frac{n+1}{N}} (P^{(s)}x - P^{(t)}x) \, dt \right\|_{2,\psi} \\ &= N \int_{n+1+\frac{n}{N}}^{n+1+\frac{n+1}{N}} \|P^{(s)}x - P^{(t)}x\|_{2,\psi} \, dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (2)

$$\begin{aligned} |(P^{(s)}x, u) - (x_\infty, u)| &\leq \left| (P^{(s)}x, u) - \left(N \int_{n+1+\frac{n}{N}}^{n+1+\frac{n+1}{N}} P^{(t)}x \, dt, u \right) \right| \\ &+ \left| \left(N \int_{n+1+\frac{n}{N}}^{n+1+\frac{n+1}{N}} P^{(t)}x \, dt, u \right) - (x_\infty, u) \right| < \varepsilon(\|u\|_{2,\varphi} + 1) \end{aligned}$$

при достаточно больших s . Теорема доказана.

Заметим, что аналогичная теорема для сжимающих полугрупп на лебеговых пространствах была получена в [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Blum J. R., Hanson D. L. On the mean ergodic theorem for subsequences // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 308–311.
- [2] Jones L., Kuftinec V. A note on the Blum–Hanson theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30. № 1. P. 202–203.
- [3] Sato R. A note on operator convergence for semigroups // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1974. V. 15. № 1. P. 127–129.

- [4] Sato R. A mean ergodic theorem for a contraction semigroup in Lebesgue space // *Studia Math.* 1976. V. 54. № 3. P. 213–219.
- [5] Мухамедов Ф. М. Эргодические свойства сопряженных квадратичных операторов // *Узб. матем. ж.* 1998. № 1. С. 71–79.
- [6] Ганиходжаев Н. Н., Мухамедов Ф. М. О квантовых квадратичных стохастических процессах и некоторые эргодические теоремы для таких процессов // *Узб. матем. ж.* 1997. № 3. С. 8–20.
- [7] Любич Ю. И. Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций // *УМН.* 1971. Т. 26. № 5. С. 51–116.
- [8] Сарымсаков Т. А., Ганиходжаев Н. Н. Эргодический принцип для квадратичных процессов // *Докл. АН СССР.* 1991. Т. 316. № 6. С. 1315–1319.
- [9] Kesten H. Quadratic transformations: a model for population growth I, II // *Adv. Appl. Prob.* 1970. № 2. P. 1–82; 1970. № 2. P. 179–228.
- [10] Любич Ю. И. Математические структуры в популяционной генетике. Киев: Наукова Думка, 1983.
- [11] Сарымсаков Т. А., Ганиходжаев Н. Н. Аналитические методы в теории квадратичных стохастических операторов // *Докл. АН СССР.* 1989. Т. 305. № 5. С. 1052–1056.
- [12] Зимаков Н. П. Конечномерные дискретные линейные стохастические системы ускоряющегося времени и их приложения к квадратичным стохастическим динамическим системам // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59. № 5. С. 709–718.
- [13] Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.