Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Парусников, Многогранники Клейна для четвертой экстремальной кубической формы, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 110–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm819>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:39:00

УДК 511.36+514.172.45

МНОГОГРАННИКИ КЛЕЙНА ДЛЯ ЧЕТВЕРТОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

В. И. Парусников

Давенпортом и Свиннертоном-Дайером были найдены первые 19 экстремальных тернарных кубических форм g_i , имеющих тот же смысл, что и известные формы Маркова в бинарном квадратичном случае. Многогранники Клейна для форм g_1, g_2, g_3 были недавно вычислены Брюно и Парусниковым. Они же для кратных векторов вычислили “неполные частные”, полученные по разным матричным обобщениям алгоритма цепных дробей, и изучили их расположение относительно многогранников Клейна. Здесь рассматриваются аналогичные задачи для четвертой формы g_4 . А именно, вычислены многогранники Клейна для g_4 и сопряженной ей формы g_4^* . Они оказались существенно разными. Найдены их периоды и фундаментальные области. Вычислены разложения векторов этих форм по матричным алгоритмам.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Наилучшие рациональные приближения p/q к числу α суть подходящие дроби p_k/q_k цепной дроби числа α [1]. Клейн [2]–[4] предложил следующую геометрическую интерпретацию цепных дробей (см. также [5, гл. III, п. 19]). Пусть на плоскости координат p, q проведены прямые $\mathcal{L}_1 = \{p, q : p = \alpha q\}$ и $\mathcal{L}_2 = \{p, q : q = 0\}$. Они образуют смежные углы $\theta_1 = \{p, q : p \geq \alpha q, q \geq 0\}$ и $\theta_2 = \{p, q : p \leq \alpha q, q \geq 0\}$. Обозначим K_i выпуклую оболочку целочисленных точек (без точки $(0, 0)$) (p, q) , попавших в θ_i . Границы ∂K_i множеств K_i суть выпуклые ломанные линии. Вершинам (p, q) этих ломанных отвечают подходящие дроби p/q цепной дроби числа α . Число целочисленных точек на ребре минус один равно неполному частному цепной дроби и т.д. Там же Клейн [2], [3] предложил трехмерный аналог этой конструкции для изучения наилучших приближений. А именно, пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы три пересекающиеся в нуле плоскости $\mathcal{L}_i = \{X : \langle L_i, X \rangle = 0, i = 1, 2, 3\}$. Здесь $X, L \in \mathbb{R}^3$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение. Каждому набору $\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, где $\sigma_i = \pm 1$, соответствует свой октант $\theta_\Sigma = \{X : \sigma_i \langle L_i, X \rangle \geq 0, i = 1, 2, 3\}$, ограниченный этими плоскостями. В каждом октанте θ_Σ рассматривается выпуклая оболочка K_Σ всех целочисленных точек $X \in \theta_\Sigma$, $X \neq 0$. Ее граница ∂K_Σ является выпуклой двумерной многогранной поверхностью, состоящей из вершин, ребер и граней. Ее вершины должны давать наилучшие рациональные приближения для линейных форм $\langle L_i, X \rangle$.

Рассмотрим теперь кубическую однородную форму $g(X)$, являющуюся произведением трех вещественных линейных форм: $g(X) = \langle L_1, X \rangle \langle L_2, X \rangle \langle L_3, X \rangle$. Пусть $\Delta =$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 97–01–00268, № 99–01–01063.

$\det(L_1 L_2 L_3)$ и $\mu(g)$ – наименьшее значение величины $|g\Delta^{-1}|$ на целочисленных X , $X \neq 0$:

$$\mu(g) = \frac{1}{|\Delta|} \min_{X \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} |g(X)|. \quad (1)$$

Далее векторы записываются как матрицы-строки, но в матричных операциях рассматриваются как матрицы-столбцы. Давенпорт [6]–[8] доказал, что $\mu(g) \leq 1/7$ и $\mu(g) = 1/7$ только для формы g_1 , у которой

$$L_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где λ_i – суть корни уравнения $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$, и для эквивалентных форм. Если их исключить из рассмотрения, то $\mu(g) \leq 1/9$ и $\mu(g) = 1/9$ только для формы g_2 , у которой L_i имеют вид (2), но λ_i суть корни уравнения $\lambda^3 - 3\lambda - 1 = 0$, и для эквивалентных форм. Свиннертон-Дайер [9] численно отыскал первые 19 форм g_i с наибольшими значениями μ .

В работах [10]–[14] для форм g_1 , g_2 и g_3 были вычислены многогранники Клейна и разложения векторов L_3 по матричным алгоритмам Эйлера, Якоби, Пуанкаре, Бруна, Брюно и Парусникова. Изучалось расположение их подходящих дробей относительно многогранников Клейна. В [15] аналогичная работа была сделана для формы h_4 , порожденной тем же полем, что и четвертая экстремальная форма g_4 . В настоящей работе вычисляются многогранники Клейна формы g_4 , ее сопряженной формы g_4^* и разложения их векторов по матричным алгоритмам. При этом впервые встречается ситуация, когда многогранники Клейна в сопряженных пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_*^n$ существенно различны.

Предварительной публикацией настоящей работы является [16].

2. Многогранники Клейна. О выпуклых многогранниках и конусах см. [17], [18]. Напомним определения, данные в [14]. Рассмотрим два n -мерных вещественных пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_*^n$ с координатами X и U соответственно и со скалярным произведением $\langle U, X \rangle = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$ для $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_*^n$ и $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Пусть в $\mathbb{R}_*^n$ заданы n линейно независимых векторов $L_1, \dots, L_n$. Каждому из 2^n наборов $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где $\sigma_i = \pm 1$, соответствует в $\mathbb{R}_*^n$ свой выпуклый конус

$$\mathcal{O}_\Sigma^* = \{U : U = \alpha_1 \sigma_1 L_1 + \dots + \alpha_n \sigma_n L_n, \alpha_i \geq 0\}. \quad (3)$$

В случаях конкретных σ_i вместо чисел $+1$ и -1 мы будем писать “+” и “–”. Отвечающие векторам L_i плоскости $\mathcal{L}_i = \{X : \langle L_i, X \rangle = 0\}$, $i = 1, \dots, n$, делят пространство $\mathbb{R}^n$ на 2^n выпуклых конусов

$$\mathcal{O}_\Sigma = \{X : \langle \sigma_i L_i, X \rangle \geq 0, i = 1, \dots, n\}. \quad (4)$$

Пусть векторы $M_1, \dots, M_n$ ортогональны векторам $L_1, \dots, L_n$, т.е.

$$\langle L_i, M_j \rangle = \delta_{ij} \psi_i, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где константы ψ_i не равны нулю, а δ_{ij} – символ Кронекера. Тогда конусы $\mathcal{O}_\Sigma^*$ и $\mathcal{O}_\Sigma$ можно задавать как

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\Sigma^* &= \{U : \langle U, M_i \sigma_i \psi_i \rangle \geq 0, i = 1, \dots, n\}, \\ \mathcal{O}_\Sigma &= \{X : X = \alpha_1 \psi_1 \sigma_1 M_1 + \dots + \alpha_n \psi_n \sigma_n M_n, \alpha_i \geq 0\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим выпуклую оболочку K_Σ всех попадающих в конус θ_Σ целочисленных точек $X \in \mathbb{Z}^n$, $X \neq 0$. Многогранником Клейна назовем $(n-1)$ -мерную многогранную поверхность ∂K_Σ , являющуюся границей множества K_Σ . В двойственном конусе θ_Σ^* выпуклую оболочку целочисленных точек $U \in \mathbb{Z}_*^n$, $U \neq 0$, обозначим через K_Σ^* . Кроме того в θ_Σ^* и θ_Σ определим многогранники

$$\begin{aligned}\bar{K}_\Sigma^* &= \{U : U \in \mathbb{R}^n, \langle U, X \rangle \geq 1 \text{ для всех } X \in K_\Sigma\}, \\ \bar{K}_\Sigma &= \{X : X \in \mathbb{R}^n, \langle U, X \rangle \geq 1 \text{ для всех } U \in K_\Sigma^*\},\end{aligned}$$

двойственные многогранникам K_Σ и K_Σ^* . Вершины последних могут быть нецелыми точками. Так как $\langle U, X \rangle \geq 0$ для $X \in \theta_\Sigma$ и $U \in \theta_\Sigma^*$, а для $X \in \mathbb{Z}^n$, $U \in \mathbb{Z}_*^n$ $\langle U, X \rangle$ – целое, то $\bar{K}_\Sigma^* \supset K_\Sigma^*$ и $\bar{K}_\Sigma \supset K_\Sigma$.

Поверхность ∂K_Σ состоит из граней $\Gamma_j^{(d)}$ разных размерностей d , $0 \leq d < n-1$: вершин ($d=0$), ребер ($d=1$), ..., гиперграней ($n-1$).

Целочисленная точка называется точкой *относительного минимума*, если в этом же октанте нет целочисленных точек, лежащих ближе, чем она, одновременно ко всем ограничивающим октант гиперплоскостям $\mathcal{L}_i$.

Пусть целочисленные точки $X_1, \dots, X_n$ лежат в гиперплоскости $\mathcal{L}$, служащей продолжением грани $\Gamma_j^{(n-1)}$, а векторы $X_i - X_1$, $i = 2, \dots, n$, образуют базис этой гиперплоскости, т.е. у $(n-1) \times n$ матрицы со строками из этих векторов наибольший общий делитель всех миноров размера $n-1$ равен единице. Величину $\rho(\Gamma_j^{(n-1)}) = |\det(X_1 X_2 \dots X_n)|$ назовем *расстоянием гиперграней* $\Gamma_j^{(n-1)}$.

Отметим следующее соответствие: каждой грани $\Gamma_j^{(n-d-1)}$ многогранника $\bar{K}_\Sigma^*$ отвечает некоторая грань $\Gamma_k^{(d)}$ многогранника K_Σ , причем $\langle U, X \rangle = 1$ для всех $U \in \Gamma_j^{(n-d-1)*}$ и $X \in \Gamma_k^{(d)}$. Заметим еще, что каждая грань является выпуклой оболочкой своих вершин.

Пересечения $\partial K_\Sigma \cap \bar{\partial K}_\Sigma$ и $\partial K_\Sigma^* \cap \bar{\partial K}_\Sigma^*$ содержат все гиперграней с расстоянием $\rho = 1$. Алгоритм вычисления таких пересечений гиперграней состоит в следующем. Далее набор Σ фиксируем и индекс Σ опускаем. Пусть точка $X_1 \in \partial K \cap \bar{\partial K}$; находим все целочисленные решения $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_m \in \theta^* \cap \mathbb{Z}_*^n$ уравнения $\langle U, X_1 \rangle = 1$ и n неравенств из (6): их выпуклая оболочка есть некоторая грань $\Gamma_j^{(d)*}$ поверхности ∂K^* . Среди точек $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_m$ выделим все вершины $U_1, \dots, U_r$ грани $\Gamma_j^{(d)*}$. Для каждой из них составим свое уравнение

$$\langle U_i, X \rangle = 1 \quad (7)$$

и находим все его решения $X \in \theta \cap \mathbb{Z}^n$, т.е. целочисленные решения X уравнения (7), удовлетворяющие n неравенствам из (4). Получаем точки $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$, лежащие на одной грани. Выбираем из них вершины $X_2, \dots, X_s$. Для каждой из них ищем все решения $U \in \theta \cap \mathbb{Z}_*^n$ уравнения $\langle U, X_i \rangle = 1$ и т.д. Во многих случаях так удастся вычислить все целочисленные точки многогранника Клейна ∂K . Весь многогранник ∂K однозначно восстанавливается как их выпуклая оболочка.

3. Формы и модули. Напомним некоторые определения из теории чисел [19], [20]. Пусть $\mathbb{Z}[x]$ – кольцо многочленов от x с целыми коэффициентами. Корни многочленов из $\mathbb{Z}[x]$ называются *алгебраическими числами* и, если старший коэффициент многочлена равен 1, *целыми алгебраическими числами*.

Степень n неприводимого над $\mathbb{Z}[x]$ многочлена $p(x)$, корнем которого является некоторое число λ , называется *степенью числа* λ ; другие $n - 1$ корней $\lambda^{(j)}$ многочлена p будут алгебраическими числами, *сопряженными* числу $\lambda = \lambda^{(1)}$ (в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$).

Линейные комбинации степеней $\sum_{j=0}^{n-1} a_k \lambda^k$, $a_k \in \mathbb{Q}$, образуют поле – *расширение* $\mathbb{Q}(\lambda)$ поля $\mathbb{Q}$; число n называется *степенью поля*, а поля $\mathbb{Q}(\lambda^{(j)})$ – полями, *сопряженными* к $\mathbb{Q}(\lambda)$. Фиксированная нумерация корней многочлена p задает нумерацию полей. Набор элементов поля, через который с рациональными коэффициентами выражаются все элементы поля, называется *базисом поля*. Заданное на базисе $1, \lambda^{(j)}, \dots, (\lambda^{(j)})^{n-1}$ отображение $(\lambda^{(1)})^k \rightarrow (\lambda^{(j)})^k$, $k = 0, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n$, определяет *естественный изоморфизм* полей, при этом числу поля $\alpha^{(1)}$ соответствует $\alpha^{(k)}$ – *сопряженное к нему в поле* $\mathbb{Q}(\lambda)$. *Норма* $\text{Norm}(\alpha)$ алгебраического числа α это рациональное число – произведение α и всех его сопряженных чисел:

$$\text{Norm}(\alpha) = \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(n)}.$$

Если все корни многочлена p вещественные, поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ называется *вполне вещественным*. Отображение, сопоставляющее элементу α поля n -мерный вектор $(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, называется *каноническим вложением* поля $\mathbb{Q}(\lambda)$.

Пусть даны $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{Q}(\lambda)$ или, что то же самое, задан вектор $V = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{Q}^m(\lambda)$. *Модулем* (точнее, *$\mathbb{Z}$ -модулем*) N с образующими v_j в поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ называется множество целочисленных линейных комбинаций

$$N = \left\{ \sum_{j=1}^m y_j v_j, Y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{Z}^m \right\}.$$

Говорят, что *модули подобны*, если у них имеются пропорциональные системы образующих. Векторы $V^{(j)} = (v_1^{(j)}, \dots, v_m^{(j)}) \in \mathbb{Q}^m(\lambda^{(j)})$ с компонентами из сопряженных полей задают модули, *сопряженные* с N . Точки модуля интерпретируются как значения линейной формы $\langle V, Y \rangle$ на всевозможных целочисленных векторах Y . Модуль *полный*, если максимальное число его линейно независимых образующих m равно степени n поля.

Каждому модулю N вполне вещественного поля однозначно соответствуют два объекта. Первый объект это m -мерная *решетка* в $\mathbb{R}^n$ – множество проекций точек модуля при каноническом вложении

$$\left\{ \left(\sum_{j=1}^m y_j v_j^{(1)}, \dots, \sum_{j=1}^m y_j v_j^{(n)} \right) \in \mathbb{R}^n, y_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Второй объект – *разложимая форма*. Однородная функция (форма) степени $k \in \mathbb{N}$ от n переменных называется *разложимой формой*, если она раскладывается в произведение линейных форм с коэффициентами – алгебраическими числами из некоторого расширения $\mathbb{Q}(\beta)$ поля $\mathbb{Q}$. Форма называется *целочисленной*, если ее значения на множестве $\mathbb{Z}^n$ – целые числа. Модулю N соответствует разложимая форма степени n

$$g_N(Y) = \text{Norm} \left(\sum_{j=1}^m y_j v_j \right) = \text{Norm}(\langle V, Y \rangle).$$

Если образующие модуля N – целые алгебраические числа, значения формы $g_N(Y)$ на векторах из $\mathbb{Z}^n$ – целые числа. Верно и обратное, каждая полная разложимая форма с точностью до множителя – рационального числа может быть интерпретирована как норма элементов некоторого модуля с образующими – целыми числами из некоторого расширения поля $\mathbb{Q}$. Подобным модулям отвечают *подобные решетки* и пропорциональные (с коэффициентом – рациональным числом) разложимые формы. Значения коэффициентов $\mu(g)$ для подобных форм одно и то же.

Заметим, что поле $\mathbb{Q}(\beta)$, где возможно разложение формы на линейные множители, это минимальное поле алгебраических чисел, содержащее как образующие модуля, так и числа, сопряженные к ним.

4. Форма $g_4(X)$. Экстремальные формы g_i Свиннертона-Дайера [9] задаются трехмерными решетками. Образующими модулей, отвечающих решеткам, служат 1 и числа α, β из некоторого кубического поля $\mathbb{Q}(\lambda)$. Для каждой из форм g_i числа λ, α, β свои.

Для четвертой формы число λ удовлетворяет кубическому уравнению

$$f(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0. \quad (8)$$

Дискриминант поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ положителен (равен $63^2 = 3969$), все корни уравнения (8) вещественны и поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ – вполне вещественное. Выписанные в порядке возрастания корни $\lambda_j = \lambda^{(j)}$ уравнения (8) суть

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \approx (-8.2588452612, -0.87891769753, 0.13776295871).$$

Так как $\lambda_j = -1/(1 + \lambda_{j+1}) = \lambda_{j+1}^2 + 8\lambda_{j+1} - 2$, $j = 1, 2, 3$, $\lambda_0 = \lambda_3$, числа λ_j лежат в одном и том же кубическом поле. Это значит, что $\mathbb{Q}(\lambda^{(j)}) = \mathbb{Q}(\lambda^{(1)})$, т.е. рассматриваемое поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ *нормально*. Образующими модуля берутся числа

$$1, \quad \alpha = \frac{-3 + 15\lambda + 2\lambda^2}{5}, \quad \beta = \frac{11 + 10\lambda + \lambda^2}{5}. \quad (9)$$

Числа α, β – не целые алгебраические числа: $\alpha^3 + 1.2\alpha^2 - 5.4\alpha - 1 = 0$, $\beta^3 - 2.4\beta^2 - 0.6\beta + 1 = 0$. Для $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, 3$, они численно равны

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &\approx (1.90687423572, -2.92775456497, -0.17911967075), \\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) &\approx (-0.67598551273, 0.59666386875, 2.47932164398). \end{aligned}$$

Приведем также численные значения векторов, задающих три сопряженных модуля:

$$L_j = (1, \alpha_j, \beta_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (10)$$

т.е.

$$\begin{aligned} L_1 &\approx (1, 1.90687423572, -0.67598551273), \\ L_2 &\approx (1, -2.92775456497, 0.59666386875), \\ L_3 &\approx (1, -0.17911967075, 2.47932164398). \end{aligned} \quad (11)$$

В [20] была найдена симметричная матрица A с характеристическим уравнением (8):

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные векторы – это ортогональные (в силу симметричности A) векторы

$$L''_j = (1, 7 + 9\lambda_j + \lambda_j^2, 1 + \lambda_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

т.е.

$$\begin{aligned} L''_1 &\approx (1, 0.878917698, -7.258845261), \\ L''_2 &\approx (1, 0.137762959, 0.121082302), \\ L''_3 &\approx (1, 8.258845261, 1.137762959). \end{aligned}$$

Чтобы избежать дополнительных буквенных обозначений, договоримся что обозначающая матрицу буква, заключенная в круглые скобки и снабженная парой индексов, означает элемент матрицы, и снабженная одним индексом – столбец матрицы. Введем матрицы

$$B_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 15 & 2 \\ 11 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

L'' , L : $(L'')_{ij} = (L''_j)_i$, $(L)_{ij} = (L_j)_i$, а также матрицу Вандермонда W и диагональную матрицу Λ

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AL'' = L''\Lambda, \quad L''^* A = \Lambda L''^* \quad (13)$$

(звездочка $*$ означает транспонирование), а соотношения (9), (10) и (12) записываются в виде $L = B_1 W$, $L'' = B_2 W$. Коэффициенты матрицы B_1 – рациональные, а матриц $B_1^{-1}A$, B_2 , B_2^{-1} – целые числа:

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 2 \\ 39 & 10 & -15 \end{pmatrix}, \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Из этих соотношений можно найти матрицу A_1 , для которой собственными векторами (правыми) будут векторы L_j , т.е. $A_1 L = L\Lambda$. Поскольку $W = B_1^{-1}L = B_2^{-1}L''$, то $L'' = B_2 B_1^{-1}L$. Следовательно, по (13) $AB_2 B_1^{-1}L = B_2 B_1^{-1}L\Lambda$, т.е.

$$A_1 = B_1 B_2^{-1} A B_2 B_1^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -8 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

При вычислении векторов двойственного базиса приходится вычислять матрицу W^{-1} , обратную матрице Вандермонда $(W)_{ij} = \lambda_j^{i-1}$. Приведем явные формулы для ее элементов в общем случае – для матрицы размера $n \times n$ и когда величины λ_j удовлетворяют произвольному уравнению $f_n \lambda_j^n + \dots + f_1 \lambda_j + f_0 = 0$ с комплексными коэффициентами f_j :

$$(W^{-1})_{ji} = \frac{f_n \lambda_j^{n-i} + \dots + f_{i+1} \lambda_j + f_i}{n f_n \lambda_j^{n-1} + \dots + 2 f_2 \lambda_j + f_1}, \quad j, i = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Из формулы (5) видно, что *вектор-столбцы* двойственного к L_j базиса M_i пропорциональны *строкам* обратной к матрице L матрицы $L^{-1} = W^{-1}B_1^{-1}$. Отыскав последнюю матрицу с помощью формулы (15), введем векторы M_i таким образом, чтобы их первые компоненты были равны 1. Составленную из этих вектор-столбцов матрицу обозначим M . Имеем

$$M_i = \left(1, \frac{3\lambda_i^2 + 26\lambda_i + 13}{11}, \frac{8\lambda_i^2 + 73\lambda_i + 53}{11} \right), \quad i = 1, 2, 3,$$

т.е.

$$\begin{aligned} M_1 &\approx (1, 0.2632362140, -0.3843185164), \\ M_2 &\approx (1, -0.6849428344, -0.4528201243), \\ M_3 &\approx (1, 1.5126157113, 5.7462295498). \end{aligned} \quad (16)$$

Для этих векторов все константы ψ_i в формуле (5) положительны.

Определим кубические формы $g_4(X)$ и $g_4^*(U)$ формулами

$$\begin{aligned} g_4(X) &= \prod_{i=1}^3 \langle LE_i, X \rangle = \text{Norm} \left(\sum_{j=1}^3 (L_1)_j x_j \right) = \text{Norm}(\langle L_1, X \rangle), \quad X \in \mathbb{R}^3, \\ g_4^*(U) &= \prod_{i=1}^3 \langle U, ME_i \rangle = \text{Norm} \left(\sum_{j=1}^3 u_j (M_1)_j \right) = \text{Norm}(\langle U, M_1 \rangle), \quad U \in \mathbb{R}_*^3 \end{aligned}$$

(E_i – i -й базисный вектор). Наряду с формами g_4 и g_4^* введем пропорциональные им формы $\tilde{g}_4(X) = 5g_4(X)$, $\tilde{g}_4^*(U) = 11g_4^*(U)$. Преимущество последних в том, что все принимаемые ими в целых точках значения – взаимно простые в совокупности целые числа, а не просто рациональные. Определители матриц L и M равны $\det L = -63/5$, $\det M = -63/11$, а минимумы модулей форм $\tilde{g}_4$ и $\tilde{g}_4^*$ суть 5 и 3 соответственно. Поэтому величины (1) равны $\mu(g_4) = \mu(\tilde{g}_4) = 5/63$, $\mu(g_4^*) = \mu(\tilde{g}_4^*) = 1/21$. Пары форм g_4 и g_4^* , так же как и $\tilde{g}_4$ и $\tilde{g}_4^*$, будем называть *взаимно сопряженными*.

Пусть линейный оператор D в $\mathbb{R}^3$ собственными векторами имеет векторы M_i , а собственными значениями – некоторые числа δ_i . То есть, $DM = M\Delta$, где матрица Δ диагональная: $\Delta = \text{diag}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Тогда $\langle L_j, DX \rangle = \delta_j \langle L_j, X \rangle$ и преобразование $Y = DX$ переводит плоскости $\mathcal{L}_i$ в себя, а полупространства, на которые они делят $\mathbb{R}^3$, – в себя или в дополнительные полупространства. Следовательно, D переводит октанты θ_Σ в другие такие октанты. Поскольку $D^*L = L\Delta$, то поверхность уровня $g_4 = c$ формы g_4 при этом преобразовании переходит в поверхность уровня $c \det D$, ибо

$$g_4(DX) = \prod_{i=1}^3 \langle LE_i, DX \rangle = \prod_{i=1}^3 \langle D^*LE_i, X \rangle = \prod_{i=1}^3 \langle LE_i, X \rangle \delta_i = g_4(X) \det D.$$

Если определитель матрицы D равен ± 1 , то относительно преобразования $Y = DX$ инвариантно абсолютное значение формы g_4 . Итак, преобразования, одновременно являющиеся и унимодулярными ($D \in SL(3, \mathbb{Z})$), и операторами сжатия-растяжения вдоль векторов M_i , переводят многогранники Клейна ∂K_Σ друг в друга. Форма g_4^* инвариантна относительно действия оператора D^* в $\mathbb{R}_*^3$ (с транспонированной матрицей).

Имеются отображения, композицией которых многогранник Клейна любого октанта переводится в многогранник Клейна любого другого октанта:

$$\begin{aligned} -E: \partial K_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} &\rightarrow \partial K_{-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}, & A_1^*: \partial K_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} &\rightarrow \partial K_{-\sigma_1 - \sigma_2 \sigma_3}, \\ A_1^* + E: \partial K_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} &\rightarrow \partial K_{-\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}. \end{aligned} \quad (17)$$

Поэтому восемь многогранников Клейна ∂K_Σ изоморфны между собой и достаточно вычислить только один из них.

Методом, описанным в п. 2, были вычислены целочисленные точки многогранников Клейна форм g_4 и g_4^* (или, что то же самое, многогранников Клейна форм $\tilde{g}_4$ и $\tilde{g}_4^*$), лежащие в октантах θ_{+++} и θ_{+++}^* соответственно. Результаты приведены в табл. 1 и 2. Оказалось, что в вершинах многогранника ∂K_{+++} форма $\tilde{g}_4(X)$ принимает значения 5, 9, во внутренних точках ребер – значения 23 и во внутренних точках граней – 21, 33, 49. Для многогранника ∂K_{+++}^* значения формы $\tilde{g}_4^*$ в вершинах суть 3, 7, 11 и во внутренних точках граней – значения 25. В указанных октантах были также найдены не лежащие на многогранниках точки относительных минимумов. Их координаты и значения в них форм даны в табл. 3 и 4. Обобщенные данные соответствия сопряженных точек из сопряженных октантов приведены в табл. 5: указаны значения форм $\tilde{g}_4$ и $\tilde{g}_4^*$ в точках многогранника и значения, принимаемые сопряженными формами (соответственно $\tilde{g}_4^*$ и $\tilde{g}_4$) в точках, сопряженных к этим точкам. Эти данные свидетельствуют о том, что многогранники ∂K_{+++} и ∂K_{+++}^* по структуре не похожи один на другой.

Введя логарифмические координаты $n_i(X)$ точки X , можно наглядно представить многогранник Клейна. Зафиксируем октант θ_Σ и для его внутренних точек X положим $l_i = l_i(X) = \ln |\langle L_i, X \rangle|$, $i = 1, 2, 3$, и

$$n_1 = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{\sqrt{3}}, \quad n_2 = \frac{-l_1 + 2l_2 - l_3}{\sqrt{6}}, \quad n_3 = \frac{l_1 - l_3}{\sqrt{2}}. \quad (18)$$

Координаты n_2, n_3 – это логарифмические координаты центральной проекции точки на поверхность уровня 1 функции g_4 , а координата n_1 параметризует поверхности $g_4 = \text{const}$. В двойственном пространстве координаты n_i введем тем же ортогональным преобразованием (18) с той разницей, что $l_i = l_i(U) = \ln |\langle U, M_i \rangle|$, $i = 1, 2, 3$.

На рис. 1 и 2 в этих координатах изображены проекции многогранников Клейна ∂K_{+++} и ∂K_{+++}^* соответственно и точек относительных минимумов, не лежащих на них (чтобы отличать их, последние не закрашены). Рядом с точками подписаны значения, принимаемые в них формами $\tilde{g}_4$ и $\tilde{g}_4^*$ соответственно.

Введем обозначения для некоторых треугольных и четырехугольных областей $\Gamma_j^{(2)}$ и $\Gamma_j^{(2)*}$ – граней или частей граней многогранников ∂K_{+++} и ∂K_{+++}^* соответственно:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(2)} &= \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (2, -1, 0)\}, & \rho &= 1, \\ \Gamma_2^{(2)} &= \{(13, 3, -5), (39, 10, -15), (5, 0, -2)\}, & \rho &= 1, \\ \Gamma_3^{(2)} &= \{(10, 3, -2), (30, 8, -11), (3, 1, 0)\}, & \rho &= 1, \\ \Gamma_4^{(2)} &= \{(1, 0, 1), (1, 1, 4), (1, 0, 0)\}, & \rho &= 1, \\ \Gamma_5^{(2)} &= \{(1, 0, 1), (2, -1, 0), (1, 1, 4)\}, & \rho &= 1, \end{aligned}$$

Рис. 1. Проекция многогранника Клейна ∂K_{+++} для формы g_4 в логарифмических координатах.

$$\Gamma_6^{(2)} = \{(1, 0, 0), (5, -2, -2), (9, -6, -4)\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_7^{(2)} = \{(1, 0, 0), (9, -6, -4), (2, -1, 0)\}, \quad \rho = 2,$$

$$\Gamma_8^{(2)} = \{(2, -1, 0), (9, -6, -4), (12, -8, -5)\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_1^{(2)*} = \{(1, 0, 2), (3, -1, 7), (9, -2, 22), (17, -3, 42)\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_2^{(2)*} = \{(9, 17, -6), (2, 3, -1), (1, 1, 0), (3, 5, -1)\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_3^{(2)*} = \{(8, 13, -2), (5, 2, 8), (12, -1, 28), (24, 0, 53)\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_4^{(2)*} = \{(16, -5, 38)/3, (9, -2, 22), (3, -1, 7)\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_5^{(2)*} = \{(16, -5, 38)/3, (3, -1, 7), (4, -2, 9)\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_6^{(2)*} = \{(16, -5, 38)/3, (4, -2, 9), (9, -2, 22)\}, \quad \rho = 1,$$

$$\Gamma_7^{(2)*} = \{(1, 0, 2), (17, -3, 42), (5, 0, 11)\}, \quad \rho = 3.$$

В правом столбце здесь приведены расстояния ρ граней, частями которых являются эти

Рис. 2. Проекция сопряженного многогранника Клейна ∂K_{+++}^* для формы g_4^* в логарифмических координатах.

области. Здесь полные грани суть $\Gamma_1^{(2)} - \Gamma_5^{(2)}$, $\Gamma_7^{(2)}$ и $\Gamma_1^{(2)*} - \Gamma_3^{(2)*}$, $\Gamma_7^{(2)*}$. Одна из вершин треугольников $\Gamma_4^{(2)*}$, $\Gamma_5^{(2)*}$, $\Gamma_6^{(2)*}$ – нецелая точка.

Найдем линейные отображения C_1 , C_2 , сопряженные преобразования к которым переводят друг в друга грани многогранника Клейна ∂K_{+++} . Они задаются своим действием в трех точках. Приняв за эти точки вершины граней $\Gamma_1^{(2)}$, $\Gamma_2^{(2)}$ и $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_3^{(2)}$ соответственно, получаем линейные системы и определяем C_i^* :

$$C_1^* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 39 & 5 \\ 3 & 10 & 0 \\ -5 & -15 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_1^* = \begin{pmatrix} 39 & 73 & -26 \\ 10 & 20 & -7 \\ -15 & -28 & 10 \end{pmatrix},$$

$$C_2^* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \\ -2 & -11 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2^* = \begin{pmatrix} 30 & 57 & -20 \\ 8 & 15 & -5 \\ -11 & -22 & 9 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что преобразования C_1, C_2 переводят грани $\Gamma_1^{(2)*}$ в грани $\Gamma_2^{(2)*}$ и $\Gamma_3^{(2)*}$ соответственно.

Операторы C_1^* и C_2^* задают автоморфизмы формы $g_4(X)$, а C_1 и C_2 – автоморфизмы формы $g_4^*(U)$. Для матриц C_1 и C_2 (и сопряженных к ним C_1^*, C_2^*) характеристические уравнения суть соответственно

$$\nu^3 - 69\nu^2 + 54\nu - 1 = 0, \quad \nu^3 - 54\nu^2 + 69\nu - 1 = 0. \quad (19)$$

При этом видно, что для обратных преобразований верно другое уравнение из пары (19): для C_2^{-1} – первое, и для C_1^{-1} – второе. Поскольку все преобразования переводят октанты в себя, собственные векторы у операторов C_1, C_2 те же, что и у оператора A_1 . Сказанное остается, естественно, справедливым и для транспонированных матриц C_1^* и C_2^* и оператора A_1^* .

Установим одну удобную формулу. Пусть матрицы P и Q имеют один и тот же набор собственных векторов (вектор-столбцов): $PV_i = V_i p_i$, $QV_i = V_i q_i$, $p_i, q_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, причем числа p_i различны. Найдём представление матрицы Q в виде полинома от матрицы P

$$Q = f_{Q,P}(P) = \sum_{j=1}^n k_j P^{j-1}. \quad (20)$$

Применив представление (20) к векторам V_i , получим

$$q_i V_i = QV_i = \sum_{j=1}^n k_j P^{j-1} V_i = \sum_{j=1}^n k_j p_i^{j-1} V_i,$$

т.е. $q_i = \sum_{j=1}^n k_j p_i^{j-1}$. Зададим векторы Q, K и матрицу Вандермонда W_P формулами: $(Q)_i = q_i$, $(K)_i = k_i$, $(W_P)_{ij} = p_i^{j-1}$, $i, j = 1, \dots, n$. Теперь видно, что существование представления (20) сводится к разрешимости системы $W_P K = Q$. Так как p_i различны, матрица Вандермонда обратима, и коэффициенты полинома равны

$$k_j = \sum_{l=1}^n (W_P^{-1})_{jl} q_l, \quad j = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Формулы (20), (21) позволяют найти представление найденных выше матриц как полиномов от матрицы A_1 : $C_1 = A_1^2$, $C_2 = (A_1 + E)^2$.

Другие преобразования, сохраняющие октанты, это перестановки вершин некоторых треугольных граней многогранника. На рис. 1 для многогранника ∂K_{+++} такое преобразование C_0^* выглядит как поворот против часовой стрелки вокруг точки $(1, 0, 1)$. Из условия, что область $\Gamma_4^{(2)}$ переходит в $\Gamma_5^{(2)}$, получаем

$$C_0^* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C_0^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Куб этого преобразования равен тождественному преобразованию. Для многогранника ∂K_{+++}^* аналогично действует преобразование C_0 с транспонированной матрицей. Матрица C_0 не коммутирует с A_1 , не является многочленом от этой матрицы и поэтому

существенно расширяет группу изоморфизмов многогранника Клейна, делая ее некоммутативной:

$$C_1^* C_0^* = C_0^* (C_1^*)^{-1} C_2^*, \quad C_2^* C_0^* = C_0^* (C_1^*)^{-1}.$$

Все вершины X одной полости (лежащей в октанте θ_{+++}) многогранника Клейна ∂K , значения формы $g_4(X)$ в которых одинаковы, можно получить из одной такой вершины X_0 по формуле $X = (C_1^*)^i (C_2^*)^j X_0$, $i, j \in \mathbb{Z}$. При этом некоторая фиксированная “соседняя” с X_0 вершина X'_0 отобразится в одну из трех вершин “соседних” с X . Предварительным “поворотом” $(V^*)^m$, $m = 0, 1, 2$, вокруг точки X_0 можно добиться, чтобы X'_0 отобразилась в какую-то конкретную “соседнюю” с X вершину X' :

$$\begin{aligned} X &= (C_1^*)^i (C_2^*)^j (V^*)^m X_0, \quad i, j \in \mathbb{Z}, \quad m = 0, 1, 2, \\ X' &= (C_1^*)^i (C_2^*)^j (V^*)^m X'_0. \end{aligned}$$

Отметим, что для точек X – вершин треугольника $\Gamma_1^{(2)} \cup \Gamma_4^{(2)} \cup \Gamma_5^{(2)}$ – преобразованием V^* будет преобразование C_0^* или $(C_0^*)^2$. Теперь осталось заметить, что многогранники Клейна разных полостей переводятся друг в друга преобразованиями (17).

Пользуясь тем, что единственный автоморфизм многогранников Клейна $\cup_{\Sigma} \partial K_{\Sigma}$, имеющий ненулевую целочисленную неподвижную точку, это тождественное преобразование, получаем представление произвольного автоморфизма формы g_4 в виде произведения

$$(A_1^*)^k (A_1^* + E)^l (C_0^*)^m (-E)^n, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad m = 0, 1, 2, \quad n = 0, 1. \quad (22)$$

В качестве фундаментальной области многогранника Клейна относительно группы (22) может быть взята область H из четырех треугольников $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_6^{(2)}, \Gamma_7^{(2)}$ и $\Gamma_8^{(2)}$ расстояний 1, 1, 2 и 1 соответственно. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Для формы g_4 группа автоморфизмов $G(g_4)$ имеет две образующих бесконечного порядка A_1^* и $A_1^* + E$ и две образующих C_0^* и $-E$ порядков 3 и 2 соответственно. Фундаментальная область H всех многогранников Клейна $\cup_{\Sigma} \partial K_{\Sigma}$ состоит из четырех треугольников $\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_6^{(2)}, \Gamma_7^{(2)}$ и $\Gamma_8^{(2)}$ расстояний 1, 1, 2 и 1 соответственно. Для формы g_4^* образующими группы автоморфизмов $G(g_4^*)$ служат преобразования, сопряженные к образующим группы $G(g_4)$. Фундаментальная область H_* всех многогранников Клейна $\cup_{\Sigma} \partial K_{\Sigma}^*$ состоит из четырехугольника $\Gamma_1^{(2)*}$ расстояния 1 и двух треугольников $\Gamma_4^{(2)*}$ и $\Gamma_7^{(2)*}$ расстояний 1 и 3.*

Фундаментальные области будут состоять не из частей граней, а из целых граней, если ограничиться рассмотрением лишь коммутативных подгрупп групп автоморфизмов многогранника Клейна (подгруппы преобразований, для которых в формуле (22) $m = 0$). На рисунках 1 и 2 такие фундаментальные области обозначены символами $\Gamma_9^{(2)}$ и $\Gamma_8^{(2)*}$ соответственно. По одной из вершин изображенных областей (точек $(123, -84, -55)$ и $(37, -108, 22)$) нет в табл. 1 и 2: они добавлены, чтобы указанные области не заходили на изображенные ранее.

5. Разложения по матричным алгоритмам. Был исследован вопрос, улавливают ли структуру многогранников Клейна различные многомерные матричные обобщения разложений в цепные дроби. Вычислялись разложения векторов по алгоритмам Эйлера, Якоби (4 варианта), Пуанкаре, Бруна, Брюно и Парусникова (см. [15], [16]).

При этом в [15], [16] алгоритм Брюно описан неверно. Поэтому приводим здесь его правильное описание. Для тройки чисел $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 0$ вычисляются $a = [\alpha/\beta]$, $b = [\beta/\gamma]$, $c = [(\alpha - a\beta)/\gamma]$ ($[\cdot]$ – целая часть) и делаются преобразования $\alpha' = \alpha - a\beta - c\gamma$, $\beta' = \beta - b\gamma$, $\gamma' = \gamma$. Числа α' , β' , γ' упорядочиваются и процедура повторяется и т.д. В настоящей работе использовался ускоренный алгоритм Бруна. Шаги алгоритма Бруна, на которых не происходит переупорядочения компонент векторов, в нем опущены, т.е. шаг алгоритма состоит в получении чисел $\alpha' = \alpha - [\alpha/\beta]\beta$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = -\gamma$ и их упорядочения.

Рассматривались два начальных вектора L'_3 и M_3 . В первом случае разлагался вектор L'_3 , полученный из вектора L_3 в (11) изменением знака его второй компоненты. При этом для “подходящих дробей” U' вектора L'_3 вычислялись значения форм $\langle U', M'_i \rangle$ и $\tilde{g}_4^*(U') = 11\langle U', M'_1 \rangle \langle U', M'_2 \rangle \langle U', M'_3 \rangle$, где векторы M'_i образованы из M_i в (16) заменой знака второй компоненты.

Обозначим с помощью дополнительного индекса k вектор *остаток* цепной дроби, получающийся на k -м шаге матричного алгоритма: $L'_{3,-1} = L'_3$. Соседние остатки связаны друг с другом соотношениями $L'_{3,k} = Q_k L'_{3,k-1}$ с унимодулярными матрицами Q_k . Введем матрицу $\tilde{Q}_0$ такую, что компоненты $\tilde{Q}_0 L'_3$ – это упорядоченные в порядке убывания компоненты вектора L'_3 , и положим для всех алгоритмов, кроме алгоритмов Якоби, $Q_0 = \tilde{Q}_0$. Для вариантов алгоритмов Якоби введем матрицы

$$Q^{(123)} = E, \quad Q^{(132)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{(213)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{(312)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и положим $Q_0 = Q^{(\kappa)} \tilde{Q}_0$, $\kappa = “123”, “132”, “213”, “312”$.

В табл. 6 представлено разложение вектора L'_3 по единственному периодическому алгоритму из исследованных – алгоритму Бруна. (Разложения L'_3 по другим алгоритмам приведены в [16].) Столбцы таблицы содержат: k – номер шага алгоритма, вектор остатка L_k , матрицу Q_k , матрицу $N_k = (M_k \dots M_0 M_{-1})^{-1}$, столбец значений формы $\tilde{g}_4$ на *подходящих дробях* $N_k E_j$, $j = 1, 2, 3$, и нормированный вектор остатка $L'_k / (L'_k)_1$. Кроме алгоритма Бруна, все рассмотренные алгоритмы непериодичны. Выявленный период длины 7 ускоренного алгоритма Бруна (длины 10 для оригинального алгоритма) задается матрицей

$$T_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 23 \\ 1 & -1 & 4 \\ 10 & -15 & 57 \end{pmatrix} = 7\hat{A}_1^2 + 64\hat{A}_1 + 51E = \hat{A}_1^{-2}(\hat{A}_1 + E),$$

где матрица $\hat{A}_1$ отличается от A_1 заменой знаков вторых строк и столбцов

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 8 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм Брюно, хотя его период не найден, остается на многогранниках Клейна. Алгоритмы Якоби (132) и (312) на некоторых шагах сходят с многогранников Клейна, но потом вновь возвращаются на многогранники. “Подходящие дроби”, вычисленные по

остальным алгоритмам, сходят с многогранников Клейна уже на втором – третьем шагах.

Во втором случае разлагался положительный вектор $M_3 \in \mathbb{R}_*^3$ из (16). В подходящих дробях X к нему вычислялись значения форм $\langle L_i, X \rangle$ и $\tilde{g}_4(X)$. Для алгоритма Брюно был найден период длины 3:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 6 & -1 & 15 \\ 23 & -4 & 57 \end{pmatrix} = 7(A_1^*)^2 + 64A_1^* + 51E = (A_1^*)^{-2}(A_1^* + E),$$

где матрица A_1^* – транспонированная матрица (14). В табл. 7, организованной так же, как табл. 6, представлено разложение M_3 по алгоритму Брюно. (Разложения M_3 по всем алгоритмам приведены в [16].) Алгоритмы Якоби (132) и (312) и алгоритм Бруна остаются на многогранниках Клейна. Их периоды не были обнаружены. Остальные алгоритмы сходят с многогранников Клейна на втором – четвертом шагах.

Мы видим, что при разложении векторов из сопряженных пространств (которые в рассматриваемом случае различны) “качество” этих алгоритмов разложения меняется.

Автор благодарит А. Д. Брюно за постановку задачи и полезные замечания.

Приложение

ТАБЛИЦА 1. Точки $X = (x_1, x_2, x_3)$ с $|x_2|, |x_3| \leq 100$ многогранника Клейна ∂K_{+++} формы $\tilde{g}_4$.

X	$\tilde{g}_4(X)$	X	$\tilde{g}_4(X)$	X	$\tilde{g}_4(X)$	X	$\tilde{g}_4(X)$
(1, 0, 0)	5	(39, 10, -15)	5	(3, 0, -1)	23	(4, -1, 3)	33
(1, 1, 4)	5	(65, 3, -26)	5	(3, 2, 10)	23	(4, 5, 18)	33
(2, -1, 0)	5	(78, -49, -35)	5	(3, 4, 15)	23	(5, -1, -2)	33
(3, 1, 0)	5	(95, -65, -43)	5	(4, 4, 13)	23	(5, 2, 13)	33
(4, 5, 20)	5	(1, 0, 1)	9	(5, -3, -2)	23	(7, -4, -3)	33
(5, 0, -2)	5	(10, 3, -2)	9	(7, -4, -1)	23	(9, -4, 2)	33
(5, 7, 26)	5	(13, 3, -5)	9	(7, -3, -3)	23	(34, 11, -3)	33
(7, 3, 3)	5	(13, 18, 70)	9	(8, -1, 9)	23	(42, 11, -16)	33
(8, 2, -3)	5	(16, 24, 91)	9	(18, 9, 14)	23	(45, 17, 8)	33
(9, -6, -4)	5	(31, -21, -14)	9	(19, 5, -7)	23	(53, 14, -20)	33
(10, 10, 43)	5	(40, -27, -17)	9	(28, 4, -11)	23	(59, 11, -23)	33
(10, 15, 57)	5	(40, -12, -17)	9	(49, -31, -22)	23	(70, 17, -27)	33
(12, -7, -2)	5	(61, -21, 31)	9	(60, -41, -27)	23	(3, 3, 10)	49
(15, 20, 73)	5	(4, 1, -1)	21	(77, 21, -26)	23	(5, -2, -2)	49
(17, -2, -7)	5	(5, 7, 27)	21	(79, -51, -27)	23	(6, -1, 6)	49
(20, -13, -9)	5	(9, 10, 34)	21	(88, 27, -15)	23	(61, 19, -9)	49
(25, -17, -11)	5	(12, -8, -5)	21	(99, 26, -38)	23	(76, 20, -29)	49
(29, 15, 25)	5	(14, -5, -6)	21	(2, 2, 7)	33		
(30, 8, -11)	5	(19, -5, 14)	21	(3, -1, -1)	33		
(35, -18, 1)	5	(2, 1, 2)	23	(3, 2, 5)	33		

ТАБЛИЦА 2. Точки $U = (u_1, u_2, u_3)$ с $|u_2|, |u_3| \leq 100$ многогранника Клейна ∂K_{+++}^* формы $\tilde{g}_4^*$.

U	$\tilde{g}_4(U)$	U	$\tilde{g}_4(U)$	U	$\tilde{g}_4(U)$	U	$\tilde{g}_4(U)$
(1, 0, 2)	3	(5, 2, 8)	11	(1, 0, 1)	25	(14, -40, 9)	25
(2, -5, 1)	3	(7, -16, 3)	11	(2, -3, 3)	25	(14, 25, -9)	25
(3, -7, 3)	3	(8, -23, 5)	11	(2, -1, 0)	25	(17, 3, 33)	25
(8, 13, -2)	3	(9, -2, 22)	11	(3, -8, 2)	25	(19, -5, 46)	25
(9, 17, -6)	3	(10, -29, 6)	11	(3, -4, 5)	25	(19, 35, -11)	25
(13, 18, -7)	3	(10, -18, 3)	11	(3, 1, 5)	25	(24, -69, 14)	25
(37, -15, 86)	3	(12, -1, 28)	11	(3, 2, -1)	25	(24, -5, 59)	25
(1, -2, 1)	7	(15, -38, 13)	11	(3, 3, 2)	25	(24, -4, 59)	25
(3, 5, -1)	7	(17, -31, 23)	11	(4, 7, -2)	25	(24, 45, -16)	25
(4, 5, -2)	7	(20, -55, 11)	11	(5, -14, 3)	25	(31, -90, 19)	25
(14, -5, 33)	7	(25, -73, 15)	11	(5, -1, 12)	25	(31, -5, 76)	25
(17, -3, 42)	7	(29, 43, -1)	11	(5, 9, -3)	25	(36, -55, 56)	25
(24, 0, 53)	7	(30, 57, -20)	11	(7, 3, -2)	25	(36, -20, -1)	25
(33, -75, 14)	7	(35, -95, 26)	11	(10, -19, 13)	25	(39, 10, 71)	25
(1, 0, 0)	11	(38, 72, -25)	11	(10, 1, -2)	25	(39, 35, -16)	25
(1, 1, 0)	11	(39, 73, -26)	11	(10, 6, 13)	25	(43, 76, -20)	25
(2, 3, -1)	11	(44, 53, 17)	11	(11, -30, 6)	25	(52, 99, -35)	25
(3, -1, 7)	11	(49, 93, -33)	11	(11, -2, 27)	25	(54, 20, 89)	25
(4, -2, 9)	11	(65, 52, -25)	11	(11, 20, -6)	25		
(5, 0, 11)	11	(1, -1, 1)	25	(12, -12, 23)	25		

ТАБЛИЦА 3. Точки относительных минимумов $X_j = (x_1, x_2, x_3) \in \theta_{+++}$ с $|x_2|, |x_3| \leq 100$ формы $\tilde{g}_4$, не лежащие на ∂K_{+++} .

X	$\tilde{g}_4(X)$	X	$\tilde{g}_4(X)$	X	$\tilde{g}_4(X)$	X	$\tilde{g}_4(X)$
(2, 1, 3)	75	(8, -5, -3)	75	(17, -11, -6)	75	(36, 7, 73)	75
(3, 1, 1)	75	(8, 1, -3)	75	(18, -11, -8)	75	(43, -23, -19)	75
(3, 1, 7)	75	(8, 7, 21)	75	(20, 16, 45)	75	(47, -32, -21)	75
(4, -2, -1)	75	(9, 13, 49)	75	(22, -14, -7)	75	(57, 16, -17)	75
(4, 4, 17)	75	(11, 7, 36)	75	(25, 1, -10)	75	(63, -38, -14)	75
(6, 1, -2)	75	(15, 1, 25)	75	(26, 7, -9)	75	(72, -41, -32)	75
(7, 4, 8)	75	(15, 4, -5)	75	(31, 22, 56)	75	(73, 19, -28)	75
(7, 10, 38)	75	(16, -8, -7)	75	(36, 7, -14)	75	(82, -56, -37)	75

ТАБЛИЦА 4. Точки относительных минимумов $U = (u_1, u_2, u_3)$ с $|u_2|, |u_3| \leq 100$ формы $\tilde{g}_4^*$, не лежащие на ∂K_{+++}^* .

U	$\tilde{g}_4(U)$	U	$\tilde{g}_4(U)$	U	$\tilde{g}_4(U)$	U	$\tilde{g}_4(U)$
(2, -4, 1)	45	(17, -49, 10)	45	(3, -2, 6)	105	(32, -93, 19)	105
(2, -1, 4)	45	(17, 32, -11)	45	(3, 4, 0)	105	(32, -6, 79)	105
(2, 2, 1)	45	(23, -64, 16)	45	(7, -19, 5)	105	(33, -56, 9)	105
(5, -13, 4)	45	(23, -19, 1)	45	(7, 11, -4)	105	(33, -29, 66)	105
(5, -7, 1)	45	(23, 23, 16)	45	(8, -9, 1)	105	(33, 58, -21)	105
(8, -7, 16)	45	(23, 38, -14)	45	(8, 9, 4)	105	(38, 33, 34)	105
(8, -1, 19)	45	(35, -22, 76)	45	(13, -7, 29)	105	(95, -78, 4)	105
(8, 11, 1)	45	(38, -7, 94)	45	(15, -2, 36)	105		
(8, 14, -5)	45	(2, -3, 1)	105	(25, 47, -16)	105		

ТАБЛИЦА 5. Значения форм $\tilde{g}_4$ и $\tilde{g}_4^*$ во взаимно сопряженных точках.

Форма	Значение формы в точке	Расположение точки	Сопряженная форма	Значения сопряженной формы в сопряженных точках
$\tilde{g}_4$	5	Вершина	$\tilde{g}_4^*$	3, 7, 11, 25
	9	Вершина		11
	21	На грани		7
	23	На ребре		3
	33	На грани		3
	49	На грани		3
$\tilde{g}_4^*$	3	Вершина	$\tilde{g}_4$	5, 23, 33, 49
	7	Вершина		5, 21
	11	Вершина		5, 9
	25	На грани		5

ТАБЛИЦА 6. Разложение вектора L'_3 по ускоренному алгоритму Бруна.

k	L'_k		Q_k			N_k		$\tilde{g}_4^*$	$L'_k/(L'_k)_1$
0	.2479322E+1	0	0	1	0	1	0	11	1.
	1.	1	0	0	0	0	1	11	.4033361
	.1791197	0	1	0	1	0	0	3	.0722454
1	1.	0	1	0	1	0	0	3	1.
	.4793216	1	-2	0	0	0	1	11	.4793216
	.1791197	0	0	1	2	1	0	3	.1791197
2	.4793216	0	1	0	2	0	1	-7	1.
	.1791197	0	0	1	0	1	0	3	.3736941
	.4135671E-1	1	-2	0	5	0	2	3	.0862818
3	.1791197	0	1	0	4	2	1	-11	1.
	.1210823	1	-2	0	1	0	0	-7	.6759855
	.4135671E-1	0	0	1	10	5	2	3	.2308887
4	.1210823	0	1	0	6	4	1	3	1.
	.5803737E-1	1	-1	0	1	1	0	-11	.4793216
	.4135671E-1	0	0	1	15	10	2	3	.3415587
5	.5803737E-1	0	1	0	16	1	6	25	1.
	.4135671E-1	0	0	1	3	0	1	3	.7125877
	.5007566E-2	1	-2	0	40	2	15	3	.0862818
6	.4135671E-1	0	1	0	17	16	6	7	1.
	.1668066E-1	1	-1	0	3	3	1	25	.4033361
	.5007566E-2	0	0	1	42	40	15	3	.1210823
7	.1668066E-1	0	1	0	50	17	6	-3	1.
	.7995400E-2	1	-2	0	9	3	1	7	.4793216
	.5007566E-2	0	0	1	124	42	15	3	.3002020
8	.7995400E-2	0	1	0	117	6	50	25	1.
	.5007566E-2	0	0	1	21	1	9	3	.6263059
	.6898571E-3	1	-2	0	290	15	124	-3	.0862818
9	.5007566E-2	0	1	0	123	117	50	7	1.
	.2987834E-2	1	-1	0	22	21	9	25	.5966639
	.6898571E-3	0	0	1	305	290	124	-3	.1377630
10	.2987834E-2	0	1	0	240	123	50	11	1.
	.2019732E-2	1	-1	0	43	22	9	7	.6759855
	.6898571E-3	0	0	1	595	305	124	-3	.2308887

$$T_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 23 \\ 1 & -1 & 4 \\ 10 & -15 & 57 \end{pmatrix}$$

ТАБЛИЦА 7. Разложение вектора M_3 по алгоритму Брюно.

k	M_k		Q_k			N_k		$\tilde{g}_4^*$	$M_k/(M_k)_1$
0	.5746230E+1	0	0	1	0	0	1	-5	1.
	.1512616E+1	0	1	0	0	1	0	5	.2632362
1	1.	1	0	0	1	0	0	5	.1740272
	1.	0	0	1	1	0	0	5	1.
	.5126157	0	1	-1	1	1	0	5	.5126157
	.2083824	1	-3	-1	4	3	1	-5	.2083824
2	.2083824	0	0	1	4	1	1	-5	1.
	.9585088E-1	0	1	-2	6	2	1	-5	.4599759
	.7061946E-1	1	-1	-2	23	7	4	5	.3388936
3	.7061946E-1	0	0	1	10	9	4	5	1.
	.2523142E-1	0	1	-1	15	14	6	33	.3572871
	.1668066E-1	1	-2	0	57	53	23	-5	.2362048
4	.1668066E-1	0	0	1	43	29	10	-5	1.
	.8550766E-2	0	1	-1	65	44	15	-5	.5126157
	.3475955E-2	1	-2	-1	247	167	57	5	.2083824

$$T_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 6 & -1 & 15 \\ 23 & -4 & 57 \end{pmatrix}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хинчин А. Я. Цепные дроби. 3-е изд. М.: Физматгиз, 1961.
- [2] Klein F. Ueber eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Mathem.-Phys. Kl. 1895. №3. P. 357–359.
- [3] Klein F. Sur une representation geometrique du developpement en fraction continue ordinaire // Nouv. Ann. Math. (3). 1896. V. 15. P. 321–331.
- [4] Klein F. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Bd. I. Einleitung. Vorlesung, 1895/1896 herausgegeben von A. Sommerfeld. Göttingen, 1896.
- [5] Koksma J. F. Diophantische Approximationen. Berlin: Springer, 1936.
- [6] Davenport H. On the product of three homogeneous linear forms. I // Proc. London Math. Soc. (2). 1938. V. 44. P. 412–431.
- [7] Davenport H. Note on the product of three homogeneous linear forms // J. London Math. Soc. 1941. V. 16. P. 98–101.
- [8] Davenport H. On the product of three homogeneous linear forms. IV // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1943. V. 39. P. 1–21.
- [9] Swinnerton-Dyer H. P. F. On the product of three homogeneous linear forms // Acta Arithmetica. 1971. V. 18. P. 371–385.
- [10] Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // Матем. заметки. 1994. Т. 56. №4. С. 9–27.
- [11] Брюно А. Д., Парусников В. И. Сравнение разных обобщений цепных дробей // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №3. С. 339–348.
- [12] Брюно А. Д., Парусников В. И. Сравнение разных обобщений цепных дробей. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 52, 1994.
- [13] Парусников В. И. Многогранники Клейна для третьей экстремальной кубической формы. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 137, 1996.

- [14] Parusnikov V. I. Klein polyhedra for complete decomposable forms // Number Theory. Diophantine, Computational and Algebraic Aspects / ed. K. Györy, A. Pethő, V. T. Sós. Berlin-New York: De Gruyter, 1998. P. 453–463.
- [15] Парусников В. И. Многогранники Клейна с большими гранями. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 93, 1997.
- [16] Парусников В. И. Многогранники Клейна для четвертой экстремальной кубической формы. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 36, 1998.
- [17] Голдман А., Таккер А. Многогранные выпуклые конусы // Линейные неравенства. М.: ИЛ, 1959. С. 142–161.
- [18] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
- [19] Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.-Л.: ГИТТЛ, 1940.
- [20] Боревиц З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1972.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва
E-mail: `parus@applmat.msk.su`

Поступило
10.11.1998