Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Воронцов, Некоторые оценки C^m -вместимости компактных множеств в $\mathbb{R}^N$, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 6, 803–817

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm82>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:59:23

УДК 517.538.5+517.956.2

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ C^m -ВМЕСТИМОСТИ КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ В $\mathbb{R}^N$

А. М. Воронцов

Для заданного однородного эллиптического оператора L в частных производных с постоянными комплексными коэффициентами, банахова пространства V обобщенных функций в $\mathbb{R}^N$ и компактного множества X в $\mathbb{R}^N$ исследуется величина $\lambda_{V,L}(X)$, равная расстоянию в V от класса функций f_0 , удовлетворяющих уравнению $Lf_0 = 1$ в окрестности (для каждого f_0 – в своей) X , до пространства решений уравнения $Lf = 0$ в окрестностях X . Получены верхние и нижние оценки $\lambda_{V,L}(X)$ при $V = BC^m$ в терминах метрических свойств компактного множества X , позволяющие получать оценки $\lambda_{V,L}(X)$ для широкого класса пространств V .

Библиография: 15 названий.

1. Введение

Данная статья представляет собой непосредственное продолжение работы [1] автора. Кратко напомним необходимые определения и обозначения.

1.1. Пространства V, V_{loc}, BC^m . Пусть V – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, которое содержит $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) = C_0^\infty$ – пространство основных функций в $\mathbb{R}^N$ и само содержится в $(C_0^\infty)^*$ – пространстве обобщенных функций (распределений), причем оба вложения $C_0^\infty \hookrightarrow V$ и $V \hookrightarrow (C_0^\infty)^*$ непрерывны. Предположим, что V наделено структурой топологического C_0^∞ -подмодуля в $(C_0^\infty)^*$. Такие пространства V будем называть *конкретными банаховыми пространствами* (КБП) (см. [1]).

Для компактного множества X в $\mathbb{R}^N$ через $I(X)$ обозначим замыкание в V линейного подмногообразия $\{f \in V \mid \text{supp } f \cap X = \emptyset\}$, где $\text{supp } f$ – носитель распределения f . Пространство $V(X)$ (струй по Уитни) определяется как факторпространство $V/I(X)$. Напомним, что в качестве нормы элемента $f_{(X)} = f + I(X)$ из $V(X)$ берется величина $\|f_{(X)}\|_X = \inf\{\|f + f_0\| \mid f_0 \in I(X)\}$. Далее, положим

$$V_{\text{loc}} = V_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) = \{f \in (C_0^\infty)^* \mid f\varphi \in V \text{ для всех } \varphi \in C_0^\infty\}.$$

В V_{loc} хорошо известным образом вводится топология Фреше.

Прежде чем дать следующее определение, введем несколько обозначений. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ – мультииндекс, причем $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Положим $|\alpha| =$

Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 00-0465, и Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-01-00618 и № 02-05-65350.

$\alpha_1 + \dots + \alpha_N$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!$ и $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}$. Для двух мультииндексов α и β с условием $\beta \leq \alpha$, т.е. $\beta_j \leq \alpha_j$ при всех $j \in \{1, \dots, N\}$, положим $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_N - \beta_N)$.

Определим пространства $BC^m(\mathbb{R}^N)$ для всех $m \geq 0$. Пусть $m = [m] + \mu$, где $[m]$ – целая часть m , а $\mu \in [0, 1)$ – дробная часть m . В случае $\mu = 0$ под $BC^m = BC^m(\mathbb{R}^N)$ будем понимать пространство всех m раз непрерывно дифференцируемых функций $f: \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_m = \|f\|_{BC^m} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\partial^\alpha f(x)|.$$

В случае $\mu \in (0, 1)$ пространство BC^m состоит из всех $f \in BC^{[m]}$ таких, что для каждого α , удовлетворяющего $|\alpha| = [m]$, выполнены условия

$$\|\partial^\alpha f\|_\mu = \sup_{\delta > 0} \{\omega(\partial^\alpha f, \delta) \delta^{-\mu}\} < \infty, \quad \omega(\partial^\alpha f, \delta) \delta^{-\mu} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0,$$

где $\omega(\partial^\alpha f, \delta) = \sup\{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)| \mid x, y \in \mathbb{R}^N, |x - y| < \delta\}$ – модуль непрерывности $\partial^\alpha f$. При $\mu \in (0, 1)$ в качестве нормы в BC^m полагаем

$$\|f\|_m = \|f\|_{BC^m} = \max\{\|f\|_{[m]}, \max_{|\alpha|=[m]} \|\partial^\alpha f\|_\mu\}.$$

Обозначим $C^m = BC^m_{\text{loc}}$ и $C^m(X) = BC^m(X)$ для компактного множества X в $\mathbb{R}^N$.

Введем определение порядка КБП. Скажем, что порядок гладкости КБП V не выше (соответственно не ниже) $m \in [0, +\infty)$, если имеет место непрерывность вложения $C^m \hookrightarrow V_{\text{loc}}$ (соответственно $V_{\text{loc}} \hookrightarrow C^m$). Кратко будем писать $\text{Ord}(V) \leq m$ (соответственно $\text{Ord}(V) \geq m$). Отметим, что задача о нахождении условий, при которых имеет место вложение так называемых специальных симметричных КБП в C^m при $m \in \mathbb{Z}_+$, решается в работе [2] исходя из “конструктивного” определения порядка V . Подробнее о КБП см. в [3] и [4].

1.2. Эллиптический оператор L . Пусть L – однородный эллиптический оператор в частных производных с постоянными комплексными коэффициентами порядка $r \geq 1$ в $\mathbb{R}^N$. Хорошо известно (см., например, [5, теорема 7.1.20]), что для такого оператора L существует фундаментальное решение Φ , имеющее вид

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + P(x) \log |x|, \quad x \neq 0,$$

где Φ_0 – функция класса C^∞ в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, однородная степени $r - N$, а $P(x)$ – полином, равный нулю в случае $r < N$ и однородный степени $r - N$ в противном случае.

Пусть D – открытое множество в $\mathbb{R}^N$. Через $L(D)$ обозначается класс распределенных f в D , для которых $Lf = 0$ в D в смысле теории обобщенных функций. Из леммы Вейля (см. [6, следствие 11.4.13]) следует, что $L(D) \hookrightarrow C^\infty(D)$, т.е. всякое обобщенное решение является классическим. Для компактного множества X в $\mathbb{R}^N$ обозначим через $L(X)$ класс функций f , для каждой из которых найдется окрестность (зависящая от f) $\mathcal{U}_f(X)$ компакта X такая, что $f \in L(\mathcal{U}_f(X))$. Также введем в рассмотрение пространство $L_V(X)$, которое является замыканием в $V(X)$ линейного подмногообразия $L(X)_{(X)} = \{f(X) \mid f \in L(X)\}$.

1.3. VL -вместимость компактов в $\mathbb{R}^N$. Пусть V – КБП, L – эллиптический оператор порядка r . Рассмотрим множество

$$\mathcal{F}_L = \{f \in V \mid Lf = 1 \text{ в } \mathcal{U}_f(X)\}.$$

Ясно, что для любого эллиптического оператора множество $\mathcal{F}_L$ не пусто. Фиксируем какой-либо элемент f_0 из $\mathcal{F}_L$. Теперь VL -вместимостью компакта X назовем величину

$$\lambda_V(X) = \lambda_{V,L}(X) = \inf\{\|f - f_0\| \mid f \in L(X) \cap V\}.$$

Нетрудно показать, что определение $\lambda_V(X)$ не зависит от выбора f_0 из множества $\mathcal{F}_L$.

В работе [1, предложение 6] показано, что при некоторых “естественных” ограничениях на V и L для всякого компакта X в $\mathbb{R}^N$ условие $\lambda_V(X) = 0$ эквивалентно равенству $V(X) = L_V(X)$. Таким образом, для широкого класса пар (V, L) в случае нигде не плотных компактов X классический вопрос о возможности приближения всех элементов из $V(X)$ решениями уравнения $Lf = 0$ в окрестностях X сводится к изучению величины $\lambda_V(X)$.

Для $V = BC^m$ введем специальное обозначение $\lambda_m(X) = \lambda_{BC^m}(X)$ и определим функцию множества

$$\Lambda_m(X) = \inf\left\{\max_{|\alpha|=[m]} \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu \mid f \in L(X) \cap BC^m\right\}.$$

Отметим, что рассмотрение величины $\Lambda_m(X)$ имеет смысл лишь при $m \leq r$ (см. раздел 4).

В разделе 3 (предложение 1) будет показано, что Λ_m и λ_m сравнимы; в частности, они обращаются в нуль одновременно. Однако Λ_m устроена проще и в отличие от λ_m является однородной относительно растяжений в $\mathbb{R}^N$ (см. [7], [8]).

Основной целью настоящей работы является получение верхних и нижних оценок величин $\Lambda_m(X)$ и $\lambda_V(X)$ в терминах метрических свойств компакта X . Отметим, что в связи с общим видом оператора L точные значения постоянных в этих оценках не обсуждаются. Такие константы в оценках для $\Lambda_m(X)$ к настоящему времени получены только для случаев $L = \bar{\partial} = \partial/\partial\bar{z}$ в $\mathbb{C}_z$, $V = BC^0$ (см. [9]) и $L = \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_N^2$ в $\mathbb{R}^N$, $V = BC^m$, $m \in [0, 1]$ (см. [7], [10], [8]).

2. Основные результаты

Введем несколько обозначений, необходимых для формулировки основных результатов. Через $B(a, R)$ (соответственно $\overline{B}(a, R)$) будем обозначать открытый (соответственно замкнутый) шар в $\mathbb{R}^N$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^N$ и радиуса $R > 0$. Пусть E – некоторое множество в $\mathbb{R}^N$. Обозначим через $\overline{E}$ замыкание множества E в $\mathbb{R}^N$, через E^0 – внутренность E , а через ∂E – границу E . Если E – ограниченное борелевское множество, то через $\text{Vol}(E)$ будем обозначать его меру Лебега в $\mathbb{R}^N$. Для компактного множества E через R_E обозначим радиус минимального шара в $\mathbb{R}^N$, содержащего E . В случае, если E – компакт с кусочно-гладкой границей ∂E , под $S(E)$ будем понимать поверхностную $(N - 1)$ -мерную меру Лебега ∂E в $\mathbb{R}^N$.

Далее будем полагать, что L – эллиптический оператор порядка $r \geq 1$, Φ – фундаментальное решение для L , а $m = [m] + \mu$, где $\mu \in [0, 1)$.

2.1. Верхние оценки $\lambda_V(X)$. Сформулируем первый результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Если $r < N$, то найдется $C_1 \in (0, +\infty)$, не зависящая от X , такая, что при $m \in [0, r)$

$$\Lambda_m(X) \leq C_1 [\text{Vol}(X)]^{(r-m)/N}.$$

2. Если $r \geq N$, то предыдущая оценка остается верной при $m \in [r - N + 1, r)$, а при $m \in [0, r - N + 1)$ имеет место оценка

$$\Lambda_m(X) \leq C_2 R_X^{r-N+1-[m]} [\text{Vol}(X)]^{(N-1-\mu)/N},$$

где $C_2 \in (0, +\infty)$ не зависит от X .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что теорема 1 остается верной для произвольных V с условием $\text{Ord}(V) \leq m$ с заменой $\Lambda_m(X)$ на $\lambda_V(X)$ (константы C_1 и C_2 в этом случае будут зависеть от V и R_X). Отметим также, что в случае $N = 1$ верхние оценки величины $\Lambda_m(X)$ не представляют интереса.

При выполнении условий на V и L , приведенных в предложении 6 из [1], справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть V – КБП, причем $\text{Ord}(V) \leq m$ при некотором $m \in [0, r)$. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Тогда, если $\text{Vol}(X) = 0$, то выполнено $V(X) = L_V(X)$.

Таким образом, аналог теоремы Гартогса–Розенталя (см. [11]) справедлив для всех V с условием $\text{Ord}(V) \leq m$ при $m \in [0, r)$. В разделе 4 мы покажем, что последнее утверждение перестает быть верным для $V = BC^m$, $m \geq r$. Там же будет показано, что рассмотрение величин $\lambda_m(X)$ при $m \geq r$ не представляется целесообразным.

2.2. Нижние оценки $\lambda_V(X)$. Предположим, что X – непустой компакт в $\mathbb{R}^N$. При фиксированном $\delta > 0$ через $U_\delta(X)$ будем обозначать множество

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid \text{dist}(x, X) < \delta\}.$$

Через $\text{diam}(X)$ обозначим диаметр X . Для $\mu \geq 0$, $\tau \in (0, 1]$ положим

$$S_\mu^\tau(X, \delta) = \inf_{\{X_p\}} \sum_{p=1}^P (\text{diam}(X_p))^\mu S(X_p),$$

где нижняя грань берется по всем конечным семействам $\{X_p\} = \{X_p\}_{p=1}^P$ компактных множеств с условиями: X_p имеет кусочно-гладкую границу, $X_p \subseteq U_\delta(X)$, $X_p^0 \cap X_l^0 = \emptyset$ при всех $p, l \in \{1, \dots, P\}$, $p \neq l$, и

$$\text{Vol}\left(\bigcup_{p=1}^P X_p\right) = \sum_{p=1}^P \text{Vol}(X_p) \geq \tau \text{Vol}(X).$$

Поскольку $S_\mu^\tau(X, \delta)$ не возрастает при возрастании δ , существует конечный или бесконечный предел

$$S_\mu^\tau(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_\mu^\tau(X, \delta).$$

Очевидно, что если X имеет кусочно-гладкую границу, то $S_0^1(X) = S(X)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mu \in [0, 1)$, $\tau \in (0, 1]$. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, причем $S_\mu^\tau(X) < \infty$ и $\text{Vol}(X) > 0$. Тогда при $m = r - 1 + \mu$ выполнена оценка

$$\Lambda_m(X) \geq C\tau \frac{\text{Vol}(X)}{S_\mu^\tau(X)},$$

где $C \in (0, +\infty)$ зависит лишь от L .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. По-видимому, оценок, аналогичных приведенным в теореме 2, не существует при $m < r - 1$. В разделе 4 мы приведем соответствующий пример для $m = r - 2$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть μ, τ, m и X такие как в теореме 2. Пусть V – КБП с условием $\text{Ord}(V) \geq m$. Тогда

$$\lambda_V(X) \geq C\tau \frac{\text{Vol}(X)}{S_\mu^\tau(X)},$$

причем $C \in (0, +\infty)$ зависит лишь от L, V и R_X .

Следующая теорема позволяет получить оценки величины $\Lambda_m(X)$ при всех $m \in [0, r)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – непустой компакт в $\mathbb{R}^N$, причем $X = \overline{X^0}$. Тогда при $m \in [0, r)$

$$\Lambda_m(X) \geq C \frac{R_X^{-\mu}}{\text{Vol}(X)} \int_X (\text{dist}(x, \partial X))^{r-[m]} dx,$$

где $C \in (0, +\infty)$ не зависит от X .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что теорема 3 остается верной для произвольных V с условием $\text{Ord}(V) \geq m$ с заменой $\Lambda_m(X)$ на $\lambda_V(X)$ (константа C в этом случае будет зависеть от V и R_X).

2.3. Изопериметрические неравенства. Непосредственным следствием результатов, приведенных в 2.1 и 2.2, являются неравенства, связывающие некоторые метрические характеристики компактов в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Объединяя оценки величины $\Lambda_m(X)$, приведенные в теоремах 1 и 2, получаем обобщение хорошо известного изопериметрического неравенства.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mu \in [0, 1)$, $\tau \in (0, 1]$. Пусть X – компакт в $\mathbb{R}^N$, причем $S_\mu^\tau(X) < \infty$ и $\text{Vol}(X) > 0$. Тогда

$$S_\mu^\tau(X) \geq C\tau [\text{Vol}(X)]^{(N-1+\mu)/N},$$

где $C \in (0, +\infty)$ не зависит от X .

Далее, из теорем 1 и 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть X – непустой компакт в $\mathbb{R}^N$, причем $X = \overline{X^0}$. Пусть $r < N$ и $m \in [0, r)$. Тогда

$$\int_X (\text{dist}(x, \partial X))^{r-[m]} dx \leq CR_X^\mu [\text{Vol}(X)]^{(r-m+N)/N},$$

где $C \in (0, +\infty)$ не зависит от X .

3. Доказательства основных результатов

Везде далее через $A, A_1, A_2, \dots$ будем обозначать положительные величины, которые могут зависеть лишь от оператора L , числа m и размерности N . Докажем предложение, устанавливающее связь между $\Lambda_m(X)$ и $\lambda_m(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^N$, $m \in [0, r)$. Тогда найдется $C \in (0, +\infty)$, не зависящая от X , такая, что

$$\Lambda_m(X) \leq \lambda_m(X) \leq C \max\{1, R_X^m\} \Lambda_m(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство очевидно. Докажем второе неравенство. Предположим, что $1 \leq [m] \leq r - 1$ (иначе оценка тривиальна). Фиксируем $\varepsilon > 0$ и некоторый шар $B = B(a, R)$, содержащий X . По определению $\Lambda_m(X)$ найдется $f \in L(X) \cap BC^m$ с условиями

$$\max_{|\alpha|=[m]} \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu \leq 2(\Lambda_m(X) + \varepsilon)$$

и $\partial^\beta(f - f_0)(a) = 0$ для всех мультииндексов β , удовлетворяющих оценке $0 \leq |\beta| \leq [m]$. Также можно считать, что выполнено неравенство

$$\|f - f_0\|_m \leq \|f - f_0\|_{m, \overline{B}}.$$

Из известной теоремы о среднем вытекает, что для каждого β с условием $0 \leq |\beta| \leq [m] - 1$ и для $x_1, x_2 \in \overline{B}$ имеет место оценка

$$|\partial^\beta(f - f_0)(x_1) - \partial^\beta(f - f_0)(x_2)| \leq A_1 \max_{|\alpha|=|\beta|+1} |\partial^\alpha(f - f_0)(x)| |x_1 - x_2|,$$

где x принадлежит отрезку, соединяющему точки x_1 и x_2 в $\mathbb{R}^N$. Далее, при всех α , удовлетворяющих оценке $0 \leq |\alpha| \leq [m]$, имеем

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(f - f_0)(x)| &= |\partial^\alpha(f - f_0)(x) - \partial^\alpha(f - f_0)(a)| \\ &\leq \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu |x - a|^\mu \leq \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu (2R)^\mu. \end{aligned} \quad (1)$$

Следовательно, из двух предыдущих неравенств находим оценку

$$|\partial^\beta(f - f_0)(x_1) - \partial^\beta(f - f_0)(x_2)| \leq A_2 R^\mu \max_{|\alpha|=|\beta|+1} \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu |x_1 - x_2|.$$

Полагая в последнем неравенстве $x_2 = a$, нетрудно получить, что

$$\|\partial^\beta(f - f_0)\|_0 \leq A_3 R^{1+\mu} \max_{|\alpha|=|\beta|+1} \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu. \quad (2)$$

С другой стороны, из того же неравенства, вытекает

$$\|\partial^\beta(f - f_0)\|_\mu \leq A_4 R \max_{|\alpha|=|\beta|+1} \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu. \quad (3)$$

Окончательные оценки для $\|\partial^\beta(f - f_0)\|_0$ получаются $([m] - |\beta| - 1)$ -кратным применением неравенства (3) к правой части (2). Следовательно, для β , удовлетворяющих оценке $0 \leq |\beta| \leq [m] - 1$, имеем

$$\|\partial^\beta(f - f_0)\|_0 \leq A_5 R^{m-|\beta|} \max_{|\alpha|=[m]} \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu. \quad (4)$$

При $|\alpha| = |\beta| = [m]$ из (1) следует, что

$$\|\partial^\beta(f - f_0)\|_0 \leq A_6 R^\mu \max_{|\alpha|=[m]} \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu, \quad (5)$$

т.е. неравенство (4) остается справедливым и в этом случае. Тогда

$$\begin{aligned} \|f - f_0\|_m &= \max \left\{ \max_{|\beta| \leq [m]} \|\partial^\beta(f - f_0)\|_0, \max_{|\alpha|=[m]} \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu \right\} \\ &\leq A_7 \max\{1, R^m\} \max_{|\alpha|=[m]} \|\partial^\alpha(f - f_0)\|_\mu \leq A_8 \max\{1, R^m\} (\Lambda_m(X) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Остается устремить ε к 0, а R — к R_X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как $\Lambda_m(X_1) \leq \Lambda_m(X_2)$ при $X_1 \subseteq X_2$, то достаточно установить справедливость теоремы 1 для случая, когда X — компактное множество с гладкой границей.

Пусть сначала $r < N$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию $g_\varepsilon(x) = (\Phi * I_{(X_\varepsilon)})(x)$, где $I_{(X_\varepsilon)}$ — индикатор компакта

$$X_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \text{dist}(x, X) \leq \varepsilon\},$$

а $*$ — операция свертки. Хорошо известно, что в этом случае $g_\varepsilon \in BC^m$ для всех $m \in [0, r)$ и $Lg_\varepsilon = 1$ на X_ε ; следовательно, $L(g_\varepsilon - f_0) = 0$ на X_ε . Поэтому

$$\Lambda_m(X) \leq \max_{|\alpha|=[m]} \|\partial^\alpha g_\varepsilon\|_\mu.$$

По предположению $r < N$, значит, $\partial^\alpha \Phi$, при любом α с условием $0 \leq |\alpha| \leq r - 1$ (далее рассматриваются лишь такие α) — однородная функция степени $r - N - |\alpha|$. Следовательно, мы можем положить

$$\partial^\alpha \Phi(x) = \phi_\alpha \left(\frac{x}{|x|} \right) |x|^{r-N-|\alpha|},$$

где для всех α через ϕ_α обозначена функция класса C^∞ в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Для $x \neq 0$ положим $e_x = x/|x|$, и пусть

$$\max\{|\phi_\alpha(e_x)| \mid e_x \in \partial B(0, 1), 0 \leq |\alpha| \leq r - 1\} = A_1.$$

По определению свертки для $x \in \mathbb{R}^N$

$$\partial^\alpha g_\varepsilon(x) = \int_{X_\varepsilon} \partial^\alpha \Phi(x - y) dy = \int_{X_\varepsilon} \frac{\phi_\alpha(e_{x-y})}{|x - y|^{|\alpha|+N-r}} dy.$$

Тогда

$$|\partial^\alpha g_\varepsilon(x)| \leq A_1 \int_{X_\varepsilon} |x-y|^{r-N-|\alpha|} dy \leq A_1 \int_{\overline{B}(x, R_\varepsilon)} |x-y|^{r-N-|\alpha|} dy,$$

где шар $B(x, R_\varepsilon)$ выбран так, что $\text{Vol}(\overline{B}(x, R_\varepsilon)) = \text{Vol}(X_\varepsilon)$. Следовательно, вычисляя последний интеграл в сферических координатах, в случае $\mu = 0$ имеем

$$\|\partial^\alpha g_\varepsilon\|_0 \leq A_2 R_\varepsilon^{r-|\alpha|} \leq A_3 [\text{Vol}(X_\varepsilon)]^{(r-|\alpha|)/N}.$$

Теперь получим оценку величины $\|\partial^\alpha g_\varepsilon\|_\mu$ для $\mu \in (0, 1)$. Возьмем $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$, и пусть $|x_1 - x_2| = 2\delta > 0$. Положим $\omega_\mu^\alpha(\delta) = \omega(\partial^\alpha g_\varepsilon, \delta)\delta^{-\mu}$. Тогда

$$\omega_\mu^\alpha(\delta) = (2\delta)^{-\mu} \int_{X_\varepsilon} \left| \frac{\phi_\alpha(e_{x_1-y})}{|x_1-y|^{|\alpha|+N-r}} - \frac{\phi_\alpha(e_{x_2-y})}{|x_2-y|^{|\alpha|+N-r}} \right| dy.$$

Рассмотрим отдельно случаи $\delta \leq t$ и $\delta \geq t$. Параметр t подберем подходящим образом позднее. При $\delta \geq t$ возьмем шары $B_{i,\varepsilon} = B(x_i, R_\varepsilon)$ с условием $\text{Vol}(\overline{B}_{i,\varepsilon}) = \text{Vol}(X_\varepsilon)$, $i \in \{1, 2\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_\mu^\alpha(\delta) &\leq A_1 (2\delta)^{-\mu} \left(\int_{\overline{B}_{1,\varepsilon}} |x_1-y|^{r-N-|\alpha|} dy + \int_{\overline{B}_{2,\varepsilon}} |x_2-y|^{r-N-|\alpha|} dy \right) \\ &\leq \delta^{-\mu} A_4 R_\varepsilon^{r-|\alpha|} \leq t^{-\mu} A_5 [\text{Vol}(X_\varepsilon)]^{(r-|\alpha|)/N}. \end{aligned}$$

При $\delta \leq t$ положим

$$\begin{aligned} D_1 &= \overline{B}(x_1, \delta), \quad D_2 = \overline{B}(x_2, \delta), \\ D_3 &= \overline{B}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, 2\delta\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^2 D_j\right), \quad D_4 = X_\varepsilon \setminus \left(\bigcup_{j=1}^3 D_j\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\omega_\mu^\alpha(\delta) \leq (2\delta)^{-\mu} \sum_{j=1}^4 I_j, \quad (6)$$

где при $j \in \{1, \dots, 4\}$

$$I_j = \int_{D_j} \left| \frac{\phi_\alpha(e_{x_1-y})}{|x_1-y|^{|\alpha|+N-r}} - \frac{\phi_\alpha(e_{x_2-y})}{|x_2-y|^{|\alpha|+N-r}} \right| dy.$$

Оценим первый из интегралов в (6) (второй и третий оцениваются аналогично). Имеем

$$I_1 \leq A_1 \left(\int_{D_1} |x_1-y|^{r-N-|\alpha|} dy + \int_{D_1} |x_2-y|^{r-N-|\alpha|} dy \right) \leq A_6 \delta^{r-|\alpha|}.$$

Получим оценку для последнего слагаемого в (6). По теореме о среднем

$$\left| \frac{\phi_\alpha(e_{x_1-y})}{|x_1-y|^{|\alpha|+N-r}} - \frac{\phi_\alpha(e_{x_2-y})}{|x_2-y|^{|\alpha|+N-r}} \right| \leq A_7 \delta |x_1 - x_2|^{r-N-|\alpha|-1},$$

где x_y лежит на отрезке, соединяющем x_1 и x_2 , а A_7 не зависит от y , x_1 и x_2 . Легко видеть, что при $y \in D_4$ найдется A_8 , для которой

$$|x_y - y|^{r-N-|\alpha|-1} \leq A_8(|x_1 - y|^{r-N-|\alpha|-1} + |x_2 - y|^{r-N-|\alpha|-1}).$$

Тогда

$$I_4 \leq A_9 \delta \left(\int_{D_4} |x_1 - y|^{r-N-|\alpha|-1} dy + \int_{D_4} |x_2 - y|^{r-N-|\alpha|-1} dy \right).$$

Возьмем теперь шары $B_{i,\varepsilon} = B(x_i, R_\varepsilon)$ так, чтобы

$$\text{Vol}(\overline{B}_{i,\varepsilon}) = \text{Vol}(X_\varepsilon) + \text{Vol}(D_i), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Тогда для таких i

$$\begin{aligned} \int_{D_4} |x_i - y|^{r-N-|\alpha|-1} dy &\leq \int_{\overline{B}_{i,\varepsilon}} |x_i - y|^{r-N-|\alpha|-1} dy \\ &\leq A_{10} \cdot \begin{cases} \ln \frac{R_\varepsilon}{\delta} & \text{при } |\alpha| = r - 1, \\ R_\varepsilon^{r-|\alpha|-1} - \delta^{r-|\alpha|-1} & \text{при } 0 \leq |\alpha| < r - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega_\mu^\alpha(\delta) \leq \begin{cases} \delta^{1-\mu} \left(A_{11} + A_{12} \ln \frac{R_\varepsilon}{\delta} \right) & \text{при } |\alpha| = r - 1, \\ \delta^{-\mu} (A_{13} \delta^{r-|\alpha|} + A_{14} \delta R_\varepsilon^{r-|\alpha|-1}) & \text{при } 0 \leq |\alpha| < r - 1, \end{cases}$$

причем из определения $B_{i,\varepsilon}$ получаем

$$R_\varepsilon = \left[\frac{\text{Vol}(X_\varepsilon)}{v_N} + \delta^N \right]^{1/N},$$

где $v_N = \text{Vol}(\overline{B}(0, 1))$ в $\mathbb{R}^N$. В случае $|\alpha| = r - 1$ в качестве t возьмем $[\text{Vol}(X_\varepsilon)]^{1/N}$. Тогда несложно показать, что

$$\max_{0 \leq \delta \leq t} \delta^{1-\mu} \left(A_{11} + A_{12} \ln \left(\frac{R_\varepsilon}{\delta} \right) \right)$$

будет достигаться при $\delta = A_{15}[\text{Vol}(X_\varepsilon)]^{1/N}$, и, объединяя оценки $\omega_\mu^\alpha(\delta)$ при $\delta \leq t$ и $\delta \geq t$, в этом случае получаем

$$\omega_\mu^\alpha(\delta) \leq A_{16}[\text{Vol}(X_\varepsilon)]^{(1-\mu)/N}.$$

При $0 \leq |\alpha| < r - 1$

$$\omega_\mu^\alpha(\delta) \leq (A_{13} t^{r-|\alpha|-\mu} + A_{14} t^{1-\mu} R_\varepsilon^{r-|\alpha|-1}),$$

и для получения t , при котором общие оценки будут оптимальны, необходимо приравнять правые части оценок при $\delta \leq t$ и $\delta \geq t$. Легко видеть, что тогда

$$t = A_{17}[\text{Vol}(X_\varepsilon)]^{1/N}.$$

Следовательно,

$$\omega_\mu^\alpha(\delta) \leq A_{18}[\text{Vol}(X_\varepsilon)]^{(r-|\alpha|-\mu)/N}.$$

Теперь заметим, что оценки величины $\|\partial^\alpha g_\varepsilon\|_\mu$, полученные в случаях $\mu = 0$ и $\mu \in (0, 1)$, можно объединить в одну

$$\|\partial^\alpha g_\varepsilon\|_\mu \leq A_{19}[\text{Vol}(X_\varepsilon)]^{(r-|\alpha|-\mu)/N}.$$

Полагая $|\alpha| = [m]$ и устремляя ε к нулю, окончательно получаем

$$\Lambda_m(X) \leq A_{19}[\text{Vol}(X)]^{(r-m)/N}.$$

Пусть теперь $r \geq N$. В этом случае функция $\partial^\alpha \Phi$ однородна при всех α с условием $|\alpha| \geq r - N + 1$, и поэтому приведенное выше доказательство проходит при $m \in [r - N + 1, r)$. При $m \in [0, r - N + 1)$ из (3) следует, что для $|\alpha| = [m]$ и некоторого шара $B = B(a, R)$, содержащего X , выполнено неравенство

$$\|\partial^\alpha g_\varepsilon\|_{\mu, \overline{B}} \leq A_{20} R^{r-N+1-[m]} \max_{|\beta|=r-N+1} \|\partial^\beta g_\varepsilon\|_\mu.$$

Следовательно, устремляя ε к нулю, а R к R_X , имеем

$$\Lambda_m(X) \leq A_{21} R_X^{r-N+1-[m]} [\text{Vol}(X)]^{(N-1-\mu)/N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\mu \in (0, 1)$, $\tau \in (0, 1]$ и $m = r - 1 + \mu$. Представим эллиптический оператор L в виде

$$L = \sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial x_j} L_j,$$

где L_j при $j \in \{1, \dots, J\}$ – некоторые дифференциальные операторы порядка $r - 1$. Ясно, что такое разложение для L не единственно и определяется набором $\{L_j\}_{j \in \{1, \dots, J\}}$. Фиксируем некоторое такое разложение и обозначим его через (J) . Для дальнейших рассуждений нам потребуется величина

$$\Lambda_{m, J}(X) = \inf \left\{ \max_{j \in \{1, \dots, J\}} \|L_j(f - f_0)\|_\mu \mid f \in L(X) \cap BC^m \right\},$$

для которой, очевидно, справедлива оценка

$$\Lambda_{m, J}(X) \leq A_1 \Lambda_m(X), \quad (7)$$

где A_1 зависит лишь от (J) .

По определению $\Lambda_{m,J}(X)$ для произвольного, но фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется $f \in L(X) \cap BC^m$ с условием

$$\max_{j \in \{1, \dots, J\}} \|L_j(f - f_0)\|_\mu \leq \Lambda_{m,J}(X) + \varepsilon.$$

Далее, возьмем $\delta > 0$ так, чтобы $Lf_0 = 1$ и $Lf = 0$ в окрестности $U_\delta(X)$. Фиксируем произвольное $\rho > 0$. По определению величины $S_\mu^\tau(X, \delta)$ найдется конечное семейство $\{X_p\}_{p=1}^P$ компактных подмножеств в X с условиями: X_p имеет кусочно-гладкую границу, $X_p \subseteq U_\delta(X)$, $X_p^0 \cap X_l^0 = \emptyset$ при всех $p, l \in \{1, \dots, P\}$, $p \neq l$, и

$$\sum_{p=1}^P \text{Vol}(X_p) \geq \tau \text{Vol}(X) > 0,$$

причем

$$\sum_{p=1}^P (\text{diam}(X_p))^\mu S(X_p) \leq S_\mu^\tau(X, \delta) + \rho.$$

Обозначим через

$$\nabla J(f - f_0) = (L_1(f - f_0), \dots, L_J(f - f_0), 0, \dots, 0)$$

вектор в $\mathbb{R}^N$, построенный по (J) . В силу предположения о кусочной гладкости всех ∂X_p по теореме Гаусса–Остроградского

$$\begin{aligned} I &= \sum_{p=1}^P \int_{\partial X_p} (\nabla J(f - f_0), \vec{n}) d\sigma = \sum_{p=1}^P \int_{X_p} \sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial x_j} L_j(f - f_0)(x) dx \\ &= \sum_{p=1}^P \int_{X_p} L(f - f_0)(x) dx = - \sum_{p=1}^P \text{Vol}(X_p), \end{aligned}$$

где для всех $p \in \{1, \dots, P\}$ вектор $\vec{n} = \vec{n}(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$ есть внешняя единичная нормаль к ∂X_p в точке x , а $d\sigma = d\sigma(x)$ – элемент поверхностной меры Лебега на ∂X_p . Следовательно, $|I| \geq \tau \text{Vol}(X)$. С другой стороны,

$$|I| \leq \sum_{p=1}^P \left| \int_{\partial X_p} (\nabla J(f - f_0), \vec{n}) d\sigma \right| = \sum_{p=1}^P I_p.$$

Для всех $p \in \{1, \dots, P\}$ выберем некоторые $x_p \in X_p$. Тогда

$$\begin{aligned} I_p &= \left| \int_{\partial X_p} (\nabla J(f - f_0), \vec{n}) d\sigma \right| = \left| \int_{\partial X_p} \sum_{j=1}^J (L_j(f - f_0)(x) - L_j(f - f_0)(x_p)) n_j(x) d\sigma \right| \\ &\leq \int_{\partial X_p} \sum_{j=1}^J |L_j(f - f_0)(x) - L_j(f - f_0)(x_p)| d\sigma \\ &\leq 2N \max_{j \in \{1, \dots, J\}} \|L_j(f - f_0)\|_\mu \int_{\partial X_p} |x - x_p|^\mu d\sigma \\ &\leq 2N \max_{j \in \{1, \dots, J\}} \|L_j(f - f_0)\|_\mu (\text{diam}(X_p))^\mu S(X_p). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |I| &\leq 2N \max_{j \in \{1, \dots, J\}} \|L_j(f - f_0)\|_\mu \sum_{p=1}^P (\text{diam}(X_p))^\mu S(X_p) \\ &\leq 2N(\Lambda_{m,J}(X) + \varepsilon)(S_\mu^T(X, \delta) + \rho). \end{aligned}$$

Устремляя ε , δ и ρ к нулю, получаем оценку

$$\tau \text{Vol}(X) \leq 2N \Lambda_{m,J}(X) S_\mu^T(X).$$

Окончательно, учитывая оценку (7), находим

$$\Lambda_m(X) \geq \frac{\tau}{2NA_1} \frac{\text{Vol}(X)}{S_\mu^T(X)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть сначала $m \in \{0, \dots, r-1\}$. Введем в рассмотрение функцию

$$d(x) = d_X(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial X) & \text{при } x \in X, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R}^N \setminus X. \end{cases}$$

По предположению $X^0 \neq \emptyset$, следовательно, $d(x)$ есть функция, не равная тождественно нулю. Хорошо известно (см., например, [12, гл. 6, § 2, теорема 2]), что для компакта X найдется функция $D \in BC^0 \cap C^\infty(X^0)$ с условиями

$$A_1 d(x) \leq D(x) \leq A_2 d(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N$$

и для всех α

$$|\partial^\alpha D(x)| \leq A_\alpha^{(1)} (d(x))^{1-|\alpha|} \quad \text{при } x \in X^0,$$

где все $A_\alpha^{(1)} \in (0, +\infty)$ не зависят от X . Индукцией по k элементарно доказывается, что для всех α , удовлетворяющих оценке $|\alpha| \leq k$, имеет место неравенство

$$|\partial^\alpha (D(x))^k| \leq A_\alpha^{(2)} (d(x))^{k-|\alpha|} \quad \text{при } x \in X^0, \quad (8)$$

где все $A_\alpha^{(2)} \in (0, +\infty)$ не зависят от X .

Далее, фиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $f \in L(X) \cap BC^m$ с условием

$$\max_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha (f - f_0)\|_0 \leq \Lambda_m(X) + \varepsilon.$$

Тогда, если $L = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \partial^\alpha$, где $a_\alpha \in \mathbb{C}$, то

$$\begin{aligned} I &= \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \int_X \partial^\alpha (f_0 - f)(x) (D(x))^{r-m} dx = \int_X L(f_0 - f)(x) (D(x))^{r-m} dx \\ &= \int_X (D(x))^{r-m} dx \geq A_3 \int_X (d(x))^{r-m} dx > 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, для каждого α , удовлетворяющего $|\alpha| = r$, воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_X \partial^\alpha (f_0 - f)(x) (D(x))^{r-m} dx = (-1)^{|\beta|} \int_X \partial^{\alpha-\beta} (f_0 - f)(x) \partial^\beta (D(x))^{r-m} dx,$$

где $\beta = \beta(\alpha)$ – некоторый мультииндекс с условиями $\beta \leq \alpha$ и $|\beta| = r - m$. Следовательно, учитывая оценку (8) и равенство $|\alpha - \beta| = m$, имеем

$$\begin{aligned} |I| &\leq \sum_{|\alpha|=r} |a_\alpha| \int_X |\partial^{\alpha-\beta} (f_0 - f)(x)| |\partial^\beta (D(x))^{r-m}| dx \\ &\leq \sum_{|\alpha|=r} |a_\alpha| (\Lambda_m(X) + \varepsilon) A_\beta^{(2)} \int_X dx \leq A_4 \text{Vol}(X) (\Lambda_m(X) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Устремляя ε к нулю, окончательно получаем

$$\Lambda_m(X) \geq \frac{A_5}{\text{Vol}(X)} \int_X (d(x))^{r-m} dx.$$

При нецелых $m \in (0, r)$ воспользуемся неравенством (5) и оценками $\Lambda_{[m]}(X)$. Тогда

$$\Lambda_m(X) \geq \frac{A_6 R_X^{-\mu}}{\text{Vol}(X)} \int_X (d(x))^{r-[m]} dx.$$

4. Некоторые примеры

Рассмотрим случай $m = r$. Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X – непустой компакт в $\mathbb{R}^N$. Тогда найдется $C \in (0, +\infty)$, зависящая лишь от L , такая, что

$$\Lambda_r(X) \geq C > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L(X) \cap BC^r$. Поскольку $L = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \partial^\alpha$, имеем

$$\|L(f - f_0)\|_{0,X} = \left\| \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha \partial^\alpha (f - f_0) \right\|_{0,X} \leq A_1 \max_{|\alpha|=r} \|\partial^\alpha (f - f_0)\|_{0,X}.$$

Так как $L(f - f_0) = 1$ на X , то

$$\max_{|\alpha|=r} \|\partial^\alpha (f - f_0)\|_{0,X} \geq A_2.$$

Окончательно, из определения Λ_r следует оценка

$$\Lambda_r(X) \geq A_2 > 0.$$

Следовательно, при $m \geq r$ из очевидного неравенства $\lambda_m(X) \geq \Lambda_r(X)$, используя предложение 2, можно сделать вывод, что величина $\lambda_m(X)$ строго положительна для всех непустых компактов X в $\mathbb{R}^N$. Поэтому в случае таких X и m из [1, предложение 6] вытекает, что $C^m(X) \neq L_{BC^m}(X)$. Последнее согласуется с тем, что в случае $m \geq r$ могут быть приближены лишь те функции из $C^m(X)$, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям (см. [13, с. 158]).

Теперь рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 1. Пусть $L = \bar{\partial}^2$ в $\mathbb{C}$, $V = BC^0$. Покажем, что найдется компакт X , для которого $S(X) < \infty$, $\text{Vol}(X) > 0$, однако $\lambda_0(X) = 0$. Пример такого компакта дает хорошо известная конструкция “швейцарского сыра”, приведенная, например, в [14]. Напомним, что “швейцарский сыр” есть компакт X , возникающий из замкнутого единичного круга $\bar{B}(0, 1)$ в результате удаления последовательности открытых кругов $\{B_j = B(a_j, r_j)\}_{j=0}^\infty$, замыкания которых попарно не пересекаются, причем $X = \bar{B}(0, 1) \setminus (\bigcup_{j=0}^\infty B_j)$ не имеет внутренних точек. Возьмем такой X , и пусть дополнительно выполнены два условия:

$$\sum_{j=0}^\infty r_j < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^\infty r_j^2 < 1.$$

Тогда, очевидно, $S(X) < \infty$ и $\text{Vol}(X) > 0$, причем X является нигде не плотным в $\mathbb{C}$. С другой стороны, используя результат [15], имеем $\lambda_0(X) = 0$.

ПРИМЕР 2. Здесь мы получим оценки снизу величины $\lambda_V(X)$ в случаях, когда V – пространство Соболева. Напомним, что для $q \in \mathbb{Z}_+$ и $1 < p < \infty$ пространство Соболева $W_p^q = W_p^q(\mathbb{R}^N)$ определяется как класс всех измеримых по мере Лебега в $\mathbb{R}^N$ функций f , для которых

$$\|f\|_{L_p} = \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} < \infty, \quad \|\partial^\alpha f\|_{L_p} < \infty \quad \text{при всех } |\alpha| \leq q,$$

где производные понимаются в смысле теории распределений. Норму $f \in W_p^q$ определим как $\|f\|_{W_p^q} = \max_{|\alpha| \leq q} \|\partial^\alpha f\|_{L_p}$. Хорошо известно, что $W_p^q \hookrightarrow C^m$ для всех $q \in \mathbb{Z}_+$ и $m \geq 0$, удовлетворяющих неравенству $q > N/p + m$.

Пусть $\tau \in (0, 1]$, $\mu \in [0, 1)$. Пусть X – компакт, удовлетворяющий условиям, приведенным в следствии 2. Тогда найдется $C_1 \in (0, +\infty)$ такая, что при $q > N/p + r - 1 + \mu$ выполнено

$$\lambda_{W_p^q}(X) \geq C_1 \tau \frac{\text{Vol}(X)}{S_\mu^\tau(X)}.$$

В случае $m \in [0, r)$ и компакта X , удовлетворяющего условиям теоремы 3, найдется $C_2 \in (0, +\infty)$ такая, что при $q > N/p + m$ выполнено

$$\lambda_{W_p^q}(X) \geq C_2 \frac{R_X^{-\mu}}{\text{Vol}(X)} \int_X (\text{dist}(x, \partial X))^{r-[m]} dx.$$

Можно показать, что C_1 и C_2 зависят от p, q, N и оператора L .

Автор выражает глубокую признательность П. В. Парамонову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воронцов А. М. О совместных приближениях в банаховых пространствах обобщенных функций // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 2. С. 179–194.
- [2] O'Farrell A. G. The order of a symmetric concrete space // Proc. Roy. Irish Acad. 1988. V. 88A. № 1. P. 39–48.
- [3] O'Farrell A. G. T -invariance // Proc. Roy. Irish Acad. 1992. V. 92A. № 2. P. 185–203.
- [4] Бовен А., Парамонов П. В. Аппроксимация мероморфными и целыми решениями эллиптических уравнений в банаховых пространствах распределений // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 4. С. 481–502.
- [5] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.
- [6] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. М.: Мир, 1986.
- [7] Готье П. М., Парамонов П. В. Аппроксимация гармоническими функциями в C^1 -норме и гармонический C^1 -поперечник компактных множеств в $\mathbb{R}^n$ // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 4. С. 21–30.
- [8] Горохов Ю. А. Аппроксимация гармоническими функциями в C^m -норме и гармоническая C^m -вместимость компактных множеств в $\mathbb{R}^n$ // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 3. С. 372–382.
- [9] Gamelin T., Khavinson D. The isoperimetric inequality and rational approximation // Amer. Math. Month. 1989. V. 96. № 1. P. 18–30.
- [10] Khavinson D. On uniform approximation by harmonic functions // Michigan Math. J. 1987. V. 34. P. 465–473.
- [11] Weinstock B. M. Uniform approximation by solutions of elliptic equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 41. № 2. P. 513–517.
- [12] Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [13] Verdera J. C^m -approximation by solutions of elliptic equations, and Calderon–Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55. № 1. P. 157–187.
- [14] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
- [15] Wang J. L. A localization operator for rational modules // Rocky Mountain J. Math. 1989. V. 19. P. 999–1002.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28.04.2003