Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, Случайные блуждания в случайных средах на метрических группах, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 129–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm820>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:39:20

УДК 519.214

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ

У. А. Розиков

Рассматриваются случайные блуждания в случайной среде на счетных группах с метрикой, когда размеры скачков блуждающей частицы ограничены. Вероятности перехода такого случайного блуждания из точки $x \in G$ (где G – рассматриваемая группа) определяется вектором $p(x) \in \mathbb{R}^{|W|}$ (где $W \subset G$ – фиксировано и $|W| < \infty$). Предполагается, что совокупность $\{p(x), x \in G\}$ есть совокупность независимых одинаково распределенных случайных векторов. Для такого случайного блуждания найдено достаточное условие невозвратности. В качестве примера рассмотрены группы Z^d , свободные группы и группа свободного произведения конечного числа циклических групп второго порядка.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Случайные блуждания в случайных средах возникли в различных задачах кристаллографии [1], физики металлов [2], биофизики [3]. За последние два десятилетия теория случайных блужданий в случайных средах превратилась в один из наиболее бурно развивающихся разделов теории вероятностей. Простейшее одномерное случайное блуждание в случайных средах, когда движущаяся частица за единицу времени может переместиться только на один шаг вправо или влево, было рассмотрено в работе Ф. Соломона [4]. Он выписал критерий возвратности для такой модели случайного блуждания. Я. Г. Синаем [5] было доказано, что при условии возвратности предельное поведение случайного блуждания $\{x(t), t = 0, 1, 2, \dots\}$ отлично от классического, и, в частности, случайная величина $x(t) \ln^{-2} t$ имеет предельное распределение при $t \rightarrow +\infty$. При тех же условиях П. Дехевелс и П. Ревез [6] исследовали асимптотические свойства этого процесса с вероятностью 1. Более сложные случайные блуждания в случайных средах на $\mathbb{Z}$, когда размеры скачков блуждающей частицы ограничены, были изучены в работах Э. Келя [7], А. В. Летчикова [8], [9]. В работах Синая, Аншелевича, Ханина [10] было рассмотрено случайное блуждание в симметрических случайных средах на Z^d . Лоулер [11] доказал центральную предельную теорему (ц.п.т.) для таких блужданий при некоторых условиях на среды. А. Аструаскас, Д. Сургайлис [12] доказали ц.п.т. в случае мартингальности среды на Z^d .

В настоящей работе мы изучаем предельное поведение траектории случайного блуждания в случайной среде на счетных метрических группах. Пункт 2 содержит основные понятия и постановку задачи. В пункте 3 доказывается одна теорема (теорема 3) и в

пункте 4 изучаются различные случайные блуждания в случайных средах; для каждого случая проверяются условия теоремы 3.

Автор выражает благодарность Н. Н. Ганиходжаеву за полезные замечания и внимание к работе.

2. Основные понятия и постановка задачи. Пусть $(G, \circ, \rho)$ – счетная, метрическая группа с бинарной операцией $\circ$, где ρ – некоторая метрика.

Пусть $x_0 \in G$ фиксированный элемент и $W(x_0)$ – фиксированное, конечное подмножество G такое, что $x_0 \in W(x_0)$.

Предположим, что $\theta_x: G \rightarrow G$ определено следующим образом: $\theta_x y = x \circ y$. Обозначим $W(x) = \theta_x W(x_0)$.

Пусть H множество векторов $p = (p_u, u \in W(x_0)) \in \mathbb{R}^{|W(x_0)|}$ таких, что для всех $u \in W(x_0)$, $p_u \geq 0$, $\sum_{u \in W(x_0)} p_u = 1$. Обозначим через B множество борелевских подмножеств H . Положим, что на H задано некоторое распределение вероятностей μ .

Пространством случайных сред (Ω, F_Ω, P) назовем прямое произведение: $(\Omega, F_\Omega, P) = \prod_{x \in G} (H, B, \mu)$, а *средой* – A -элемент множества Ω . Таким образом, $A = \{p(x) \in H, x \in G\}$ есть совокупность H -значных векторов.

Пусть $A = \{p(x) \in H, x \in G\}$ – фиксировано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Случайным блужданием в фиксированной среде A с начальным состоянием x_0* называется однородная по времени цепь Маркова с временным пространством $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, фазовым пространством G и матрицей переходных вероятностей $M = \{m_{xy}, x, y \in G\}$, элементы которой определяются по формуле:

$$m_{xy} = \begin{cases} p_y(x), & \text{если } y \in W(x), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\{p(x) = (p_y(x), y \in W(x)), x \in G\}$.

Обозначим через $X = G^T$ множество всевозможных траекторий случайного блуждания в среде A . Пусть F_X – σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами X .

Обозначим через P_{A, x_0} вероятность в (X, F_X) , соответствующую случайному блужданию в среде A , начинающемуся в точке x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Случайным блужданием в случайной среде* будем называть случайный процесс $X(t) = X(t, \omega)$, $t \in T$, определенный на измеримом пространстве $(\Omega_1, F) = (X \times \Omega, F_X \times F_\Omega)$ равенством

$$X(t, \omega) = x_t, \quad \omega = (x, A) \in \Omega_1,$$

где $x = (x_t, t \in T) \in X$, а вероятность P_{x_0} на (Ω_1, F) однозначно определяется своими значениями на множествах $B = B_1 \times B_2$, $B_1 \in F_X$, $B_2 \in F_\Omega$, равными

$$P_{x_0}(B) = \int_{B_2} P_{A, x_0}(B_1) P(dA).$$

В данной работе мы изучаем предельное поведение траектории такого случайного блуждания в случайных средах. Эта задача сложная и полно решается только относительно частных случаев $(G, \circ, \rho)$.

В п. 3 мы выделим класс сред (периодических), для которых эта задача решается для достаточно широких классов $(G, \circ, \rho)$.

3. Предельное поведение траектории в периодической случайной среде. Изучение рассматриваемой проблемы для некоторых частных случаев (относительно $(G, \circ, \rho)$ и случайной среды) мы приведем к изучению случайного блуждания $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$ в случайной среде на $\mathbb{Z}$, в котором за единицу времени частица может переместиться не более, чем на $b \in \mathbb{N}$ шагов вправо, и не более, чем на $a \in \mathbb{N}$ шагов влево. Вероятности перехода такого блуждания из точки $x \in \mathbb{Z}$ определяются вектором $p(x) \in \mathbb{R}^{a+b+1}$. Предполагается, что последовательность $\{p(x), x \in \mathbb{Z}\}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов. Такая модель уже рассматривалась в печати. Э. Кей[7] выписал для нее критерий возвратности. В статье [9] исследовано асимптотическое поведение возвратного случайного блуждания в случайной среде в смысле сходимостей по вероятности и по распределению. В работе [8] исследованы асимптотические свойства рассматриваемой модели с вероятностью 1, доказаны принцип инвариантности и закон повторного логарифма для произведения независимых случайных матриц.

Мы используем следующую теорему

ТЕОРЕМА 1 [7], [9]. *Справедливы следующие импликации:*

- 1) $\lambda_b > 0 \implies P_0\{\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}(t) = +\infty\} = 1$,
- 2) $\lambda_b = 0 \implies P_0\{\limsup_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}(t) = +\infty \liminf_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}(t) = -\infty\} = 1$,
- 3) $\lambda_b < 0 \implies P_0\{\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}(t) = -\infty\} = 1$,

где λ_b – показатель Ляпунова.

Пусть Φ – множество отображений φ пространства G на $\mathbb{Z}$ со следующими свойствами:

$$|\varphi(x)| \leq \rho(x_0, x) \quad \forall x \in G, \quad (1)$$

$$\varphi(W(x)) = T_{\varphi(x)}(\varphi(W(x_0))) \quad \forall x \in G, \quad (2)$$

где $T_z y = z + y$, $z, y \in \mathbb{Z}$.

Возникает вопрос: при каких условиях на $(G, \circ, \rho)$, множество Φ будет пустым множеством? Частичным ответом на этот вопрос будет следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если ρ конечная (т.е. существует $M > 0$ такое, что для любых $x, y \in G$ выполняется $\rho(x, y) \leq M$), то $\Phi = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как φ отображение на $\mathbb{Z}$, для любого $M > 0$ можно найти $x \in G$ такое, что $|\varphi(x)| > [M] + 1$. Откуда следует, что не выполняется свойство (1) для φ при конечных ρ . Теорема доказана.

Определим на G бинарное отношение $\sim_\varphi$, положив $x \sim_\varphi y$ для $x, y \in G$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = \varphi(y)$. Очевидно, что отношение $\sim_\varphi$ является отношением эквивалентности, следовательно, множество G разбивается на классы эквивалентных элементов: все элементы, входящие в один класс, отображаются в один элемент на $\mathbb{Z}$. Обозначим через G_u^φ класс элементов x из G , эквивалентных данному элементу u : $x \sim_\varphi u$. Для $\forall x \in G, \forall z \in \mathbb{Z}$ обозначим $a_z^\varphi(x) = \sum_{y \in W(x): \varphi(y)=z} p_y(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Среду $A = \{p(x), x \in G\} \in \Omega$ назовем φ -периодической, если для любых $u \sim_\varphi v$ имеет место равенство $a_z^\varphi(u) = a_z^\varphi(v)$; $z \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 3. Если существует $\varphi \in \Phi$ такое, что Ω состоит только из φ -периодических сред, то справедливы следующие импликации:

- (1) $1)^\circ \quad \lambda_b \neq 0 \implies P_{x_0}\{\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(x_0, X(t)) = +\infty\} = 1,$
- 2) $\lambda_b = 0 \implies P_{x_0}\{\limsup_{t \rightarrow +\infty} \rho(x_0, X(t)) = +\infty\} = 1,$

где λ_b – показатель Ляпунова, $b = \max \varphi(W(x_0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий теоремы и свойств φ ясно, что функция φ индуцирует случайное блуждание $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$ с пространством состояний $\mathbb{Z}$, начальным состоянием 0 и матрицей переходных вероятностей $\widetilde{M} = \{m_{xy}, x, y \in \mathbb{Z}\}$, элементы которой определяются по следующей формуле:

$$m_{xy} = \begin{cases} a_{y-x}^\varphi(x), & \text{если } y - x \in \varphi(W(x_0)), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В силу свойства (1) функции φ имеем $|\tilde{x}(t)| \leq \rho(x_0, X(t)) \quad \forall t \in T$. Из последнего неравенства, применяя теорему 1, получаем 1) и 2). Теорема доказана.

Заметим, что в случае конкретного G для применения теоремы 3 необходимо показать существование отображения $\varphi \in \Phi$, для которого выполняется условие теоремы 3. Эта задача достаточно сложная и неизвестна общая конструкция построения такого отображения (если оно существует).

Заметим, что в силу теоремы 2 мы можем построить достаточно широкий класс метрических пространств, для которых не существует $\varphi \in \Phi$.

В п. 4 мы рассматриваем несколько примеров, где для каждого случая строятся сначала функции $\varphi \in \Phi$ и для построенного φ требуется выполнение условия теоремы 3.

4. Примеры.

1. Самым простым примером является следующий пример: $G = \mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, с обычным сложением $+$ и метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|, \quad (x = (x_1, \dots, x_d), \quad y = (y_1, \dots, y_d)).$$

Пусть $x_0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ начальное состояние. Функцию $\varphi: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}$ определим по формуле $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_d) = x_1$. Проверим, что $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет (1), (2): $|\varphi(x)| = |x_1| \leq \rho(0, x) = \sum_{i=1}^d |x_i|$; (2) следует очевидным образом из гомоморфности φ .

Относительно φ пространство Z^d разбивается на классы эквивалентности: $Z_x^{d,\varphi} = \{y \in Z^d : x_1 = y_1\}$. Требуется условие φ -периодичности среды A . Тогда будет справедлива теорема 3.

2. Пусть G – свободная группа с множеством свободных образующих M . Бинарная операция $\circ$ – это написание слова за словом. Метрику определим по формуле $\rho(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, x_d = y \text{ таких, что для } x_i \text{ и } x_{i+1} \exists a \in M \text{ такое, что } x_i = x_{i+1}a \text{ либо } x_{i+1} = x_i a\}$. Последовательность $x_1, x_2, \dots, x_d$, реализующая указанный минимум, называется *путем из x в y* и обозначается $\pi(x, y)$.

Пусть $e \in G$ единичный элемент этой группы. Отображение $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}$ строим конструктивно: зафиксируем $a \in M$. Пусть $\pi_a: M \rightarrow \{e, a, a^{-1}\}$ определяется по формуле:

$$\pi_a(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x = a, a^{-1}, \\ e, & \text{если } x \in M \setminus \{a, a^{-1}\}. \end{cases}$$

Обозначим через G_a – группу со свободным образующим a . Очевидно, что G_a бесконечная циклическая группа. Для $a \in M$ отображение $f_a: G \rightarrow G_a$ определим следующим образом:

$$f_a(x) = f_a(x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}) = \pi_a(x_{i_1}^{\varepsilon_1}) \dots \pi_a(x_{i_n}^{\varepsilon_n}),$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $n = |x|$ называется *длиной слова $x \in G$* .

Введем следующие отображения $g_a: G_a \rightarrow \mathbb{Z}$: $g_a(a^m) = m$; $\varphi_a: G \rightarrow \mathbb{Z}$: $\varphi_a(x) = g_a(f_a(x))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $a \in M$ справедливы следующие утверждения:

- i) $\rho(x, y) \geq |\varphi_a(x) - \varphi_a(y)|$;
- ii) если $\theta_x: G \rightarrow G$ сдвиг (левый) на G и $T_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ сдвиг на $\mathbb{Z}$, то $\varphi_a(\theta_x y) = T_{\varphi_a(x)} \varphi_a(y) \quad \forall x, y \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Очевидно, что f_a и g_a являются гомоморфизмами. Следовательно, φ_a является гомоморфизмом. В силу гомоморфности φ_a имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_a(x) &= \varphi_a(x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}) = \varphi_a(x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}) + \varphi_a(x_{i_n}^{\varepsilon_n}), \\ \varphi_a(x) &= \begin{cases} \varphi_a(x x_{i_n}^{-\varepsilon_n}), & \text{если } x_{i_n}^{\varepsilon_n} \neq a, a^{-1}, \\ \varphi_a(x x_{i_n}^{-\varepsilon_n}) + 1, & \text{если } x_{i_n}^{\varepsilon_n} = a, \\ \varphi_a(x x_{i_n}^{-\varepsilon_n}) - 1, & \text{если } x_{i_n}^{\varepsilon_n} = a^{-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Из последних равенств заметим, что соседние точки пути $\pi(x, y)$ отображением φ_a переводятся либо в одну точку, либо в соседние точки на $\mathbb{Z}$, откуда следует i).

ii) Непосредственно следует в силу гомоморфности отображения φ_a . Предложение доказано.

Из предложения 1 следует, что $\varphi_a \in \Phi$ для любого $a \in M$. Обозначим $H_a = \{x \in G: \varphi_a(x) = e\}$. Ясно, что H_a является нормальным делителем. Условие φ_a -периодичности случайной среды в этом случае совпадает с H_a -периодичностью (т.е. $a_z^\varphi(y) = a_z^\varphi(\theta_x y)$, если $y \in G$, $x \in H_a$, $z \in \mathbb{Z}$). При этих условиях справедлива теорема 3.

Заметим, что свободная группа G определяется заданием мощности множества M и не зависит ни от каких индивидуальных свойств элементов этого множества.

Известно, что если M – конечное или счетное множество, то G будет счетным, если M несчетно, то и G будет несчетным [13]. В случае $|M| < \infty$ граф этой группы будет деревом Кэли порядка $2|M| - 1$ [14], [15].

В примерах 1, 2 построенные отображения являются гомоморфизмами. Из этого свойство (2) функции φ следовало непосредственно. В следующем примере построим отображение, не являющееся гомоморфизмом, но принадлежащее Φ .

3. Пусть G_k , $k \geq 1$, свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ соответственно. Бинарная операция и метрика определяются так же, как в примере 2. Пусть e – единичный элемент. Для фиксированных $i, j = 1, 2, \dots, k+1$ ($i \neq j$) введем следующие отображения.

а) Отображение $\pi_{ij}: \{a_1, \dots, a_{k+1}\} \rightarrow \{e, a_i, a_j\}$, которое задается как

$$\pi_{ij}(a_m) = \begin{cases} a_m, & \text{если } m = i, j, \\ e, & \text{если } m \neq i, j. \end{cases}$$

б) Пусть G_{ij} – свободное произведение циклических групп $\{e, a_i\}, \{e, a_j\}$. Отображение $f_{ij}: G_k \rightarrow G_{ij}$ определяется равенством $f_{ij} = f_{ij}(a_1 \dots a_{i_n}) = \pi_{ij}(a_{i_1}) \dots \pi_{ij}(a_{i_n})$.

с) Отображение $g_{ij}: G_{ij} \rightarrow \mathbb{Z}$ определяется равенством

$$g_{ij}(y) = \begin{cases} |y|, & \text{если } y = a_i a_j a_i a_j \dots, \\ -|y|, & \text{если } y = a_j a_i a_j a_i \dots, \\ 0, & \text{если } y = e. \end{cases}$$

д) Отображение $\varphi_{ij}: G_k \rightarrow \mathbb{Z}$ определим по формуле: $\varphi_{ij}(x) = g_{ij}(f_{ij}(x))$. Очевидны следующие свойства функции φ_{ij} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любых $i, j = 1, 2, \dots, k+1$ ($i \neq j$) справедливы следующие утверждения:

а) Если $x, y \in G_k$ соседние вершины, то $\varphi_{ij}(x)$ и $\varphi_{ij}(y)$ либо являются соседними, либо $\varphi_{ij}(x) = \varphi_{ij}(y)$;

б) $\rho(x, y) \geq |\varphi_{ij}(x) - \varphi_{ij}(y)|$ для любых $x, y \in G_k$.

Из предложения 2 следует, что $\varphi_{ij} \in \Phi$, $i, j = 1, \dots, k+1$ ($i \neq j$). Таким образом, в этом случае можно доказать теорему 3 в случае φ_{ij} -периодичности случайных сред.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Темкин Д. Е. К теории бездиффузионного роста кристаллов // Кристаллография. 1969. Т. 14. № 3. С. 423–430.
- [2] Bernasconi J., Schnieder W. R., Wyss W. Diffusion and hopping conductivity in disordered one-dimensional lattice systems // Zeit. Phys. B. 1980. V. 37. P. 175–184.
- [3] Alexander S., Bernasconi J., Schneder W. R., Orbach K. Excitation dynamics in random one-dimensional system // Rev. Modern. Phys. 1981. V. 53. № 2. P. 175–198.

- [4] Solomon F. Random walks in a random environment // Ann. Prob. 1975. V. 3. № 1. P. 1–31.
- [5] Синай Я. Г. Предельное поведение одномерного случайного блуждания в случайной среде // Теория вероятн. и ее применения. 1982. Т. 27. № 2. С. 247–258.
- [6] Deheuvels P., Revesz P. Simple random walk on the line in random environment // Prob. Th. Rel. Fields. 1986. V. 72. № 2. P. 215–230.
- [7] Key E. Recurrence and transience criteria for random walk in a random environment // Ann. Prob. 1984. V. 12. № 2. P. 529–560.
- [8] Летчиков А. В. Асимптотические свойства одномерных случайных блужданий в случайной среде с вероятностью 1 // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 12. С. 1710–1728.
- [9] Летчиков А. В. Предельная теорема для возвратного случайного блуждания в случайной среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 302. № 1. С. 25–28.
- [10] Anshelevich V. V., Khanin K. M., Sinai Ya. G. Symmetric random walks in random environments // Comm. Math. Phys. 1982. V. 85. № 3. P. 449–470.
- [11] Lawler G. F. A discrete stochastic integral inequality and balanced random walk in a random environment // Duke Math. J. 1983. V. 50. № 4. P. 1261–1274.
- [12] Астраускас А., Сургайлис Д. Предельные теоремы для случайного блуждания в случайной среде // Литовский матем. сб. 1985. Т. 256. № 2. С. 12–27.
- [13] Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
- [14] Ганиходжаев Н. Н. Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли // Докл. АН РУз. 1994. № 4. С. 3–5.
- [15] Магнис В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

Институт математики им. В. И. Романовского
АН республики Узбекистан, г. Ташкент
E-mail: root@im.tashkent.su.

Поступило
28.01.1999