Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Тайков, Одностороннее приближение функций, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 136–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm821>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:22:09

УДК 517

ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Л. В. Тайков

Получено наилучшее одностороннее приближение периодических функций тригонометрическими полиномами класса $W_p^0(K)$ в метрике L .

Библиография: 1 название.

Пусть $\varphi(x)$ – произвольная измеримая 2π -периодическая функция с нормой пространства $L_p[0, 2\pi)$

$$\|\varphi\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |\varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = 1,$$

где p – любое заданное число, $1 < p < \infty$. Если $K(x) \in L_q[0, 2\pi)$, $1/q + 1/p = 1$, то определим класс непрерывных функций $\{f(x)\} = W_p(K) \subset C[0, 2\pi)$, представимых сверткой

$$f(x) = c + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(x-t) \cdot \varphi(t) dt = C + K * \varphi.$$

Будем допускать также случай: $p = \infty$, $q = 1$, рассматривая $\|\varphi\|_\infty$ как существенный максимум, и если $p = 1$, $q = \infty$, то ограничимся только непрерывными $K(x)$, $K(x) \in C[0, 2\pi)$, и $\varphi(t) dt = dv(t)$, где $v(t)$ – функция ограниченной вариации. Смысл этих ограничений состоит в том, чтобы пространство $L_p[0, 2\pi)$ всегда было сопряженным пространством, т.е. пространством функционалов для некоторого банахового пространства. В этом смысле показатель p допускает ограничения $1 \leq p \leq \infty$.

Если дополнительно все функции $\varphi(x)$ ортогональны 1:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) dx = 0, \quad 1 < p \leq \infty; \quad \int_0^{2\pi} dv(t) = 0, \quad p = 1,$$

то такой класс функций $\{f(x)\}$ будем обозначать $W_p^0(K)$.

Наилучшее приближение $K(x)$ тригонометрическими полиномами

$$T_{n-1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

определим как обычно:

$$\inf_{T_{n-1}} \|K - T_{n-1}\|_q = E_n(K)_q,$$

наилучшее приближение сверху функции $f(x)$ — как

$$\inf_{T_{n-1} \geq f} \|f - T_{n-1}\|_1 = E_n^+(f)_1.$$

Аналогично определяется наилучшее приближение снизу

$$\inf_{T_{n-1} \leq f} \|f - T_{n-1}\|_1 = E_n^-(f)_1.$$

И, наконец, определим соответствующие односторонние приближения классов функции как

$$\sup_{f \in W_p(K)} E_n^\pm(f)_1 = E_n^\pm\{W_p(K)\}_1.$$

Мы привели в соответствие с монографией [1] данные выше определения и обозначения и теперь в состоянии процитировать следующий результат:

ТЕОРЕМА 4.2.2. *Для всех $n = 1, 2, \dots$*

$$E_n^+\{W_\infty^0(K)\}_1 \leq 2E_n(K)_1,$$

при этом если $E_n(K)_1 = \left| \int_0^{2\pi} K(t) \operatorname{sign} \sin n(t - \gamma_0) dt \right|$, то предыдущее неравенство обращается в равенство.

В настоящей работе предполагается уточнить теорему 4.2.2 и в этой уточненной форме распространить ее на классы $W_p^0(K)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого натурального n и любого p , $1 \leq p \leq \infty$, справедливо равенство*

$$E_n^+\{W_p^0(K)\}_1 = 2E_n(K)_q.$$

Следовательно, теорема 1 при $p = \infty$, $q = 1$ уточняет теорему 4.2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Оно по основным пунктам следует доказательству теоремы 4.2.2 с очевидными изменениями в соответствующих местах.

1. Оценка сверху. Пусть $f \in W_p(K)$ и, следовательно, представима в виде $f(x) = C + K * \varphi$. Если $T_{n-1}(K)$ полином наилучшего приближения $\|K - T_{n-1}(K)\|_q = E_n(K)_q$, то разность

$$f(x) - T_{n-1}(f, x) = (K - T_{n-1}(K)) * \varphi,$$

где $T_{n-1}(f, x) = C + T_{n-1}(K) * \varphi$ будет ортогональна константе. С другой стороны, мы можем оценить

$$\|f - T_{n-1}(f)\|_\infty = \|(K + T_{n-1}(K)) * \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{\pi} \|K - T_{n-1}(K)\|_q \cdot \|\varphi\|_p \leq \frac{1}{\pi} E_n(K)_q$$

и, следовательно, для любого $x \in [0, 2\pi)$

$$T_{n-1}(f, x) - \frac{1}{\pi} E_n(K)_q \leq f(x) \leq T_{n-1}(f, x) + \frac{1}{\pi} E_n(K)_q.$$

Тригонометрический полином

$$T_{n-1}^+(f, x) = T_{n-1}(f, x) + \frac{1}{\pi} E_n(K)_q$$

расположен над функцией $f(x)$, и поэтому

$$E_n^+(f)_1 \leq \|T_{n-1}^+(f, x) - f(x)\|_1 = \int_0^{2\pi} \left\{ T_{n-1}(f, x) - f(x) + \frac{1}{\pi} E_n(K)_q \right\} dx = 2E_n(K)_q;$$

здесь мы воспользовались тем, что интеграл от разности полинома и функции равен нулю.

2. Оценка снизу. Рассмотрим функцию

$$\varphi^*(t) = \text{sign}\{K(t) - T_{n-1}(K, t)\} \cdot \frac{|K(t) - T_{n-1}(K, t)|^{q-1}}{\|K - T_{n-1}(K)\|_p^{q-1}};$$

поскольку $T_{n-1}(K, t)$ является полиномом наилучшего приближения, $\varphi^*(t)$ обладает следующими свойствами: она ортогональна любому полиному $T_{n-1}(t)$, $\|\varphi^*\|_p = 1$,

$$E_n(K)_q = \int_0^{2\pi} K(t) \cdot \varphi^*(t) dt.$$

В связи с последним свойством свертка вспомогательной функции $\varphi_1(t) = \varphi^*(-t)$ с $K(t)$ имеет максимальное значение

$$\frac{1}{\pi} E_n(K)_q : \max_x K * \varphi_1 = \frac{1}{\pi} E_n(K)_q.$$

Положим $f_1(x) = K * \varphi_1$ и рассмотрим $f_2(x) = f_1(nx)$. Эта функция из класса $W_p^0(K)$ и $2\pi/n$ периодична; тогда на основании леммы 3.1.2 из [1]

$$E_n^+(f_2)_1 = \int_0^{2\pi} \left\{ \max_x f_2(x) - f_2(t) \right\} dt = \int_0^{2\pi} \max_x f_1(x) dt = 2\pi \cdot \frac{1}{\pi} \cdot E_n(K)_q$$

и оценка снизу доказана.

Для дальнейшего сделаем следующее замечание. Пусть задано произвольное непрерывное ядро $K(x)$ и $v(x)$ – произвольная функция ограниченной вариации. Свертка $f(x) = K * dv$ принадлежит классу $W_1(K)$; тогда существует последовательность суммируемых функций $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что в смысле равномерной сходимости

$$f_n(x) = K * \varphi_n, \quad f_n(x) \Rightarrow f(x).$$

Это следует из того, что δ -функция в смысле слабой сходимости аппроксимируется некоторой последовательностью суммируемых функций, и если вариация $V(v) = 1$ и $dv(x) \perp C$, то можно найти последовательность суммируемых функций $\psi_n(x)$, $\|\psi_n\|_1 = 1$, $\psi_n \perp C$, которая слабо сходится к $dv(x)$.

В монографии [1] класс $W_1^0(K)$ понимается как совокупность $\{f(x)\}$ функций, представимых сверткой

$$f(x) = C + K * \varphi, \quad \|\varphi\|_1 \leq 1, \quad \varphi(x) \perp C.$$

Для любого непрерывного ядра $K(x)$ он образует всюду плотное множество в классе функций $f(x) = C + K * dv$, $V(v) \leq 1$, $dv \perp C$; следовательно, величина $E_n^+\{W_1^0(K)\}_1$ в обоих случаях одна и та же.

Из теоремы 4.2.3 монографии [1] с любым непрерывным ядром $K(x)$ следует оценка

$$E_n^+\{W_1^0(K)\}_1 \leq \frac{1}{2\pi} \{E_n^+(K)_1 + E_n^-(K)_1\}. \quad (1)$$

Поставим задачу о построении полиномов наилучших односторонних приближений в $L_1[0, 2\pi]$ $T_{n-1}^+(K, x)$ и $T_{n-1}^-(K, x)$ для любой непрерывной функции.

Пусть $T_{n-1}(K, x)$ – полином наилучшего приближения $K(x)$ в метрике $C[0, 2\pi]$, $\|K - T_{n-1}(K)\|_\infty = E_n(K)_\infty$.

ТЕОРЕМА 2. Для любой заданной непрерывной функции $K(x)$ ее полиномом наилучшего приближения сверху в метрике пространства $L_1[0, 2\pi]$ является

$$T_{n-1}^+(K, x) = E_n(K)_\infty + T_{n-1}(K, x)$$

и соответственно полиномом снизу

$$T_{n-1}^-(K, x) = -E_n(K)_\infty + T_{n-1}(K, x).$$

Таким образом,

$$E_n^+(K)_1 = \int_0^{2\pi} (E_n(K)_\infty + T_{n-1}(K, x) - K(x)) dx,$$

$$E_n^-(K)_1 = \int_0^{2\pi} (K(x) + E_n(K)_\infty - T_{n-1}(K, x)) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Временно переобозначим введенные в теореме 2 полиномы:

$$t_{n-1}^+(K, x) = E_n(K)_\infty + T_{n-1}(K, x),$$

$$t_{n-1}^-(K, x) = -E_n(K)_\infty + T_{n-1}(K, x).$$

Поскольку $\|K - T_{n-1}(K)\|_\infty = E_n(K)_\infty$, для любого $x \in [0, 2\pi]$

$$t_{n-1}^-(K) = -E_n(K) + T_{n-1}(K, x) \leq K(x) \leq E_n(K)_\infty + T_{n-1}(K, x) = t_{n-1}^+(K, x).$$

Кстати, оба полинома $t_{n-1}^+(K, x)$ и $t_{n-1}^-(K, x)$ удовлетворяют необходимым условиям полинома наилучшего одностороннего приближения.

Временно обозначим также

$$e_n^+(K)_1 = \int_0^{2\pi} \{t_{n-1}^+(K, x) - K(x)\} dx,$$

$$e_n^-(K)_1 = \int_0^{2\pi} \{K(x) - t_{n-1}^-(K, x)\} dx.$$

На основании оценки (1) и теоремы 1 имеем

$$2E_n(K)_\infty = E_n^+ \{W_1^0(K)\}_1 \leq \frac{1}{2\pi} \{E_n^+(K)_1 + E_n^-(K)_1\}.$$

Отсюда следует

$$4\pi E_n(K)_\infty \leq E_n^+(K)_1 + E_n^-(K)_1.$$

Величина слева есть площадь прямоугольника, расположенного между

$$y = -E_n(K)_\infty \text{ и } y = E_n(K)_\infty, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Он разбит графиком функции $y = -K(x) + T_{n-1}(K, x)$ на две части. Площадь под графиком этой функции равна $e_n^+(K)_1$, а площадь над графиком равна $e_n^-(K)_1$. Следовательно,

$$e_n^+(K)_1 + e_n^-(K)_1 \leq E_n^+(K)_1 + E_n^-(K)_1.$$

Отсюда сначала следует

$$e_n^+(K)_1 + e_n^-(K)_1 = E_n^+(K)_1 + E_n^-(K)_1,$$

а затем $e_n^+(K)_1 = E_n^+(K)_1$, $e_n^-(K)_1 = E_n^-(K)_1$ и теорема 2 полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для любой непрерывной функции $K(x)$ справедливо равенство

$$4\pi E_n(K)_\infty = E_n^+(K)_1 + E_n^-(K)_1.$$

В частности, для ядра Пуассона $P_\rho(x)$ имеем

$$4\pi E_n(P_\rho)_\infty = 2\pi \cdot \frac{\rho^n}{1 - \rho^n} + 2\pi \cdot \frac{\rho^n}{1 + \rho^n}; \quad E_n(P_\rho)_\infty = \frac{\rho^n}{1 - \rho^{2n}}.$$

Такое же выражение имеет $E_n(\tilde{P}_\rho)_\infty$ для сопряженного ядра Пуассона $\tilde{P}_\rho(x)$.

3. Односторонний поперечник. Известно, что поперечник

$$d_{2n-1}(K) = \inf_{L_{2n-1}} \sup_{\varphi \in K} \inf_{f \in L_{2n-1}} \|\varphi - f\|$$

шара большей размерности равен радиусу шара $K = \{u : \|u\| \leq r, u \in L_{2n+1}\}, r$. Пусть

$$K = U_{2n+1} = \{u : \|u\| \leq r, u \in L_{2n+1}\}, \quad \dim U_{2n+1} = 2n + 1,$$

и тогда $d_{2n-1}(U_{2n+1}) = r$. Конечномерность произвольного подпространства L_{2n-1} обеспечивает существование элементов $u \in U_{2n+1}$ и $f \in L_{2n-1}$, для которых $d_{2n-1}(K) = \|u - f\|$, при этом гиперплоскость $L_{2n-1} + u$ реализует одностороннее приближение U_{2n+1} , и существуют элементы $u^* \in U_{2n+1}$, $f^* \in L_{2n-1} + u^*$, на которых достигаются

$$\sup_{u \in U_{2n+1}} \inf_{f \in L_{2n-1} + u^*} \|u - f\| = \|u^* - f^*\|$$

и одностороннее приближение шара U_{2n+1} всеми элементами, которые лежат по другую сторону гиперплоскости $L_{2n-1} + u^*$ от шара U_{2n+1} . Таким образом, односторонний поперечник размерности $2n - 1$

$$d_{2n-1}(U_{2n+1}) = \inf_{\substack{L_{2n-1} + u \\ \|u\| \geq r}} \sup_{\varphi \in U_{2n+1}} \inf_{v \in L_{2n-1} + u} \|\varphi - v\|$$

$(2n + 1)$ -мерного шара U_{2n+1} совпадает с $2r$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982.

г. Мытищи Московской обл.

Поступило
29.04.1997