Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Галактионов, Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев,
С. И. Похожаев, Об условиях существования решений ква-
зилинейного неравенства в полупространстве, *Матем. за-
метки*, 2000, том 67, выпуск 1, 150–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm823>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 11:00:36

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО НЕРАВЕНСТВА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. А. Галактионов, Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, С. И. Похожаев

Пусть $L = L(t, x, D_x)$ – линейный дифференциальный оператор порядка m :

$$L[v] := \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (a_\alpha(t, x)v),$$

где $a_\alpha(t, x)$ – ограниченные измеримые функции, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $m \geq 1$.

Рассматриваются неотрицательные функции, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq L[u^p] + u^q, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $p = \text{const} \geq 1$, $q = \text{const} > 1$.

Неравенство (1) означает, что $u \in L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, $u \in L_{q,\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ и если $\psi \in C_0^m(\mathbb{R}^{n+1})$, $\psi(t, x) \geq 0$, то

$$-\int \frac{\partial \psi}{\partial t} u \, dx \, dt \geq \int u^p L^*[\psi] \, dx \, dt + \int u^q \psi \, dx \, dt. \quad (2)$$

Здесь интегралы берутся по полупространству $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(t, x) : t > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$,

$$L^*[\psi] = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t, x) D^\alpha \psi.$$

Основной в этой работе является

ТЕОРЕМА 1. Если неотрицательная функция $u(t, x)$ из класса $L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap L_{q,\text{loc}}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ удовлетворяет (2) и $1 \leq p < q \leq p + m/n$, то $u(t, x) \equiv 0$.

Теорема такого сорта была доказана впервые в работе Фуджиты [1] в 1966 году для решений уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^q$$

при $q < 1 + 2/n$. Для критического показателя $q = 1 + 2/n$ она была получена в [2] Хаякавой в 1973 году.

Заметим, что в теореме 1 не делается никаких предположений о типе оператора L .

В работе [3] В. А. Кондратьев и С. Д. Эйдельман впервые получили необходимые условия существования положительного решения квазилинейного уравнения $L[u] = u^p$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, не делая никаких предположений о типе оператора L . При рассмотрении критического случая $q = p + m/n$ мы воспользовались идеей из работы Е. Митидиери и С. И. Похожаева [4].

Эта работа была выполнена при поддержке гранта INTAS, проект 96-1060.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(s) \geq 0$, $\varphi(s) = 1$ при $s \leq 1$ и $\varphi(s) = 0$ при $s \geq 2$ такова, что

$$|\varphi'(s)| \leq C\varphi^{1/q}(s), \quad |\varphi^{(m)}(s)| \leq C\varphi^{p/q}(s). \quad (3)$$

В качестве такой функции можно взять, например, $\varphi(s) = (2-s)^N$ при $3/2 < s < 2$, где $N \geq p/q + m$.

Пусть

$$\psi_R(t, x) = \varphi\left(\frac{t^{2/\kappa} + |x|^2}{R^2}\right), \quad R > 0;$$

значение параметра $\kappa > 0$ будет указано ниже. Положим в (2) функцию $\psi = \psi_R(t, x)$. Получаем, что

$$-\int \frac{\partial \psi}{\partial t} u \, dx \, dt - \int u^p L^*[\psi] \, dx \, dt \geq \int u^q \psi \, dx \, dt. \quad (4)$$

Обозначим

$$I = \int u^q \psi \, dx \, dt.$$

Используя неравенство Юнга

$$ab \leq \varepsilon \frac{a^q}{q} + \varepsilon^{1-q'} \frac{b^{q'}}{q'}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad \varepsilon > 0,$$

где $q' = q/(q-1)$, можно показать, что

$$-\int \frac{\partial \psi}{\partial t} u \, dx \, dt \leq \frac{1}{4}I + C(q) \int \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|^{q'} \psi^{1-q'} \, dx \, dt$$

и, следовательно,

$$-\int \frac{\partial \psi}{\partial t} u \, dx \, dt \leq \frac{1}{4}I + C_1 R^{n+\kappa-q'\kappa}. \quad (5)$$

Аналогично,

$$-\int u^p L^*[\psi] \, dx \, dt \leq \frac{1}{4}I + C_2 R^{n+\kappa-mq/(q-p)}. \quad (6)$$

Из неравенств (4), (5) и (6) следует, что

$$I \leq C_3 R^{n+\kappa} (R^{-q\kappa/(q-1)} + R^{-mq/(q-p)}). \quad (7)$$

Выберем κ так, что $q\kappa/(q-1) = mq/(q-p)$, т.е. $\kappa = m(q-1)/(q-p)$.

Если

$$n + \kappa - \frac{mq}{q-p} = n - \frac{m}{q-p} < 0, \quad \text{т.е.} \quad q < p + \frac{m}{n},$$

то устремляя R к бесконечности мы получаем из (7), что $I = 0$, т.е. $u = 0$.

В случае, когда $q = p + n/m$, из неравенства (7) следует, что интеграл I ограничен равномерно по R , т.е. интеграл $\int u^q \, dx \, dt$ сходится. Тогда

$$\left| -\int \frac{\partial \psi}{\partial t} u \, dx \, dt - \int u^p L^*[\psi] \, dx \, dt \right| \leq C \left[\left(\int_\Omega u^q \, dx \, dt \right)^{1/q} + \left(\int_\Omega u^q \, dx \, dt \right)^{p/q} \right], \quad (8)$$

где

$$\Omega = \left\{ (t, x) : t > 0, \frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0 \text{ или } D_x^\alpha \psi(t, x) \neq 0 \text{ для некоторого } \alpha, |\alpha| = m \right\}.$$

Ясно, что $\Omega \subset \{(t, x) : t > 0, t^{2/\kappa} + |x|^2 > R^2\}$ и потому

$$\int_{\Omega} u^q dx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Из неравенств (4) и (8) следует, что

$$\int u^q \psi dx dt \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$, т.е. $u = 0$ почти всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 легко обобщается на операторы L вида

$$L[v] = \sum_{\alpha N=m} D^{\alpha} (a_{\alpha}(t, x)v),$$

где $N = (N_1, \dots, N_n)$, $N_j \in \mathbb{N}$, $\alpha N = \alpha_1 N_1 + \dots + \alpha_n N_n$. Формулировка теоремы при этом сохраняется.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вместо неравенства (1) можно рассмотреть неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq L[a(t, x, u)u^p] + b(t, x, u)u^q, \quad p \geq 1, \quad q > 1,$$

предполагая, что при $|x| + t > 1$

$$|a(t, x, u)| \leq A(t^{1/\rho} + |x|)^{\alpha}, \quad b(t, x, u) \geq B(t^{1/\rho} + |x|)^{-\beta},$$

где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $A \geq 0$, $B > 0$ и $\rho > 0$ таковы, что

$$\rho = \frac{q-1}{q-p} \left(m - \alpha - \frac{p}{q} \beta \right).$$

В этом случае утверждение теоремы 1 верно при

$$p \geq q \left(1 + \frac{\alpha + \beta - m}{nq - \beta} \right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fujita H. // J. Fac. Sci. Tokyo Sect. IA Math. 1966. V. 13. P. 109–124.
2. Hayakawa K. // Proc. Japan Acad. 1973. V. 49. P. 503–505.
3. Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д. // Докл. РАН. 1994. Т. 48. № 1. С. 80–84.
4. Митидиери Е., Похожаев С. И. // Докл. РАН. 1998. Т. 58. № 2. С. 250–253.