Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Коньков, О решениях квазилинейных эллиптических неравенств, обращающихся в нуль в окрестности бесконечности, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 1, 153–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm824>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 07:59:37

О РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ, ОБРАЩАЮЩИХСЯ В НУЛЬ В ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

А. А. Коньков

Пусть Ω – неограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $K \subset \mathbb{R}^n$ – произвольный, возможно пустой, компакт и L – дифференциальный оператор вида

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

где $a_{ij}(x)$ – измеримые функции такие, что $a_{ij} \equiv a_{ji}$ и для некоторой константы $\gamma > 0$ при всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ и $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\gamma^{-1} |\zeta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \zeta_i \zeta_j \leq \gamma |\zeta|^2.$$

Будут изучаться неравенства

$$(Lu - F(x, u)) \operatorname{sign} u \geq 0, \quad x \in \Omega \setminus K, \quad (1)$$

где $F: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – локально ограниченная измеримая функция такая, что $F(x, -t) = -F(x, t)$ и $0 \leq F(x, t) \leq F(x, \tau)$ при всех $0 \leq t \leq \tau$ и почти всех $x \in \Omega \setminus K$.

Через Q_r и S_r мы обозначаем соответственно открытый шар $Q_r = \{x : |x| < r\}$ и сферу $S_r = \{x : |x| = r\}$ радиуса r с центром в точке нуль.

Положим $u_+(x) = (u(x) + |u(x)|)/2$, $u_-(x) = (u(x) - |u(x)|)/2$ и

$$M(r) = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega \cap S_r} |u|.$$

Под решением (1) мы будем подразумевать функцию $u \in W_{2,\operatorname{loc}}^1(\Omega \setminus K) \cap L_{\infty,\operatorname{loc}}(\Omega \setminus K)$ такую, что для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus K)$

$$-\int_{\Omega \setminus K} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \geq \int_{\Omega \setminus K} F(x, u_+) \varphi dx$$

и

$$\int_{\Omega \setminus K} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u_-}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \geq -\int_{\Omega \setminus K} F(x, u_-) \varphi dx.$$

В случае $a_{ij} \in C^1(\Omega \setminus K)$ под это определение, бесспорно, подпадает всякая достаточно гладкая функция u , удовлетворяющая (1) в классическом смысле.

Мы также пишем

$$u|_{\partial\Omega \setminus K} = 0, \quad (2)$$

если $\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$ $\psi u \in \overset{o}{W}_2^1(\Omega \setminus K)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-15-96177 школа.

Таким образом, в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ (2) будет заведомо выполнено для любой функции $u \in W_{2,\text{loc}}^1(\Omega \setminus K) \cap L_{\infty,\text{loc}}(\Omega \setminus K)$.

Ниже мы будем считать, что $a > 0$ и $\sigma > 1$ – некоторые фиксированные вещественные числа такие, что $K \subset Q_a$, и при этом для измеримой функции $p: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и монотонно не убывающей функции $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ при всех $r \in (a, \infty)$ и $t \in (0, \infty)$

$$p(r)g(t) \leq \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega \cap Q_{\sigma r} \setminus \left(Q_{\frac{r}{\sigma}} \cup K\right)} F(x, r^{2-n}t).$$

Из принципа максимума следует, что всякое решение (1), (2) либо удовлетворяет соотношению

$$M(r) \leq M(\rho) \quad \text{при всех } a \leq \rho \leq r, \quad (3)$$

либо существует константа $a_* \in [a, \infty)$ такая, что при всех $a_* \leq \rho \leq r$

$$M(r) \geq M(\rho). \quad (4)$$

Решения (1), (2), для которых имеет место (4), достаточно полно изучены в [1]–[6]. В этом сообщении рассматриваются решения, удовлетворяющие (3).

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\int_0^1 (g(t)t)^{-\frac{1}{2}} dt < \infty \quad (5)$$

и

$$\int_a^\infty \xi^{n-1} p(\xi) d\xi = \infty. \quad (6)$$

Тогда всякое решение (1), (2), удовлетворяющее условию (3), тождественно равно нулю в некоторой окрестности ∞ .

ПРИМЕР 1. Предположим, что $a_0 \in (0, \infty)$ и $F(x, t) = a_0 |x|^s t \ln^\theta(1/t)$ для почти всех $x \in \Omega$ и всех достаточно малых положительных t . Если $\theta > 2$ и $s \geq -2$, то применяя теорему 1, получим, что всякое решение (1), (2), для которого выполнено (3), тождественно равно нулю в некоторой окрестности ∞ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть имеет место (6) и

$$\int_0^1 (g(t)t)^{-\frac{1}{2}} dt = \infty.$$

Тогда найдутся постоянные $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от n , γ , σ такие, что всякое решение (1), (2), удовлетворяющее условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = 0, \quad (7)$$

при почти всех x из некоторой окрестности ∞ допускает оценку

$$|u(x)| \leq A |x|^{2-n} H_0^{-1} \left(B \left(\int_a^{|x|} \xi^{n-1} p(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

где

$$H_0(s) = \int_s^1 (g(t)t)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

а H_0^{-1} – функция, обратная к H_0 .

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\int_a^\infty \min \left\{ \xi^{n-1} p(\xi), \xi^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{1}{2}}(\xi) \right\} d\xi = \infty.$$

Тогда найдутся постоянные $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от n , γ , σ , такие, что всякое решение (1), (2), удовлетворяющее условию (7), либо обращается тождественно в нуль в некоторой окрестности ∞ , либо при почти всех x из некоторой окрестности ∞ допускает оценку

$$\int_{A|x|^{n-2}|u(x)|}^1 (g(t)t)^{-\frac{1}{2}} dt + \int_{A|x|^{n-2}|u(x)|}^1 \frac{dt}{g(t)} \geq B \int_a^{|x|} \min \left\{ \xi^{n-1} p(\xi), \xi^{\frac{n-2}{2}} p^{\frac{1}{2}}(\xi) \right\} d\xi.$$

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что имеет место (5) и

$$\int_a^\infty \xi^{n-1} p(\xi) d\xi < \infty.$$

Тогда найдутся постоянные $A > 0$, $B > 0$, зависящие только от n , γ , σ , такие, что всякое решение (1), (2), удовлетворяющее условию (7), либо обращается тождественно в нуль в некоторой окрестности ∞ , либо при всех $r \in [a, \infty)$ допускает оценку

$$M(r) \geq Ar^{2-n} G_0^{-1} \left(B \left(\int_r^\infty \xi^{n-1} p(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

где

$$G_0(s) = \int_0^s (g(t)t)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

а G_0^{-1} — функция, обратная к G_0 .

Далее мы будем рассматривать неравенства

$$(Lu - c(x)|u|^{\lambda-1}u) \operatorname{sign} u \geq 0, \quad x \in \Omega \setminus K, \quad (8)$$

типа Эмдена–Фаулера, где $\lambda \in [0, \infty)$, а измеримая локально ограниченная функция $c: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ при всех $r \in [0, \infty)$ подчиняется соотношению

$$q(r) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{\sigma r} \setminus (Q_{\frac{r}{\sigma}} \cup K)} c(x)$$

для некоторой измеримой функции $q: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Предположим, что $\lambda < 1$ и

$$\int_a^\infty \xi^{(2-n)\lambda+n-1} q(\xi) d\xi = \infty. \quad (9)$$

Тогда всякое решение (8), (2), удовлетворяющее условию (3), тождественно равно нулю в некоторой окрестности ∞ .

ПРИМЕР 2. Пусть $c(x) = a_0|x|^s$, $a_0 \in (0, \infty)$. Применяя следствие 1, получим, что при $s \geq (n-2)\lambda - n$ и $0 \leq \lambda < 1$ всякое решение (8), (2), для которого имеет место (3), тождественно равно нулю в некоторой окрестности ∞ .

Пусть теперь $c(x) = a_0|x|^{(n-2)\lambda - n} \ln^\varepsilon |x|$, $a_0 \in (0, \infty)$. Тогда при $0 \leq \lambda < 1$ и $\varepsilon \geq -1$ всякое решение (8), (2), удовлетворяющее условию (3), тождественно равно нулю в некоторой окрестности ∞ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Предположим, что $\lambda > 1$ и при этом выполнено (9). Тогда найдется постоянная $A > 0$, зависящая только от $n, \gamma, \sigma, \lambda$, такая, что всякое решение (8), (2), удовлетворяющее условию (7), при почти всех x из некоторой окрестности ∞ допускает оценку

$$|u(x)| \leq A|x|^{2-n} \left(\int_a^{|x|} \xi^{(2-n)\lambda + n-1} q(\xi) d\xi \right)^{-\frac{1}{\lambda-1}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\lambda < 1$ и

$$\int_a^\infty \xi^{(2-n)\lambda + n-1} q(\xi) d\xi < \infty.$$

Тогда существует постоянная $A > 0$, зависящая только от $n, \gamma, \sigma, \lambda$, такая, что всякое решение (8), (2), удовлетворяющее условию (7), либо обращается тождественно в нуль в некоторой окрестности ∞ , либо при всех $r \in [a, \infty)$ допускает оценку

$$M(r) \geq Ar^{2-n} \left(\int_r^\infty \xi^{(2-n)\lambda + n-1} q(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{1-\lambda}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Keller J. B. // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. № 4. P. 505–510.
2. Osserman R. // Pacific J. Math. 1957. V. 7. № 4. P. 1641–1647.
3. Vazquez J. L. // Nonlinear Anal. 1981. V. 5. P. 95–103.
4. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. // Матем. сб. 1988. Т. 135(177). № 3. С. 346–360.
5. Кондратьев В. А., Коньков А. А. // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 9. С. 81–94.
6. Kon'kov A. A. // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 1. P. 119–122.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

E-mail: konkov@mx.bmstu.ru

Поступило

24.05.1999