Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Воскресенская, Метациклические группы и модулярные формы, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 163–173

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm825>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 02:29:35

УДК 511.334

МЕТАЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ

Г. В. Воскресенская

В статье находятся все такие метациклические группы вида $\langle a, b : a^m = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$, где $m = 3, 4, 5, 7, 11, 23$, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления, являются мультипликативными η -произведениями.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Настоящая статья является продолжением исследований автора [1]–[4] проблемы нахождения таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления, принадлежат специальному классу модулярных форм, которые называются мультипликативными η -произведениями. Исследуются метациклические группы.

Напомним основные определения.

Эта-функция Дедекинда $\eta(z)$ определяется формулой

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz},$$

где z лежит в верхней комплексной полуплоскости.

Мультипликативными η -произведениями назовем параболические формы целого веса с характеристиками, собственными относительно всех операторов Гекке и не имеющие нулей вне параболических вершин. Их ровно 28. Приведем их полный список:

формы веса 1:

$$\eta(23z)\eta(z), \quad \eta(22z)\eta(2z), \quad \eta(21z)\eta(3z), \quad \eta(20z)\eta(4z), \\ \eta(18z)\eta(6z), \quad \eta(16z)\eta(8z), \quad \eta^2(12z);$$

формы веса 2:

$$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z), \quad \eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z), \quad \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z), \\ \eta^2(11z)\eta^2(z), \quad \eta^2(10z)\eta^2(2z), \quad \eta^2(9z)\eta^2(3z), \quad \eta^2(8z)\eta^2(4z), \quad \eta^4(6z);$$

формы веса 3:

$$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z), \quad \eta^3(7z)\eta^3(z), \quad \eta^3(6z)\eta^3(2z), \quad \eta^6(4z);$$

формы веса 4:

$$\eta^4(5z)\eta^4(z), \quad \eta^4(4z)\eta^4(2z), \quad \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \quad \eta^8(3z);$$

форма веса 5: $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$;

формы веса 6: $\eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{12}(2z)$;

форма веса 8: $\eta^8(2z)\eta^8(z)$;

форма веса 12: $\eta^{24}(z)$.

К этому списку добавим еще две параболические формы полуполого веса: $\eta(24z), \eta^3(8z)$.

Сопоставление элементам конечных групп модулярных форм осуществляется по следующему правилу. Пусть Φ – представление конечной группы G унитарными матрицами в пространстве V , размерность которого делится на 24. Тогда для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$ имеет вид

$$P_g(x) = \prod_{k=1}^s (x^{a_k} - 1)^{t_k}, \quad a_k \in \mathbb{N}, \quad t_k \in \mathbb{Z}.$$

С каждым элементом $g \in G$ можно связать функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{k=1}^s \eta^{t_k}(a_k z).$$

Функция $\eta_g(z)$ является параболической формой определенного уровня $N(g)$ и веса

$$k(g) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s t_k$$

с характером, равным характеру квадратичного поля

$$Q \sqrt{\prod_{k=1}^s (ia_k)^{t_k}}.$$

Метациклической группой называется конечная группа, имеющая циклический нормальный делитель, фактор-группа по которому также циклическая.

Генетический код метациклической группы: $\langle a, b : a^m = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$.

Будем называть представление группы *искомым* или *представлением допустимого типа*, если с помощью этого представления с элементами группы ассоциируются мультипликативные η -произведения. Целью работы является нахождение метациклических групп, имеющих такие точные представления. При разборе каждого случая будут подробно указаны искомые представления.

Допустимые группы указываются с точностью до изоморфизма.

Искомые группы могут содержать элементы порядков, не превосходящих 24 и не равных 13, 17, 19. Непосредственно проверяется, что если некоторому элементу группы соответствует мультипликативное η -произведение, то всем его степеням также соответствуют параболические формы из указанного выше списка. Используя этот факт, при

исследовании групп достаточно рассматривать представления только для элементов, не лежащих в одной циклической группе. Единичному элементу группы соответствует параболическая форма $\eta^{24}(z)$.

В следующей таблице приведены все возможности соответствия элементам циклических групп мультипликативных η -произведений.

Группа	Параболические формы
Z_{24}	$\eta(24z), \eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{23}	$\eta(23z)\eta(z), \eta^{24}(z)$
Z_{22}	$\eta(22z)\eta(2z), \eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{21}	$\eta(21z)\eta(3z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^8(3z), \eta^{24}(z)$
Z_{20}	$\eta(20z)\eta(4z), \eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{18}	$\eta(18z)\eta(6z), \eta^2(9z)\eta^2(3z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{16}	$\eta(16z)\eta(8z), \eta^2(8z)\eta^2(4z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_{15}	$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{24}(z)$
Z_{14}	$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_{12}	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z), \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z), \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$
Z_{12}	$\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{11}	$\eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{10}	$\eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_9	$\eta^2(9z)\eta^2(3z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^{24}(z)$
Z_8	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z), \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_8	$\eta^2(8z)\eta^2(4z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_8	$\eta^3(8z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_7	$\eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^{24}(z)$
Z_6	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_6	$\eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_6	$\eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_5	$\eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^{24}(z)$
Z_4	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_4	$\eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_4	$\eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_3	$\eta^8(3z), \eta^{24}(z)$
Z_3	$\eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^{24}(z)$
Z_2	$\eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_2	$\eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$

Так как искомое представление является точным, по виду параболической формы можно понять порядок соответствующего ей элемента группы. Поэтому мы будем приводить только списки параболических форм, указывая элементы только в том случае,

когда элементам группы равных порядков соответствуют различные формы.

Если некоторая допустимая группа является подгруппой другой допустимой метациклической группы, то можно привести подробное рассмотрение только для большей группы. Результат для подгруппы следует из него очевидным образом.

В этой статье полностью разобраны случаи, когда $m = 3, 4, 5, 7, 11, 23$ и циклические подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ не имеют нетривиального пересечения.

Основной результат статьи может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть G – такая метациклическая группа с генетическим кодом

$$\langle a, b : a^m = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle, \quad m = 3, 4, 5, 7, 11, 23,$$

что с каждым элементом этой группы с помощью некоторого точного представления ассоциируется мультипликативное η -произведение. Тогда для m, s, r возможны (с точностью до изоморфизма) лишь указанные в таблице значения:

m	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	
s	2	4	6	8	12	18	2	4	6	8	10	24	4	8	12	2	4	6	8
r	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2	4	4	4	4

m	7	7	7	7	7	7	7	11	11	11	11	11	11	23	23	23
s	2	4	6	6	12	3	6	2	4	20	10	10	5	2	22	11
r	6	6	6	3	3	2	2	10	10	2	2	4	5	22	5	10

Диэдральные группы допустимых типов подробно рассматривались автором в предыдущей статье [4].

2. Метациклические группы вида $\langle a, b : a^3 = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$. Имеем $m = 3$.

В этом случае $r = 2$, s должно быть четным, $b^{s/2}$ является центральным элементом. Допустимые порядки элементов искомой группы показывают, что в ней с элементами порядка 3 могут коммутировать элементы порядков 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 18, 21, 24; $s/2$ может равняться 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12.

2.1. Группа $\langle a, b : a^3 = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Это группа 12-го порядка; она имеет 6 классов сопряженных элементов.

Для этой группы можно построить допустимые представления так, чтобы элементам порядка 6 соответствовали любые из трех параболических форм, соответствующие элементам порядка 6.

Первым искомым представлением является прямая сумма

$$2(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) \oplus 4(T_5 \oplus T_6),$$

где

$$T_k(a) = 1, \quad T_k(b) = i^k, \quad k = 1, 4, \\ T_5(a) = T_6(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}, \quad T_5(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_6(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементом группы соответствуют параболические формы: $\eta^4(6z)$, $\eta^8(3z)$, $\eta^6(4z)$, $\eta^{12}(2z)$, $\eta^{24}(z)$.

Вторым искомым представлением является

$$2(T_1 \oplus T_3 \oplus T_5) \oplus 4(T_2 \oplus T_3 \oplus T_6).$$

Элементом группы соответствуют параболические формы: $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$, $\eta^8(3z)$, $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, $\eta^{24}(z)$.

Третьим искомым представлением является

$$3(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_6).$$

Элементом группы соответствуют параболические формы: $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$, $\eta^8(3z)$, $\eta^6(4z)$, $\eta^{12}(2z)$, $\eta^{24}(z)$.

2.2. Группа $\langle a, b : a^3 = e, b^6 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Эта группа имеет 9 классов сопряженных элементов.

Искомым представлением является удвоенная прямая сумма всех неприводимых представлений.

Элементу a , a^2 соответствует форма $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, остальным элементам третьего порядка соответствует форма $\eta^8(3z)$, остальным элементам группы соответствуют параболические формы $\eta^4(6z)$, $\eta^{12}(2z)$, $\eta^{24}(z)$.

2.3. Группа $\langle a, b : a^3 = e, b^8 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Это группа порядка 24, она имеет 12 классов сопряженных элементов. Искомым представлением является ее регулярное представление.

Элементу группы соответствуют параболические формы: $\eta^2(12z)$, $\eta^3(8z)$, $\eta^4(6z)$, $\eta^8(3z)$, $\eta^6(4z)$, $\eta^{12}(2z)$, $\eta^{24}(z)$.

2.4. Группа $\langle a, b : a^3 = e, b^{12} = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Эта группа порядка 36; у нее 18 классов сопряженных элементов.

Искомым представлением является сумма всех неприводимых представлений. Элементу, сопряженному с элементом ab^6 , соответствует форма $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$, элементу a и a^2 соответствует форма $\eta^6(3z)\eta^6(z)$. Остальным элементам группы соответствуют параболические формы $\eta^2(12z)$, $\eta^4(6z)$, $\eta^6(4z)$, $\eta^8(3z)$, $\eta^{12}(2z)$, $\eta^{24}(z)$.

2.5. Группа $\langle a, b : a^3 = e, b^{18} = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Искомое представление является суммой шести точных неизоморфных двумерных представлений и удвоенной суммы шести одномерных представлений, при которых элемент a переходит в единицу, а элемент b – в различные степени первообразного корня степени 6 из 1.

Элементу группы соответствуют параболические формы: $\eta(18z)\eta(6z)$, $\eta^2(9z)\eta^2(3z)$, $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$, $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, $\eta^{24}(z)$.

3. Метациклические группы вида $\langle a, b : a^4 = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$. В этом случае $m = 4$.

3.1. Группа $\langle a, b : a^4 = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$. Искомым представлением является удвоенная прямая сумма всех неприводимых представлений.

Элементу a , a^3 , ab^2 , a^3b^2 соответствует $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, элементу a^2 соответствует форма $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальным элементам 4 порядка соответствует $\eta^6(4z)$, остальным элементам 2 порядка соответствует $\eta^{12}(2z)$.

3.2. Группа $\langle a, b : a^4 = e, b^6 = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$. Эта группа является подгруппой в группе $\langle a, b : a^4 = e, b^{24} = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$.

3.3. Группа $\langle a, b : a^4 = e, b^{10} = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$. Искомое представление является прямой суммой всех неприводимых представлений, причем представления T , в которых собственными значениями оператора $T(b)$ являются только числа 1 и -1 , входят в сумму с кратностью 2, остальные представления с кратностью 1. Искомое представление находится однозначно.

Элементом группы соответствуют параболические формы: $\eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^4(5z) \times \eta^4(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$.

3.4. Группа $\langle a, b : a^4 = e, b^{24} = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$. Эта группа порядка 96, в ней 48 классов сопряженных элементов.

Искомое представление является прямой суммой следующих 18 неприводимых представлений:

$$T_k(a) = (-1)^k, \quad T_k(b) = \zeta_{12}^k, \quad 1 \leq k \leq 12,$$

$$\Phi_l(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \Phi_l(b) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_{24}^l \\ \zeta_{24}^l & 0 \end{pmatrix},$$

$l = 1, 3, 5, 7, 9, 11$.

Элементом группы соответствуют параболические формы: $\eta(24z), \eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$. Эта группа содержит в качестве подгруппы группу: $\langle a, b : a^4 = e, b^8 = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$.

4. Метациклические группы вида $\langle a, b : a^5 = e, b^r = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$. Имеем $m = 5, r = 2$.

4.1. Метациклическая группа $\langle a, b : a^5 = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Эта группа порядка 20, у нее 5 классов сопряженных элементов. Выпишем все ее 5 неприводимых представлений:

$$T_k(a) = 1, \quad T_k(b) = i^k, \quad k = 1, \dots, 4,$$

$$T_5(a) = \begin{pmatrix} \zeta_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_5^4 \end{pmatrix}, \quad T_5(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первым искомым представлением является прямая сумма

$$2(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) \oplus 4T_5.$$

Вторым искомым представлением является прямая сумма

$$2T_1 \oplus 6T_4 \oplus 4T_5.$$

Третьим искомым представлением является прямая сумма

$$4(T_2 \oplus T_4 \oplus T_5).$$

Во всех трех случаях элементам пятого порядка соответствует $\eta^4(5z)\eta^4(z)$, элементам четвертого порядка соответствует в первом случае $\eta^6(4z)$, во втором случае $\eta^4(4z) \times \eta^2(2z)\eta^4(z)$, в третьем случае $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$; элементам второго порядка соответствует в первом случае $\eta^{12}(2z)$, во втором и третьем случаях — форма $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

4.2. Метациклическая группа $\langle a, b : a^5 = e, b^8 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Эта группа порядка 40, у нее 10 классов сопряженных элементов.

Искомым представлением является прямая сумма, в которую все двумерные неприводимые представления входят с кратностью 2, а одномерные неприводимые представления входят с кратностью 1.

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta(20z)\eta(4z), \eta^2(10z)\eta^2(z), \eta^6(4z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$.

Эта группа содержит в качестве подгруппы метациклическую группу $\langle a, b : a^5 = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle$.

4.3. Метациклическая группа $\langle a, b : a^5 = e, b^{12} = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Эта группа порядка 60, у нее 15 классов сопряженных элементов.

Единственным искомым представлением является представление

$$T_1 \oplus T_2 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_8 \oplus T_9 \oplus 2(T_3 \oplus T_6 \oplus T_7),$$

где

$$\begin{aligned} T_k(a) &= 1, \quad T_k(b) = \zeta_6^k, \quad k = 1, \dots, 6, \\ T_7(a) &= \begin{pmatrix} \zeta_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_5^4 \end{pmatrix}, \quad T_7(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_8 &= T_2 \otimes T_7, \quad T_9 = T_4 \otimes T_7. \end{aligned}$$

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z), \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z), \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Эта группа содержит в качестве подгруппы метациклическую группу $\langle a, b : a^5 = e, b^6 = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle$.

4.4. Метациклическая группа $\langle a, b : a^5 = e, b^8 = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle$. Эта группа порядка 40, у нее 16 классов сопряженных элементов.

Искомым представлением является прямая сумма, в которую все двумерные неприводимые представления входят с кратностью 2, а одномерные неприводимые представления входят с кратностью 1.

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta(20z)\eta(4z), \eta^2(10z)\eta^2(z), \eta^6(4z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$.

5. Метациклические группы вида $\langle a, b : a^7 = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$.

5.1. Метациклическая группа вида $\langle a, b : a^7 = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^6 \rangle$. Эта группа порядка 28, она имеет 10 классов сопряженных элементов.

Первым искомым представлением является прямая сумма, в которую представления, в которых образ элемента b имеет порядок 4, входят с кратностью 1, остальные неприводимые представления входят с кратностью 2.

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$.

Вторым искомым представлением является прямая сумма, в которую входят все неприводимые представления, кроме тех одномерных, которые переводят элемент b в -1 , причем точные двумерные неприводимые представления входят с кратностью 1, неточные двумерные неприводимые представления входят с кратностью 2, единичное представление входит с кратностью 4. Элементом группы соответствуют параболические формы: $\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$, $\eta^3(7z)\eta^3(z)$, $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$, $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, $\eta^{24}(z)$.

5.2. Метациклическая группа вида $\langle a, b : a^7 = e, b^6 = e, b^{-1}ab = a^6 \rangle$. Эта группа порядка 63, она имеет 15 классов сопряженных элементов. У этой группы 9 двумерных представлений, 6 одномерных представлений. Искомым представлением является прямая сумма, в которую входят все неприводимые представления с кратностью 1.

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta(21z)\eta(3z)$, $\eta^3(7z)\eta^3(z)$, $\eta^4(6z)$, $\eta^8(3z)$, $\eta^{12}(2z)$, $\eta^{24}(z)$.

5.3. Метациклическая группа вида $\langle a, b : a^7 = e, b^6 = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$. Эта группа порядка 42, она имеет 7 классов сопряженных элементов, у нее имеется одно шестимерное представление и 6 одномерных.

Первым искомым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений, в которую 6-мерное неприводимое представление входит с кратностью 3, одномерные представления – с кратностью 1.

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta^3(7z)\eta^3(z)$, $\eta^4(6z)$, $\eta^8(3z)$, $\eta^{12}(2z)$, $\eta^{24}(z)$.

Пусть

$$T_1(a) = T_1(b) = 1, \quad T_2(a) = 1, \quad T_2(b) = -1,$$

T_3 – 6-мерное неприводимое представление.

Второе допустимое представление $3(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3)$.

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta^3(7z)\eta^3(z)$, $\eta^3(6z) \times \eta^3(2z)$, $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, $\eta^{24}(z)$.

5.4. Метациклическая группа вида $\langle a, b : a^7 = e, b^{12} = e, b^{-1}ab = a^3 \rangle$. Искомым представлением является представление

$$T_1 \oplus 2T_2 \oplus T_3 \oplus 2T_4 \oplus 2T_5 \oplus T_6,$$

где

$$T_k(a) = 1, \quad T_k(b) = i^k, \quad k = 1, \dots, 4,$$

$$T_5(a) = \begin{pmatrix} \zeta_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_7^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_7^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_7^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_7^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_7^5 \end{pmatrix}, \quad T_7(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_6 = T_5 \otimes T_1.$$

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$, $\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$, $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$, $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$, $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, $\eta^3(7z)\eta^3(z)$, $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, $\eta^{24}(z)$.

5.5. Метациклическая группа вида $\langle a, b : a^7 = e, b^3 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Искомым представлением является прямая сумма представлений, в которую все неприводимые трехмерные представления входят с кратностью 3, а неприводимые одномерные – с кратностью 2.

Элементом группы соответствуют параболические формы: $\eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^8(3z), \eta^{24}(z)$.

Другим допустимым представлением является сумма трех 3-мерных представлений и шести тривиальных одномерных представлений.

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^{24}(z)$.

5.6. Метациклическая группа вида $\langle a, b : a^7 = e, b^6 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Искомым представлением является представление

$$4T_1 \oplus 2T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus 2T_5 \oplus 2T_6,$$

где

$$T_1(a) = 1, \quad T_1(b) = 1, \quad T_2(a) = 1, \quad T_2(b) = -1,$$

T_3, T_4 – 3-мерные представления, точные на элементе b , T_5, T_6 – 3-мерные представления, не являющиеся точными на элементе b .

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z), \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$.

6. Метациклические группы вида $\langle a, b : a^{11} = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$.

6.1. Метациклическая группа вида $\langle a, b : a^{11} = e, b^{20} = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Эта группа имеет порядок 220, у нее 20 одномерных представлений и 2 неприводимых 10-мерных.

Искомым представлением является представление

$$T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus 2T_6,$$

где

$$T_k(a) = 1, \quad T_k(b) = i^k, \quad k = 1, \dots, 4,$$

T_5 – 10-мерное представление, точное на элементе b , T_6 – 10-мерное представление, не являющееся точным на элементе b .

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta(22z)\eta(2z), \eta^2(11z)\eta^2(z), \eta(20z)\eta(4z), \eta^2(10z)\eta^2(z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$.

Эта группа содержит в качестве подгруппы следующие группы, которые, следовательно, также являются допустимыми: $\langle a, b : a^{11} = e, b^{10} = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle$, $\langle a, b : a^{11} = e, b^5 = e, b^{-1}ab = a^5 \rangle$, $\langle a, b : a^{11} = e, b^4 = e, b^{-1}ab = a^{10} \rangle$.

6.2. Метациклическая группа вида $\langle a, b : a^{11} = e, b^{10} = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Эта группа имеет порядок 110, у нее 10 одномерных представлений, одно неприводимое 10-мерное.

Искомым представлением является представление

$$2T_1 \oplus 2T_2 \oplus 2T_3,$$

где

$$T_k(a) = 1, \quad T_k(b) = (-1)^k, \quad k = 1, 2,$$

T_3 – 10-мерное неприводимое представление.

Элементам группы соответствуют параболические формы: $\eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^2(10z) \times \eta^2(z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$.

7. Метациклические группы вида $\langle a, b : a^{23} = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$. В этом пункте мы рассмотрим только одну группу: все допустимые группы с таким генетическим кодом являются ее подгруппами.

7.1. *Метациклическая группа вида $\langle a, b : a^{23} = e, b^{22} = e, b^{-1}ab = a^5 \rangle$.* Эта группа имеет порядок 506, у нее 23 одномерные представления, одно неприводимое 22-мерное.

Искомым представлением является представление

$$T_1 \oplus T_2 \oplus T_3,$$

где

$$T_k(a) = 1, \quad T_k(b) = (-1)^k, \quad k = 1, 2,$$

T_3 – 22-мерное неприводимое представление.

Элементом группы соответствуют параболические формы: $\eta(23z)\eta(z), \eta(22z)\eta(2z), \eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$.

Эта группа содержит в качестве подгруппы группы: $\langle a, b : a^{23} = e, b^{11} = e, b^{-1}ab = a^{10} \rangle, D_{23}$.

8. Метациклические группы, не имеющие представлений допустимого типа. В этом пункте мы рассмотрим группы, элементы которых имеют допустимые порядки, но для самих групп не существует представлений искомого типа. Отсутствие искомого представления доказывается на основе анализа таблицы неприводимых представлений группы, причем не обязательно рассматривать представления для всех элементов группы.

Все эти значения указаны в следующей таблице:

m	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	7	7	7	11
s	10	14	16	24	12	14	16	20	6	10	20	14	18	9	22
r	2	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	6	3	2	10

В качестве примера приведем доказательство для группы $\langle a, b : a^3 = e, b^{16} = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$.

Для этой группы не существует представления искомого типа, так как если у линейного оператора $T(ab^2)$ мы получим искомый набор собственных значений (это все корни степени 24 из 1), то среди собственных значений оператора $T(b)$, соответствующих двумерным неприводимым представлениям, входящим в искомое представление, содержатся все первообразные корни степени 16 из 1, но в искомое представление необходимо также включить одномерные представления, которые переводят элемент b в первообразные корни степени 16 из 1. Получим противоречие, так как элемент b должен соответствовать форме $\eta(16z)\eta(8z)$.

Для других групп доказательство проводится аналогичными рассуждениями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воскресенская Г. В. Модулярные формы и представления групп // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 1. С. 25–31.
- [2] Воскресенская Г. В. Параболические формы и конечные подгруппы в $SL(5, \mathbb{C})$ // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 2. С. 71–73.
- [3] Воскресенская Г. В. Модулярные формы и регулярные представления групп порядка 24 // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 292–294.
- [4] Воскресенская Г. В. Модулярные формы и представления групп диэдра // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 1. С. 130–133.

Самарский государственный университет
E-mail: vosk@info.ssu.samara.ru

Поступило
12.05.1999