Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Горелов, Об алгебраической независимости значений E -функций в особых точках и гипотезе Зигеля, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 174–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:36:32

УДК 511.36

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ E -ФУНКЦИЙ В ОСОБЫХ ТОЧКАХ И ГИПОТЕЗЕ ЗИГЕЛЯ

В. А. Горелов

Доказывается обобщение известной в теории трансцендентных чисел теоремы Шидловского об алгебраической независимости значений E -функций, удовлетворяющей системе линейных дифференциальных уравнений. Рассматривается случай, когда точки, в которых берутся значения E -функций, являются особыми точками этих систем. На основе полученных результатов доказывается гипотеза Зигеля о представимости всякой E -функции, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению, в виде многочлена от гипергеометрических E -функций для случая дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Библиография: 4 названия.

Введение

В 1929 г. К.Зигель [1] опубликовал метод, позволяющий устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений целых аналитических функций некоторого класса (так называемых E -функций), удовлетворяющих системам линейных дифференциальных уравнений. Начиная с середины 50-х годов метод Зигеля получил дальнейшее развитие и обобщение в работах А.Б.Шидловского (современное изложение метода, связанные с ним понятия, обозначения и историю вопроса можно найти, например, в книге [2]).

Множество всех алгебраических чисел будем обозначать через $\mathbb{A}$, и если $\mathbb{K}$ – произвольное поле алгебраических чисел, то $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ будем обозначать множество целых чисел поля $\mathbb{K}$.

Пусть E -функции

$$f_1(z), \dots, f_m(z) \quad (1)$$

составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y'_k = \sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i, \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \dots, m, \quad m \geq 2 \quad (2)$$

(либо системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_k = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i, \quad Q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \dots, m, \quad m \geq 1), \quad (3)$$

$T = T(z)$ – наименьшее общее кратное знаменателей функций $Q_{k,i}$.

Шидловским, в частности, была доказана следующая теорема (см. [2, гл. 4, § 4]; формулировка имеет двойной характер – для однородного и общего случаев).

ТЕОРЕМА. Пусть совокупность E -функций (1), $m \geq 2$ ($m \geq 1$), является решением системы (2) (системы (3)), степень однородной трансцендентности (соответственно степень трансцендентности) функций (1) над $\mathbb{C}(z)$ равна l , $0 \leq l \leq m$, а $\xi \in \mathbb{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$. Тогда степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) совокупности чисел

$$f_1(\xi), \dots, f_m(\xi) \quad (4)$$

также равна l .

При $\xi = 0$ числа (4) являются алгебраическими (это следует из определения E -функций), а в случае, когда ξ совпадает с особой точкой рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (т.е. когда $T(\xi) = 0$), никаких общих утверждений доказано не было.

К множеству E -функций относятся, в частности, гипергеометрические функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \left(\frac{z}{t} \right)^{tn},$$

где $t \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_n = \frac{[\alpha_1, n] \dots [\alpha_{m-t}, n]}{[\beta_1, n] \dots [\beta_m, n]}, \quad [\alpha, 0] = 1, \quad [\alpha, n] = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1),$$

если параметры $\alpha_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{Q}$.

В настоящей работе дается попытка усовершенствовать метод Зигеля с тем, чтобы его можно было использовать для исследования арифметической природы значений функций (1) и их производных в особых точках. Доказывается следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть совокупность E -функций (1), $m \geq 2$ ($m \geq 1$), является решением системы (2) (системы (3)), степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) функций (1) над $\mathbb{C}(z)$ равна l , $0 \leq l \leq m$, а $\xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. Тогда степень однородной трансцендентности (степень трансцендентности) совокупности чисел

$$f_1(\xi), \dots, f_m(\xi), f'_1(\xi), \dots, f'_m(\xi), \dots, f_1^{(k)}(\xi), \dots, f_m^{(k)}(\xi), \dots \quad (5)$$

также равна l .

ЗАМЕЧАНИЕ. Зная коэффициенты системы (2) (системы (3)), можно указать такое $k_0 \in \mathbb{Z}^+$, что утверждение теоремы 1 останется справедливым, если порядок производных во множестве (5) ограничить числом k_0 .

Зигель доказал, что всякий многочлен с алгебраическими коэффициентами от z и конечного числа гипергеометрических E -функций, а также функций, получающихся из них заменой z на αz при $\alpha \in \mathbb{A}$, является E -функцией, удовлетворяющей некоторому дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$.

После этого возникла гипотеза (сформулированная в явном виде Зигелем в книге [3]) о представимости произвольной E -функции, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, в виде подобного многочлена. До сих пор в направлении решения этой задачи не было получено никаких результатов (см. [2, с. 189]).

С помощью теоремы 1 в настоящей работе устанавливается справедливость гипотезы Зигеля для случая дифференциальных уравнений 1-го порядка. А именно, доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Всякая E -функция $f(z)$, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, имеет вид*

$$f(z) = P_1(z)\varphi_\lambda(\alpha z) + P_2(z),$$

где $P_1(z), P_2(z) \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$,

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1) \dots (\lambda+n)}, \quad \lambda \in \mathbb{Q}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots$$

Доказательство теоремы 1 укладывается в традиционную схему метода Зигеля. При этом ряд лемм необходимо заменять на их более общие аналоги и добавлять новые.

1. Вспомогательные утверждения. Функциональная часть метода Зигеля остается неизменной. Как и в §§ 2–6 гл. 3 книги [2], сначала предположим, что функции (1), $m \geq 2$, являются аналитическими в некоторой области, содержащей точку $z = 0$, составляют решение системы (2) и линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$,

$$p = \min_{1 \leq i \leq m} \text{ord } f_i(z), \quad q = \max \left(\deg T, \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq m}} \deg TQ_{k,i} \right). \quad (6)$$

Далее, при $n \in \mathbb{N}$ строится линейная форма

$$R_1 = P_{1,1}y_1 + \dots + P_{1,m}y_m, \quad R_1 \neq 0, \quad P_{1,i} \in \mathbb{C}[z], \quad \deg P_{1,i} \leq n, \quad i = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Из линейной формы R_1 рекуррентным путем получается последовательность линейных форм

$$R_k = TDR_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (8)$$

$$R_k = P_{k,1}y_1 + \dots + P_{k,m}y_m, \quad P_{k,i} \in \mathbb{C}[z], \quad i = 1, \dots, m,$$

где D – дифференциальный оператор, имеющий вид

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m Q_{k,i}y_i \right) \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Если $y_1, \dots, y_m$ – произвольное решение системы (2), то, как легко убедиться,

$$DR_k = \frac{d}{dz} R_k.$$

Пусть

$$s \in \mathbb{Z}^+, \quad s < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \quad t = \frac{qm(m-1)}{2} + p + s. \quad (9)$$

ЛЕММА 1 (см. [2, гл. 3, леммы 8 и 9]). Пусть совокупность функций (1), $m \geq 2$, аналитических в некоторой области, содержащей точку $z = 0$, составляет решение системы (2) и линейно независима над $\mathbb{C}(z)$, а линейная форма (7) при $y_i = f_i(z)$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяет условию

$$\text{ord } R_1(z) \geq m(n+1) - s - 1. \quad (10)$$

Тогда существует постоянная n_0 , зависящая только от функций (1) и m , такая, что при $n \geq n_0$ линейные формы

$$R_k = P_{k,1}y_1 + \dots + P_{k,m}y_m, \quad P_{k,i} \in \mathbb{C}[z], \quad k, i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

получающиеся из формы R_1 с помощью равенств (8), линейно независимы и определитель

$$\Delta = \Delta(z) = |P_{k,i}|_{k,i=1,\dots,m} \quad (12)$$

форм (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= z^{mn-s-p} \Delta_1(z), \quad \Delta_1(z) \neq 0, \quad \Delta_1(z) \in \mathbb{C}[z], \\ \deg \Delta_1(z) &= \kappa, \quad 0 \leq \kappa \leq t. \end{aligned} \quad (13)$$

В настоящей работе символом $R_k^{(j)}(z, \bar{y})$ будет обозначаться производная j -го порядка от линейной формы R_k по z , т.е. линейная форма от переменных $y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_m, \dots, y_1^{(j)}, \dots, y_m^{(j)}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$:

$$\begin{aligned} R_k^{(j)}(z, \bar{y}) &= P_{k,1}^{(j)}y_1 + \dots + P_{k,m}^{(j)}y_m + \binom{j}{1} P_{k,1}^{(j-1)}y'_1 + \dots + \binom{j}{1} P_{k,m}^{(j-1)}y'_m \\ &+ \dots + P_{k,1}^{(j)}y_1^{(j)} + \dots + P_{k,m}^{(j)}y_m^{(j)}. \end{aligned}$$

Как оказывается, для таких форм справедлив следующий аналог леммы 10 гл. 3 книги [2].

ЛЕММА 2. Пусть совокупность функций (1), $m \geq 2$, аналитических в некоторой области, содержащей точку $z = 0$, составляет решение системы (2) и линейно независима над $\mathbb{C}(z)$, числа p, q, s, t задаются формулами (6) и (9), а число n_0 определяется в лемме 1. Далее, пусть линейная форма (7) такова, что $n \geq n_0$, и при $y_i = f_i(z)$, $i = 1, \dots, m$, выполняется условие (10), а $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Тогда: 1) среди $m(t+1)$ линейных форм

$$R_1(\alpha, \bar{y}), R'_1(\alpha, \bar{y}), \dots, R_1^{(t)}(\alpha, \bar{y}), \dots, R_m(\alpha, \bar{y}), R'_m(\alpha, \bar{y}), \dots, R_m^{(t)}(\alpha, \bar{y})$$

от переменных

$$y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_m, \dots, y_1^{(t)}, \dots, y_m^{(t)}, \quad (14)$$

где

$$R_k^{(j)}(\alpha, \bar{y}) = P_{k,1}^{(j)}(\alpha)y_1 + \dots + P_{k,m}^{(j)}(\alpha)y_m + \dots \quad (15)$$

$$+ P_{k,1}^{(j)}(\alpha)y_1^{(j)} + \dots + P_{k,m}^{(j)}(\alpha)y_m^{(j)}, \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, t,$$

можно выбрать t линейно независимых форм;

2) если в линейные формы (15) вместо переменных

$$y'_1, \dots, y'_m, \dots, y_1^{(t)}, \dots, y_m^{(t)} \quad (16)$$

подставить произвольные линейные формы от переменных (14) и привести подобные члены, то среди вновь полученных $m(t+1)$ линейных форм от переменных (14) можно выбрать t линейно независимых форм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду того, что выполняются все условия леммы 1, справедливо равенство (13). Поскольку число $\alpha \neq 0$, то если оно является корнем многочлена $\Delta(z)$, кратность τ этого корня удовлетворяет неравенству $0 \leq \tau \leq t$. Линейные формы $R_1, \dots, R_m$, определитель $\Delta(z)$ (12) и алгебраические дополнения $\Delta_{k,i}(z)$ элементов $P_{k,i}$ в этом определителе связаны соотношениями

$$\Delta(z)y_j = \sum_{k=1}^m \Delta_{k,j}(z)R_k, \quad j = 1, \dots, m,$$

тождественно по $y_1, \dots, y_m$ и z . Продифференцировав каждое из этих равенств τ раз (при дифференцировании линейных форм тождественность по переменным (14) и z сохраняется), получим

$$\Delta^{(\tau)}(z)y_j + \sum_{\lambda=0}^{\tau-1} \binom{\tau}{\lambda} \Delta^{(\lambda)}(z)y_j^{(\tau-\lambda)} = \sum_{\lambda=0}^{\tau} \sum_{k=1}^m \binom{\tau}{\lambda} \Delta_{k,j}^{(\tau-\lambda)}(z)R_k^{(\lambda)}(z, \bar{y}),$$

$$j = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Поскольку $\Delta^{(\lambda)}(\alpha) = 0, \lambda = 0, 1, \dots, \tau-1; \Delta^{(\tau)}(\alpha) = \beta \neq 0$, положив в тождествах (17) $z = \alpha$ и обозначив

$$\binom{\tau}{\lambda} \Delta_{k,j}^{(\tau-\lambda)}(\alpha) = \beta_{k,j,\lambda},$$

получим

$$\beta y_j = \sum_{\lambda=0}^{\tau} \sum_{k=1}^m \beta_{k,j,\lambda} R_k^{(\lambda)}(\alpha, \bar{y}) = \sum_{\lambda=0}^{\tau} \sum_{k=1}^m \beta_{k,j,\lambda} (P_{k,1}^{(\lambda)}(\alpha)y_1 + \dots + P_{k,m}^{(\lambda)}(\alpha)y_m + \dots + P_{k,1}^{(\lambda)}(\alpha)y_1^{(\lambda)} + \dots + P_{k,m}^{(\lambda)}(\alpha)y_m^{(\lambda)}), \quad j = 1, \dots, m. \quad (18)$$

Так как $y_1, \dots, y_m$ как линейные формы от переменных (14) имеют ранг m , ранг линейных форм (15) не меньше, чем m . Поскольку равенства (18) выполняются тождественно по переменным (16), они сохраняются, если в них вместо переменных (16) подставить любые линейные формы от переменных (14). Лемма 2 доказана.

Линейную форму R_1 , удовлетворяющую условиям лемм 1 и 2 в предположении, что функции (1) являются $\mathbb{K}E$ -функциями, $s = [\varepsilon n]$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < 1/2$,

$$t = \frac{qm(m-1)}{2} + [\varepsilon n] + p, \quad (19)$$

строим точно так же, как в §§ 8 и 9 гл. 3 книги [2]. При этом можно считать, что в системе (2) коэффициенты $Q_{k,i} \in \mathbb{K}(z)$, а многочлены $T, TQ_{k,i}$ и коэффициенты $P_{1,i}$ линейной формы R_1 принадлежат $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ (см. там же, §§ 2 и 9).

ЛЕММА 3 (см. [2, гл. 3, лемма 14]). Пусть функции (1), $m \geq 2$, являются $\mathbb{K}E$ -функциями, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < 1/2$. Тогда существует m многочленов

$$P_{1,k} = P_{1,k}(z) = \sum_{l=0}^n b_{1,k,l} z^l, \quad k = 1, \dots, m,$$

со следующими свойствами:

1) все $b_{1,k,l} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ в совокупности отличны от нуля и

$$|\overline{b_{1,k,l}}| = O(n^{(1+\varepsilon)n}), \quad k = 1, \dots, m, \quad l = 0, 1, \dots, n,$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по k и l ;

2) линейная форма

$$R_1 = P_{1,1}(z)f_1(z) + \dots + P_{1,m}(z)f_m(z) = \sum_{\nu=\tau}^{\infty} a_{\nu} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \quad (20)$$

такова, что

$$\text{ord } R_1 \geq \tau, \quad \tau = m(n+1) - [\varepsilon n] - 1;$$

3) коэффициенты ряда (20) при всех достаточно больших n удовлетворяют условию

$$|\overline{a_{\nu}}| = \nu^{\varepsilon\nu} O(n^n), \quad \nu \geq \tau,$$

равномерно по ν .

Теперь оценим модули значений числовых линейных форм $R_k^{(j)}(\xi, \bar{f}(\xi))$ и размеры коэффициентов $P_{k,j,i}(\xi)$ этих форм в точке $\xi \in \mathbb{A}$.

ЛЕММА 4. Пусть совокупность $\mathbb{K}E$ -функций (1), $m \geq 2$, составляет решение системы (2) и линейно независима над $\mathbb{C}(z)$, $\xi \in \mathbb{K}$, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = h$. Пусть линейная форма R_1 сконструирована по лемме 3 при каком-либо значении n , $n \geq n_0$, с заменой ε на $\varepsilon_1 = \varepsilon/(3m^2h)$ при некотором ε , $0 < \varepsilon < 1$, а число t_1 получается из t заменой в равенстве (19) ε на ε_1 . Тогда для линейных форм $R_k^{(j)}(z, \bar{y})$ и их коэффициентов $P_{k,j,i}(z)$ с ростом n выполняются оценки

$$|R_k^{(j)}(\xi, \bar{f}(\xi))| = O(n^{-(m-1-\varepsilon/2)n}), \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, t_1; \quad (21)$$

$$|\overline{P_{k,j,i}(\xi)}| = O(n^{(1+\varepsilon/4)n}), \quad (22)$$

$$k = 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, t_1, \quad i = 1, \dots, m(t_1 + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что коэффициенты линейных форм $R_k^{(j)}(z, \bar{y})$ совпадают с производными многочленов $P_{k,i}(z)$, умноженными на биномиальные коэффициенты вида $\binom{j}{r} \leq 2^j \leq c^n$, где $c > 0$ и не зависит от n , поэтому оценки (22)

можно получить из соответствующих оценок для величин $|\overline{P_{k,i}^{(j)}(\xi)}|$, $k, i = 1, \dots, m$,

$j = 0, 1, \dots, t_1$. Как и при доказательстве леммы 15 гл. 3 книги [2], для двух произвольных степенных рядов

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}, \quad \psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} z^{\nu}$$

условимся писать $\varphi(z) \ll \psi(z)$, если $|a_{\nu}| \leq b_{\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Будем использовать также обозначение

$$\varphi^*(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}| z^{\nu}.$$

Очевидно, что $\varphi(z) \ll \varphi^*(z)$ и что из соотношения $\varphi(z) \ll \psi(z)$ следуют соотношения $\varphi'(z) \ll \psi'(z)$ и $|\varphi(\xi)| \leq |\psi(|\xi|)|$. При доказательстве леммы 15 гл. 3 книги [2] было установлено, что

$$P_{k+1,i}(z) \ll c_1^k (1+z)^{kq+n} \prod_{\nu=0}^{k-1} (\nu q + n + m) O(n^{(1+\varepsilon_1)n}), \quad (23)$$

$$i = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots;$$

$$R_{k+1}(z) \ll c_1^k (1+z)^{kq} \prod_{\nu=0}^{k-1} \left(\nu q + \frac{d}{dz} \right) R_1^*(z), \quad k = 0, 1, \dots; \quad (24)$$

$$R_1^* = \sum_{\nu=\tau}^{\infty} \nu^{\varepsilon_1 \nu} \frac{z^{\nu}}{\nu!} O(n^n), \quad \tau = m(n+1) - [\varepsilon_1 n] - 1,$$

где c_1 – положительная постоянная, не зависящая от n . При этом соотношение (24) остается справедливым, если коэффициенты многочленов $P_{k+1,i}(z)$ заменить их сопряженными в поле $\mathbb{K}_i$ с любым номером.

Из соотношений (23), (24) для $k \leq m$ получаем

$$P_{k,i}(z) \ll n^m (1+z)^{mq+n} O(n^{(1+\varepsilon_1)n}), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$R_k(z) \ll c_2^m (1+z)^{mq} \left(1 + \frac{d}{dz} \right)^k R_1^*(z).$$

Дифференцируя эти соотношения j раз, $0 \leq j \leq t_1 = qm(m-1)/2 + [\varepsilon_1 n] + p$, получим

$$\begin{aligned} P_{k,i}^{(j)}(z) &\ll n^m (mq+n)^j (1+z)^{mq+n-j} O(n^{(1+\varepsilon_1)n}) \\ &\ll c_3^n n^{\varepsilon_1 n} (1+z)^{mq+n} O(n^{(1+\varepsilon_1)n}), \\ R_k^{(j)}(z, \bar{f}(z)) &\ll c_2^m (mq)^j (1+z)^{mq} \left(1 + \frac{d}{dz} \right)^{k+j} R_1^*(z) \\ &\ll c_4^n (1+z)^{mq} \left(1 + \frac{d}{dz} \right)^{k+j} \sum_{\nu=\tau}^{\infty} \nu^{\varepsilon_1 \nu} \frac{z^{\nu}}{\nu!} O(n^n) \\ &\ll c_4^n (1+z)^{mq} \sum_{\rho=0}^{k+j} \sum_{\nu=\tau}^{\infty} \binom{k+j}{\rho} \nu^{\varepsilon_1 \nu} \frac{z^{\nu-\rho}}{(\nu-\rho)!} O(n^n) \\ &\ll c_5^n (1+z)^{mq} \sum_{\nu=\tau-k-j}^{\infty} (\nu+k+j)^{\varepsilon_1(\nu+k+j)} \frac{z^{\nu}}{\nu!} O(n^n). \end{aligned}$$

Подставив в эти соотношения $z = \xi$ и оценив сумму ряда в правой части последнего соотношения по порядку его первым членом, получим

$$\begin{aligned} |\overline{P_{k,i}^{(j)}(\xi)}| &\leq c_6^n n^{\varepsilon_1 n} O(n^{(1+\varepsilon_1)n}) = c^{-n} O(n^{(1+3\varepsilon_1)n}), \\ |R_k^{(j)}(\xi, \bar{f}(\xi))| &\leq c_5^n \tau^{\varepsilon_1 \tau} \frac{|\xi|^{\tau-k-j}}{(\tau-k-j)!} O(n^n) \\ &\leq c_7^n n^{\varepsilon_1 m n} \frac{|\xi|^{m n}}{(m n - 2\varepsilon_1 n - q(m-1)m/2 - p-1)!} O(n^n) \\ &\leq c_8^n n^{\varepsilon_1 m n} (m n - 2\varepsilon_1 n - c_9)^{-(m n - 2\varepsilon_1 n - c_9)} O(n^n) \\ &\leq c_{10}^n O(n^{n+\varepsilon_1 m n - m n + 2\varepsilon_1 n}) \leq O(n^{-(m-1-\varepsilon_1(m+3))n}). \end{aligned}$$

Из полученных неравенств следуют оценки (21) и (22).

ЛЕММА 5. Пусть совокупность $\mathbb{K}E$ -функций (1), $m \geq 2$, составляет решение системы (2) и имеет ранг $r \geq 1$ над полем $\mathbb{C}(z)$, а $\xi \in \mathbb{K}$. Тогда ρ – ранг совокупности чисел (5) над полем $\mathbb{K}$ – удовлетворяет неравенству $1 \leq \rho \leq r$.

Действительно, если бы $\rho = 0$, то все функции (1) были бы тождественно равны нулю. Далее, ранг ρ не может превышать ранга совокупности функций

$$f_1(z), \dots, f_m(z), f_1'(z), \dots, f_m'(z), \dots, f_1^{(k)}(z), \dots, f_m^{(k)}(z), \dots \quad (25)$$

над полем $\mathbb{C}(z)$ – в противном случае всякие ρ функций из (25) будут связаны линейным уравнением над $\mathbb{K}(z)$, и полагая в этих уравнениях $z = \xi$, придем к противоречию. Но поскольку функции (1) удовлетворяют системе (2), все функции из совокупности (25) линейно выражаются через функции (1). Следовательно, $\rho \leq r$, и лемма доказана.

Рассмотрим какие-нибудь ρ линейно независимых над $\mathbb{K}$ чисел из множества (5) и обозначим их $g_1(\xi), \dots, g_\rho(\xi)$. Соответствующие им функции $g_1(z), \dots, g_\rho(z)$ будут, очевидно, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Дополним множество этих функций до базиса в линейном пространстве, порождаемом над $\mathbb{C}(z)$ функциями (25). Элементы этого базиса

$$g_1(z), \dots, g_r(z) \quad (26)$$

также будем брать из совокупности (25). Производные $g_1'(z), \dots, g_r'(z)$ функций (26) с помощью уравнений (2) можно выразить в виде линейных комбинаций функций (1), а поскольку функции (1), в свою очередь, представляются как линейные комбинации функций (26) с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, совокупность функций (26) составляет решение системы

$$y_k' = \sum_{i=1}^r q_{k,i} y_i, \quad q_{k,i} \in \mathbb{C}(z), \quad k = 1, \dots, r.$$

Очевидна следующая

ЛЕММА 6. Пусть $\mathbb{V}$ – произвольное поле, $\mathbb{W}$ – содержащее его кольцо, а множества A и B таковы, что $A \subset B \subset \mathbb{W}$ и каждый элемент множества B можно представить как конечную линейную комбинацию элементов множества A с коэффициентами из $\mathbb{V}$. Тогда:

- 1) $\text{rang}_{\mathbb{V}} B = \text{rang}_{\mathbb{V}} A$;
- 2) $\deg \text{tr}_{\mathbb{V}}^0 B = \deg \text{tr}_{\mathbb{V}}^0 A$.

Из леммы 6 и сказанного перед ней следует, что условия и утверждение теоремы 1 для функций (1) выполняются тогда и только тогда, когда они выполняются для функций (26), за исключением тривиальных случаев $r = \rho = 0$ и $r = \rho = 1$. Поэтому при доказательстве теоремы 1 без уменьшения общности можно ограничиться рассмотрением случая, когда функции (1) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, числа

$$f_1(\xi), \dots, f_\rho(\xi) \quad (27)$$

линейно независимы над $\mathbb{K}$, а $\deg \text{tr}_{\mathbb{K}}^0 \{f_1(\xi), \dots, f_\rho(\xi)\} = l'$, где l' – степень однородной трансцендентности совокупности чисел (5).

При этих предположениях для произвольного $t \in \mathbb{N}$ каждое число из совокупности $f_k^{(j)}(\xi)$, $k = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, t$, единственным образом можно представить в виде

$$f_k^{(j)}(\xi) = c_{k,j,1} f_1(\xi) + \dots + c_{k,j,\rho} f_\rho(\xi), \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, t. \quad (28)$$

Для дальнейшего необходимо оценить размеры коэффициентов линейных комбинаций (28), а также величину их общих знаменателей, т.е. чисел $d_t \in \mathbb{N}$ таких, что $d_t c_{k,j,\lambda} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $k = 1, \dots, m$, $\lambda = 1, \dots, \rho$, $j = 0, 1, \dots, t$.

ЛЕММА 7. Пусть совокупность $\mathbb{K}\mathbb{E}$ -функций (1), $m \geq 2$, составляет решение системы (2), $\xi \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = h$, ранг совокупности чисел (5) над полем $\mathbb{K}$ равен ρ , а числа (27) линейно независимы над $\mathbb{K}$. Тогда при любом $t \in \mathbb{N}$ для размеров коэффициентов линейных комбинаций (28) и наименьшего общего знаменателя d_t этих коэффициентов справедливы оценки

$$\overline{|c_{k,j,\lambda}|} = O(c^t t^{(m+1)t}), \quad k = 1, \dots, m, \quad \lambda = 1, \dots, \rho, \quad j = 0, 1, \dots, t; \quad (29)$$

$$d_t = O(c^t t^{hm^2 t}). \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что при любом фиксированном k , $1 \leq k \leq m$, числа $f_k^{(j)}(\xi)$, $j = 0, 1, \dots, t$, можно представить в виде линейных комбинаций чисел $f_k^{(j)}(\xi)$, $j = 0, 1, \dots, j_0$, с коэффициентами из $\mathbb{K}$ так, что для размеров этих коэффициентов также выполняется оценка (29); наименьший общий знаменатель этих коэффициентов не превосходит $O(c^t t^{hm^2 t})$, а j_0 не зависит от t . Для доказательства последнего утверждения заметим, что при условиях леммы всякая функция $f_k(z)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения

$$p_m(z)y^{(m)} + p_{m-1}(z)y^{(m-1)} + \dots + p_0(z)y = 0, \quad (31)$$

$$p_i(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad \mu = \max \deg p_i.$$

Разложим функцию $f_k(z)$, а также многочлены $p_i(z)$ в степенные ряды по степеням $z - \xi = \zeta$:

$$f_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \zeta^{\nu}, \quad p_i(z) = p_{i,0} + p_{i,1} \zeta + \dots + p_{i,\mu} \zeta^{\mu},$$

$$p_{i,\lambda} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad \Omega_1 = \max_{i,\lambda} \overline{|p_{i,\lambda}|}, \quad \Omega_2 = \min_{p_{i,\lambda} \neq 0} \overline{|p_{i,\lambda}|}.$$

При подстановке этих разложений в равенство (31) получим линейные уравнения над $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, связывающие числа $a_{\nu} = f_k^{(\nu)}(\xi)/\nu!$. Рассмотрим эти уравнения более подробно. Приравняем в равенстве (31) коэффициенты при степенях $\zeta^{\nu-m}$, записав, для большей наглядности, в отдельные столбцы коэффициенты, получающиеся из произведений $p_i(z)f_k^{(i)}(z)$:

$$\begin{pmatrix} p_{m,0}\nu \dots (\nu-m+1)a_{\nu} \\ p_{m,1}(\nu-1) \dots (\nu-m)a_{\nu-1} \\ \dots \\ p_{m,\mu}(\nu-\mu) \dots (\nu-\mu-m+1)a_{\nu-\mu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{m-1,0}(\nu-1) \dots (\nu-m+1)a_{\nu-1} \\ p_{m-1,1}(\nu-2) \dots (\nu-m)a_{\nu-2} \\ \dots \\ p_{m-1,\mu}(\nu-\mu-1) \dots (\nu-\mu-m+1)a_{\nu-\mu-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} p_{0,0}a_{\nu-m} \\ p_{0,1}a_{\nu-m-1} \\ \dots p_{0,\mu}a_{\nu-m-\mu} \end{pmatrix} = 0. \quad (32)$$

При этом можно считать, что $a_{\nu} = 0$ для всех $\nu < 0$. В левой части равенства (32) приведем подобные члены и обозначим $q_s = q_s(\nu)$ коэффициенты при величинах $a_{\nu-s}$, $s = 0, 1, \dots, m + \mu$. Очевидно, что $q_s \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[\nu]$, $\deg_{\nu} q_s \leq m$. Докажем, что найдется $q_s(\nu) \neq 0$. Выберем индекс i наибольшим из возможных так, чтобы $p_i(z) \neq 0$, и обозначим его i_0 . Пусть p_{i_0, λ_0} – коэффициент при наименьшей степени при разложении многочлена $p_{i_0}(z)$ по степеням $\zeta = z - \xi$, отличный от нуля. Тогда одночленом старшей степени по ν в многочлене $q_{m-i_0+\lambda_0}(\nu)$ будет $p_{i_0, \lambda_0} \nu^{i_0}$ и, следовательно, $q_{m-i_0+\lambda_0}(\nu) \neq 0$. Таким образом, не все многочлены $q_s(\nu)$ тождественно равны нулю. Возьмем значение s наименьшим из возможных так, чтобы $q_s(\nu) \neq 0$, и обозначим его s_0 . Тогда $s_0 \leq m$, а $q_{s_0}(\nu) \neq 0$ при всех $\nu \geq \nu_0 = m + s_0 + m\Omega_1/\Omega_2$. Уравнение (32) запишется в виде

$$q_{s_0}(\nu)a_{\nu-s_0} + q_{s_0+1}(\nu)a_{\nu-s_0-1} + \dots + q_{m+\mu}(\nu)a_{\nu-m-\mu} = 0. \quad (33)$$

Степень многочлена $q_{s_0}(\nu)$ может быть меньше, чем степень многочлена $q_{s_0+i}(\nu)$, $i \geq 1$, но не более, чем на m . Поэтому

$$\left| \frac{q_{s_0+i}(\nu)}{q_{s_0}(\nu)} \right| \leq c_1 \nu^m. \quad (34)$$

Из уравнения (33) можно последовательно выразить числа $a_{\nu_0-s_0}$, $a_{\nu_0-s_0+1}$, $\dots$ в виде линейных комбинаций величин $a_{\nu_0-s_0-1}$, $\dots$, a_0 (вообще говоря, линейно зависимых над $\mathbb{K}$):

$$a_{\nu} = A_{\nu, \nu_0-s_0-1} a_{\nu_0-s_0-1} + \dots + A_{\nu, 0} a_0, \quad \nu = \nu_0 - s_0, \dots, t. \quad (35)$$

Для коэффициентов $A_{\nu,i}$, как следует из неравенства (34), будут справедливы оценки

$$A_{\nu,i} \leq c_2^{\nu} (\nu!)^m.$$

Кроме того, из уравнения (33) получаем, что коэффициенты $A_{\nu,i}$, $i = 0, \dots, \nu_0 - s_0 - 1$, $\nu = \nu_0 - s_0, \dots, t$, станут целыми алгебраическими, если их умножить на целое алгебраическое число

$$\omega(t) = \prod_{\nu=\nu_0-s_0}^t q_{s_0}(\nu).$$

Следовательно, наименьший общий знаменатель d_t^* коэффициентов $A_{\nu,i}$ линейных комбинаций (35) является делителем $\text{Norm}(\omega(t))$ и поэтому

$$d_t^* \leq \text{Norm}(\omega(t)) \leq c_3^t t^{hmt}.$$

Пользуясь тем, что $a_{\nu} = f_k^{(\nu)}(\xi)/\nu!$ и учитывая замечание в начале доказательства леммы, отсюда получаем оценки (29) и (30).

ЛЕММА 8. Пусть совокупность $\mathbb{K}E$ -функций (1), $m \geq 2$, составляет решение системы (2) и линейно независима над $\mathbb{C}(z)$, $\xi \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta)$, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = h$. Тогда ранг ρ над полем $\mathbb{K}$ совокупности чисел (5) удовлетворяет неравенству $\rho \geq m/h$, а если $\theta \notin \mathbb{R}$, то неравенству $\rho \geq 2m/h$. В частности, если $\mathbb{K}$ – мнимое квадратичное поле, то $\rho = m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5 $1 \leq \rho \leq m$. Если $\rho = m$, то все доказано. Пусть $1 \leq \rho < m$, а числа (27) линейно независимы над $\mathbb{K}$.

Заменив в лемме 3 ε на $\varepsilon_1 = \varepsilon/(3m^2h)$, сконструируем линейную форму R_1 . Рассмотрим, как это сделано перед формулировкой леммы 2, $m(t_1 + 1)$ линейных форм $R_k^{(j)}(z, \bar{y})$, где $t_1 = q(m - 1)m/2 + [\varepsilon_1 n] + p$. Подставив в эти формы вместо z число ξ , получим $m(t_1 + 1)$ числовых линейных форм $R_k^{(j)}(\xi, \bar{f}(\xi))$ (15) от чисел $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi), f_1'(\xi), \dots, f_m^{(t_1)}(\xi)$, для которых справедливы оценки (21) и (22). Подставим в линейные числовые формы (15) вместо чисел $f_1'(\xi), \dots, f_m^{(t_1)}(\xi)$ их выражения в виде линейных комбинаций чисел (27) с коэффициентами из $\mathbb{K}$:

$$f_k^{(j)}(\xi) = c_{k,j,1} f_1(\xi) + \dots + c_{k,j,\rho} f_{\rho}(\xi), \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, t_1. \quad (36)$$

Согласно второму утверждению леммы 2 из полученных таким образом $m(t_1 + 1)$ числовых линейных форм от чисел (4) можно выбрать m линейно независимых. Обозначим эти линейные формы

$$\bar{L}_k = \bar{a}_{k,1} f_1(\xi) + \dots + \bar{a}_{k,m} f_m(\xi), \quad k = 1, \dots, m.$$

Очевидно, что формы $\bar{L}_i$ численно совпадают с соответствующими формами $R_k^{(j)}(\xi, \bar{f}(\xi))$, а размеры коэффициентов $\bar{a}_{k,\lambda}$ не превосходят произведения максимума размеров коэффициентов линейных форм $R_k^{(j)}(\xi, \bar{y})$ на t_1 и на максимум величин (29), где $t = t_1$, т.е.

$$\begin{aligned} |\bar{a}_{k,\lambda}| &= O(n^{(1+\varepsilon/4)n}) c_1^n n^{\varepsilon_1(m+1)n} = O(c_1^n n^{(1+\varepsilon/4+\varepsilon(m+1)/(3m^2))n}) \\ &= O(c_1^n n^{(1+\varepsilon/2)n}). \end{aligned}$$

Наименьший общий знаменатель коэффициентов $\bar{a}_{k,\lambda}$ не превосходит произведения общего знаменателя d_{t_1} чисел $c_{k,j,i}$ из равенства (36) на a^{σ_0} , где a – знаменатель числа ξ , т.е. $a\xi \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, а σ_0 – наибольшая степень многочленов $P_{k,i}^{(j)}(z)$, $\sigma_0 \leq n + q(m-1) = O(n)$. Из оценок (30), положив в них $t = t_1$, найдем, что коэффициенты линейных форм $\bar{L}_k$ можно сделать целыми алгебраическими, если умножить эти формы на число, не превосходящее

$$O(c_2^n n^{\varepsilon_1 m^2 h n}) = O(c_2^n n^{\varepsilon n/3}).$$

Обозначим полученные таким образом линейные формы

$$L_k = \sum_{\lambda=1}^m a_{k,\lambda} f_{\lambda}(\xi), \quad a_{k,\lambda} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Тогда из найденных оценок и (21) следуют оценки

$$L_k = O(n^{-(m-1-\varepsilon)n}), \quad |\overline{a_{k,\lambda}}| = O(n^{(1+\varepsilon)n}), \quad k, \lambda = 1, \dots, m,$$

причем они сохраняются, если все коэффициенты степенного ряда $L_k(z)$ и число ξ заменить на сопряженные числа из поля $\mathbb{K}_i$, сопряженного полю $\mathbb{K}$, $i = 1, \dots, h$.

Далее дословно повторяем соответствующие рассуждения леммы 17 гл. 3 книги [2].

Пусть $\mathbb{W}$ – произвольное кольцо, A – произвольное множество из $\mathbb{W}$. Для любого $N \in \mathbb{N}$ обозначим $L_N^0(A)$ совокупность произведений степеней

$$u_1^{k_1} \dots u_n^{k_n}, \quad n \leq N, \quad k_1 + \dots + k_n = N,$$

где при каждом возможном n числа $(k_1, \dots, k_n)$ пробегает всевозможные системы из n натуральных чисел, удовлетворяющих указанному равенству, а $(u_1, \dots, u_n)$ пробегает всевозможные системы из n элементов, принадлежащих множеству A .

ЛЕММА 9. *При условиях леммы 6*

$$\text{rang}_{\mathbb{V}} L_N^0(B) = \text{rang}_{\mathbb{V}} L_N^0(A),$$

а если множество A конечно, $\deg \text{tr}_{\mathbb{V}}^0 A = l$, $l \geq 1$, то существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , зависящие только от множества A и поля $\mathbb{V}$, такие, что выполняются неравенства

$$c_1 N^{l-1} \leq \text{rang}_{\mathbb{V}} L_N^0(B) \leq c_2 N^{l-1}.$$

Лемма 9 следует из леммы 6 настоящей работы и леммы 6 гл. 4 книги [2].

2. Доказательство теоремы 1. Достаточно рассмотреть лишь однородный случай, так как общий сводится к однородному добавлением функции $f_0(z) \equiv 1$. При этом, как уже установлено ранее, без уменьшения общности можно ограничиться случаем, когда числа (27) линейно независимы над $\mathbb{K}$, функции (1) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, а $\deg \text{tr}_{\mathbb{K}}^0 \{f_1(\xi), \dots, f_{\rho}(\xi)\} = l'$, где l' – степень однородной трансцендентности совокупности чисел (5). Докажем, что $l' \leq l$. При $l' = 0$ это неравенство справедливо. Если же $l' \geq 1$, то выберем среди чисел (27) l' однородно алгебраически независимых.

По лемме 19 гл. 3 книги [2] соответствующие им функции из множества (1) однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Следовательно, $l' \leq l$.

Теперь докажем, что $l \leq l'$. Если $l = 0$, то неравенство справедливо. Допустим, что $l \geq 1$. Возьмем в леммах 6 и 9 в качестве $\mathbb{V}$, A и B соответственно поле $\mathbb{C}(z)$, множество функций (1) и множество функций (25). Тогда ввиду наличия системы (2) условия этих лемм выполняются и, следовательно, число

$$\begin{aligned} r_N^0 &= \text{rang}_{\mathbb{C}(z)} L_N^0(\{f_1(z), \dots, f_m(z)\}) \\ &= \text{rang}_{\mathbb{C}(z)} L_N^0(\{f_1(z), \dots, f_m(z), \dots, f_1^{(k)}(z), \dots, f_m^{(k)}(z), \dots\}) \end{aligned}$$

удовлетворяет неравенству

$$c_1 N^{l-1} \leq r_N^0 \leq c_2 N^{l-1}, \quad (37)$$

где c_1 и c_2 – положительные постоянные, не зависящие от N . Теперь возьмем в леммах 6 и 9 в качестве $\mathbb{V}$, A , B и l , соответственно, поле $\mathbb{K}$, множество чисел (4), множество чисел (5) и l' . Поскольку всякое число из (5) является линейной комбинацией чисел (4), то условия этих лемм выполняются, и, следовательно, для числа

$$\begin{aligned} \rho_N^0 &= \text{rang}_{\mathbb{K}} L_N^0(\{f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)\}) \\ &= \text{rang}_{\mathbb{K}} L_N^0(\{f_1(\xi), \dots, f_m(\xi), \dots, f_1^{(k)}(\xi), \dots, f_m^{(k)}(\xi), \dots\}) \end{aligned}$$

справедливы оценки

$$c_3 N^{l'-1} \leq \rho_N^0 \leq c_4 N^{l'-1}, \quad (38)$$

где c_3 и c_4 – положительные постоянные, не зависящие от N . Согласно лемме 18 гл. 3 книги [2] совокупность функций $L_N^0(\{f_1(z), \dots, f_m(z)\})$ составляет решение системы вида (2). Отсюда, учитывая леммы 6, 9 и лемму 8, в которой положим $m = r_N^0$, имеем

$$\rho_N^0 \geq \frac{r_N^0}{h}. \quad (39)$$

Из неравенств (37), (38) и (39) следует, что

$$\frac{c_1 N^{l-1}}{h} \leq \rho_N^0 \leq c_4 N^{l'-1}$$

при всех достаточно больших N , откуда $l \leq l'$. Теорема 1 доказана.

Следует отметить, что если теорему 1 переформулировать для случая E -функции $f(z)$, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению порядка m , то число k_0 из замечания к теореме 1 явно выражается через характеристики коэффициентов этого уравнения. Как следует из равенства (35) в доказательстве леммы 7, $k_0 \leq m - 1 + m\Omega_1/\Omega_2$. Эта оценка точна, например, для функций $(z-1)^n e^z$, удовлетворяющих уравнениям $(z-1)y'_n = (z-1+n)y_n$, где $n \in \mathbb{Z}^+$, $\xi = m = \Omega_2 = 1$, $k_0 = \Omega_1 = n$.

3. Доказательство теоремы 2. Аналитическая функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$$

называется E -функцией, если:

1°. $c_n \in \mathbb{K}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $\mathbb{K}$ – алгебраическое поле;

2°. при любом $\varepsilon > 0$

$$\overline{|c_n|} = O(n^{\varepsilon n}), \quad n \rightarrow \infty;$$

3°. существует последовательность $\{d_n\}$, $d_n \in \mathbb{N}$, такая, что $d_n c_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, и $d_n = O(n^{\varepsilon n})$ при $n \rightarrow \infty$.

Из этого определения следует, что всякая E -функция является целой трансцендентной функцией 1-го порядка либо многочленом.

Пусть E -функция $f(z)$ трансцендентна и удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$Q_1 y' + Q_0 y = Q, \quad Q_1, Q_0, Q \in \mathbb{C}[z]. \quad (40)$$

Как уже отмечалось ранее, можно считать, что многочлены Q_1 , Q_0 , Q принадлежат $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ и взаимно просты в совокупности. Из общих результатов теории Вимана–Валирона следует (см. [2, с. 208]), что $\deg Q_1 = \deg Q_0$. Автор имеет и непосредственное доказательство этого факта, использующее элементарные методы теории функций комплексного переменного. Как оказывается, уравнение (40) должно удовлетворять и другим ограничениям.

ЛЕММА 10. Пусть произвольная E -функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (40). Тогда если число 0 является корнем многочлена Q_1 кратности k , то $k = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условиях леммы $Q_0(0) \neq 0$, иначе многочлены Q_1 , Q_0 , Q можно было бы сократить на z . Разложим функцию $f(z)$ и многочлены Q_1 , Q_0 , Q в степенные ряды по степеням z :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, & Q_1(z) &= q_{1,k} z^k + \dots + q_{1,m} z^m, \\ Q_0(z) &= q_{0,0} + q_{0,1} z + \dots + q_{0,m} z^m, & Q(z) &= q_0 + q_1 z + \dots + q_{\mu} z^{\mu}, \\ m &= \deg Q_1 = \deg Q_0, & q_{0,0} &\neq 0. \end{aligned}$$

Допустим, что $k \geq 2$. Подставив эти разложения в уравнение (40), приравняем в нем коэффициенты при степенях z^n . Как и при доказательстве леммы 7, запишем, для большей наглядности, в отдельные столбцы коэффициенты, получающиеся из произведений $Q_i(z)f^{(i)}(z)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ q_{1,m}(n-m+1)a_{n-m+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{0,0}a_n \\ q_{0,1}a_{n-1} \\ \dots \\ q_{0,m}a_{n-m} \end{pmatrix} = q_n. \quad (41)$$

Из уравнения (41) получаем

$$a_n = -(q_{0,0})^{-1}((q_{1,2}(n-1) + q_{0,1})a_{n-1} + \dots + (q_{1,m}(n-m+1) + q_{0,m-1})a_{n-m+1} + q_{0,m}a_{n-m} - q_n). \quad (42)$$

Если положить $a_n = 0$ при $n < 0$, $q_n = 0$ при $n > \mu$ и при $n < 0$, то равенство (42) справедливо при всех целых n . Знаменатель алгебраического числа $(q_{0,0})^{-1}$ обозначим q . Тогда из равенства (42) следует, что наименьший общий знаменатель чисел $a_0, a_1, \dots, a_n$ (а также алгебраически сопряженных с ними) не превосходит q^n . Обозначив $a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(h)}$ числа, сопряженные с числом $a_n = a_n^{(1)} \neq 0$ в поле $\mathbb{K}$, откуда получим, что $|a_n^{(1)} \dots a_n^{(h)}| \geq q^{-nh}$. Но из определения E -функций следует

$$|a_n^{(1)} \dots a_n^{(h)}| = O\left(\frac{n^{\varepsilon n}}{n!}\right)^h.$$

Полученные оценки противоречат друг другу, что и завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 11. Пусть при условиях леммы 10 число $\xi \neq 0$ является корнем многочлена Q_1 кратности k . Тогда $k = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\xi \in \mathbb{A}$. Разложим функцию $f(z)$, а также многочлены Q_1, Q_0, Q в степенные ряды по степеням $z - \xi = \zeta$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n, \quad Q_1(z) = \bar{q}_{1,k} \zeta^k + \dots + \bar{q}_{1,m} \zeta^m, \\ Q_0(z) &= \bar{q}_{0,0} + \bar{q}_{0,1} \zeta + \dots + \bar{q}_{0,m} \zeta^m, \quad Q(z) = \bar{q}_0 + \bar{q}_1 \zeta + \dots + \bar{q}_\mu \zeta^\mu, \\ m &= \deg Q_1 = \deg Q_0, \quad \bar{q}_{0,0} \neq 0. \end{aligned}$$

Рассуждая, как и в лемме 10, при $k \geq 2$ получим равенство

$$\begin{aligned} b_n &= -(\bar{q}_{0,0})^{-1}((\bar{q}_{1,2}(n-1) + \bar{q}_{0,1})b_{n-1} + \dots + (\bar{q}_{1,m}(n-m+1) + \bar{q}_{0,m-1})b_{n-m+1} + \bar{q}_{0,m}b_{n-m} - \bar{q}_n). \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляя в это равенство $n = 0, 1, 2, \dots$, получим, что все числа b_n являются алгебраическими. Но согласно теореме 1 хотя бы одно из них должно быть трансцендентно. Следовательно, случай $k \geq 2$ невозможен.

ЛЕММА 12. Пусть при условиях леммы 10 число $\xi \neq 0$ является корнем многочлена Q_1 . Тогда $-Q_0(\xi)/Q_1'(\xi) \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 11 $Q_1'(\xi) = \bar{q}_{1,1} \neq 0$. Повторяя рассуждения леммы 11 при $k = 1$, вместо равенства (43) получим

$$\begin{aligned} b_n &= -(\bar{q}_{1,1}n + \bar{q}_{0,0})^{-1}((\bar{q}_{1,2}(n-1) + \bar{q}_{0,1})b_{n-1} + \dots + (\bar{q}_{1,m}(n-m+1) + \bar{q}_{0,m-1})b_{n-m+1} + \bar{q}_{0,m}b_{n-m} - \bar{q}_n), \quad \bar{q}_{0,0} \neq 0. \end{aligned}$$

Если $-\bar{q}_{0,0}/\bar{q}_{1,1} \notin \mathbb{N}$, то, подставляя в это равенство $n = 0, 1, 2, \dots$, заключаем, что все числа b_n являются алгебраическими. Но это противоречит теореме 1. Следовательно, лемма 12 доказана.

ЛЕММА 13. Пусть f , R_1 , R_2 , P_1 , P_2 – произвольные аналитические функции, причем функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = R_1 y + R_2.$$

Тогда функция $g = P_1 f + P_2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = \left(R_1 + \frac{P_1'}{P_1}\right)y - \left(R_1 + \frac{P_1'}{P_1}\right)P_2 + P_1 R_2 + P_2'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} g' &= P_1 f' + P_1' f + P_2' = P_1(R_1 f + R_2) + P_1' f + P_2' \\ &= (P_1 R_1 + P_1')f + P_1 R_2 + P_2' = (P_1 R_1 + P_1')(g - P_2)/P_1 + P_1 R_2 + P_2' \\ &= \left(R_1 + \frac{P_1'}{P_1}\right)g - \left(R_1 + \frac{P_1'}{P_1}\right)P_2 + P_1 R_2 + P_2', \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из лемм 10–12 следует, что для частного Q_0/Q_1 коэффициентов уравнения (40) разложение в сумму простейших дробей имеет вид $-a_0 + a/z - k_1/(z - \alpha_1) - \dots - k_m/(z - \alpha_m)$, где $k_i = -Q_0(\alpha_i)/Q_1'(\alpha_i) \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m$, а само уравнение (40) равносильно уравнению

$$y' = \left(a_0 - \frac{a}{z} + \frac{k_1}{z - \alpha_1} + \dots + \frac{k_m}{z - \alpha_m}\right)y + Q_2,$$

где $a_0, a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{A}$, $i = 1, \dots, m$, $Q_2 \in \mathbb{K}(z)$.

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_m)^{k_m}} - \frac{P(z)}{(z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_m)^{k_m}}, \quad (44)$$

где $P(z)$ – многочлен из $\mathbb{C}[z]$, подобранный так, чтобы функция $g(z)$ была целой (равенство (44) можно получить, например, из представления мероморфной функции $f(z)/((z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_m)^{k_m})$ в виде суммы главных частей ее лорановских разложений во всех конечных особых точках и целой функции $g(z)$). Применяя к функции $g(z)$ лемму 13, получим, что она удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(a_0 - \frac{a}{z}\right)y + Q_3, \quad (45)$$

где Q_3 – некоторая рациональная функция. Рассматривая возможные особые точки функции Q_3 , делаем вывод, что $Q_3 = Q_4 + q/z$, $Q_4 \in \mathbb{C}[z]$, $q \in \mathbb{C}$. Многочлен $P(z)$ можно подобрать так, чтобы $Q_4 \equiv 0$. Действительно, согласно лемме 13 если к $g(z)$ прибавить многочлен Q_4/a_0 (что равносильно изменению многочлена $P(z)$), то эта новая функция будет удовлетворять дифференциальному уравнению типа (45) с неоднородной частью $Q_5 + q/z$, $Q_5 \in \mathbb{C}[z]$, $q \in \mathbb{C}$, $\deg Q_5 < \deg Q_4$. Повторяя эту процедуру не более $\deg Q_4$ раз, получим, что целая функция $g(z)$ (44) удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(a_0 - \frac{a}{z}\right)y + \frac{q}{z}, \quad a_0, a \in \mathbb{Z}_K, \quad q \in \mathbb{C}, \quad q = ag(0).$$

Но тогда при $g(0) \neq 0$ функция $g(z/a_0)/g(0)$ удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(1 - \frac{a}{z}\right)y + \frac{a}{z}$$

и, кроме того, ее разложение в ряд Тейлора начинается с 1. Следовательно, $g(z/a_0)/g(0) = \varphi_a(z)$, откуда

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_m)^{k_m} g(z) + P(z) \\ &= (z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_m)^{k_m} g(0) \varphi_a(a_0 z) + P(z) \\ &= P_1(z) \varphi_a(a_0 z) + P(z). \end{aligned}$$

Если же $g(0) = 0$, то $q = 0$, $-a = k \in \mathbb{N}$, $g(z/a_0)/z^k = ce^z$ и

$$f(z) = cz^k (z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_m)^{k_m} e^{a_0 z} + P(z) = P_2(z) \varphi_0(a_0 z) + P(z).$$

Из полученных равенств следует, что $g(0)$, $c \in \mathbb{A}$, $P(z), P_1(z), P_2(z) \in \mathbb{A}[z]$. Далее, коэффициенты $b_n/n!$ разложения функции $\varphi_a(a_0 z)$ по степеням z можно последовательно выразить в виде линейных комбинаций коэффициентов $d_0, d_1/1!, \dots, d_n/n!$ степенного разложения функции $f(z) - P(z)$. Рассматривая коэффициенты этих линейных комбинаций, легко заметить, что они являются алгебраическими числами, знаменатели которых растут не быстрее, чем c_1^n , где $c_1 > 0$ – постоянная, зависящая только от коэффициентов многочлена $P_1(z)$. Поскольку разность $f(z) - P(z)$ является E -функцией, отсюда следует, что наименьший общий знаменатель алгебраических чисел $b_0, b_1, \dots, b_n$ не превосходит $O(n^{\varepsilon n})$, т.е. что $\varphi_a(a_0 z)$ также есть E -функция. Но последнее возможно лишь в случае $a \in \mathbb{Q}$ (см. [4]).

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929–1930. № 1. P. 1–70.
- [2] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М: Наука, 1987.
- [3] Siegel C. L. Transcendental Numbers. Princeton: Princeton Univ. Press, 1949.
- [4] Галочкин А. И. О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E -функций // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 1. С. 3–14.

Московский энергетический институт

Поступило

09.02.1999

Исправленный вариант

27.09.1999