Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Дурнев, Неразрешимость простого фрагмента позитивной теории с одной константой свободной полугруппы ранга 2, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 191–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:04:32

УДК 510

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ПРОСТОГО ФРАГМЕНТА ПОЗИТИВНОЙ ТЕОРИИ С ОДНОЙ КОНСТАНТОЙ СВОБОДНОЙ ПОЛУГРУППЫ РАНГА 2

В. Г. Дурнев

В статье исследуется алгоритмическая природа некоторых “простых” фрагментов позитивных теорий с “малым” числом констант свободных нециклических полугрупп. Библиография: 9 названий.

Через Π_n^- будем обозначать *свободную полугруппу ранга n без пустого слова* со свободными образующими $a_1, \dots, a_n$, а через Π_n – *свободную полугруппу с пустым словом ранга n* с теми же свободными образующими. Иногда Π_n называют *свободным моноидом ранга n* .

Еще в 1946 году В. Куайн [1] доказал, что при $n \geq 2$ *элементарная теория свободной полугруппы Π_n* , как и полугруппы Π_n^- , *алгоритмически неразрешима*.

С тех пор значительное внимание уделялось исследованию аналогичного вопроса для различных фрагментов элементарных теорий свободных полугрупп.

В работах [2], [3] для любого $n \geq 2$ построена формула

$$P_n(x, y) \equiv (\exists u)(\exists v_1)(\exists v_2) \left(\bigvee_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n (x = ua_i v_1 \ \& \ y = ua_j v_2) \vee \bigvee_{i=1}^n (x = ya_i v_1 \vee y = xa_i v_1) \right)$$

и доказано, что для любых двух элементов g и h полугруппы Π_n имеет место эквивалентность

$$g \neq h \text{ в полугруппе } \Pi_n \iff \Pi_n \models P_n(g, h).$$

Нетрудно понять, как эту формулу преобразовать в аналогичную формулу для полугруппы Π_n^- .

Поэтому из указанного результата В. Куайна сразу следует *алгоритмическая неразрешимость позитивных теорий полугрупп Π_n и Π_n^- при $n \geq 2$* , т.е. фрагментов элементарных теорий этих полугрупп, состоящих из формул, в которые из пропозициональных связок входят лишь конъюнкция и дизъюнкция, а из теоремы Г. С. Маканина [4] о разрешимости проблемы совместности для систем уравнений в свободной полугруппе Π_n (Π_n^-) вытекает *разрешимость экзистенциальной и универсальной теорий полугрупп Π_n и Π_n^-* – фрагментов элементарных теорий этих полугрупп, состоящих из

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

формул, имеющих предваренную нормальную форму с одним кванторным блоком в приставке.

В 1973 году нами [5] доказана неразрешимость фрагмента элементарной теории свободных полугрупп Π_n и Π_n^- при $n \geq 2$, состоящего из позитивных формул с кванторной приставкой типа $\exists\forall\exists^3$. В 1986 году С. С. Марченков в работе [6] доказал неразрешимость позитивной $\forall\exists^4$ -теории каждой из этих двух свободных полугрупп. Это улучшает результат работы [5] с точки зрения числа кванторных блоков в рассматриваемых формулах, но при этом общее число используемых кванторов в работах [5] и [6] одно и то же. В 1995 году в работе [7] нами доказана алгоритмическая неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$ -теории каждой из двух свободных полугрупп Π_n и Π_n^- при любом $n \geq 2$, что усиливает результаты работ [5] и [6].

Рассматриваемые в работах [6] и [7] формулы имеют достаточно простую кванторную приставку. В то же время их бескванторная часть содержит вхождения констант $a_1, \dots, a_n$.

Естественно возникает вопрос о разрешимости “простых” фрагментов позитивных теорий с “малым” числом констант полугрупп Π_n и Π_n^- .

В 1986 году Н. А. Перязев в работе [8] доказал, что при $n \geq 2$ позитивная теория свободной полугруппы Π_n с константами $a_1, \dots, a_{n-2}$ разрешима, а с константами $a_1, \dots, a_{n-1}$ алгоритмически неразрешима.

Целью настоящей заметки является установление алгоритмической природы некоторых “простых” фрагментов позитивных теорий с “малым” числом констант полугрупп Π_n и Π_n^- .

Следующая теорема существенно усиливает указанный выше результат Перязева об алгоритмической неразрешимости позитивной теории с константами $a_1, \dots, a_{n-1}$ полугруппы Π_n .

ТЕОРЕМА 1. При любом $n \geq 2$ позитивная $\forall^3\exists^3$ -теория с константами $a_1, \dots, a_{n-1}$ полугруппы Π_n алгоритмически неразрешима, в то время как при любом m позитивная $\forall\exists^m$ -теория с константами $a_1, \dots, a_{n-1}$ этой полугруппы разрешима.

СЛЕДСТВИЕ 1. Позитивная $\forall^3\exists^3$ -теория с одной константой a_1 полугруппы Π_2 алгоритмически неразрешима, в то время как при любом m позитивная $\forall^1\exists^m$ -теория с одной константой a_1 этой полугруппы разрешима.

Напомним, что в силу результата Перязева позитивная теория без констант полугруппы Π_2 разрешима.

ЗАМЕЧАНИЕ. Остается открытым вопрос о разрешимости позитивных $\forall^2\exists^m$ -теорий с константами $a_1, \dots, a_{n-1}$ полугруппы Π_n при различных m , в частности, вопрос о разрешимости позитивных $\forall^2\exists^m$ -теорий с одной константой a_1 полугруппы Π_2 при “небольших” m .

ТЕОРЕМА 2. При любом $n \geq 2$ и любом $1 \leq k \leq n$ элементарная $\forall^{k+1}\exists^3$ -теория с константами $a_1, \dots, a_{n-k}$ полугруппы Π_n алгоритмически неразрешима, в частности, алгоритмически неразрешима элементарная $\forall^{n+1}\exists^3$ -теория без констант этой полугруппы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Алгоритмически неразрешима элементарная $\forall^3\exists^3$ -теория без констант полугруппы Π_2 .

Выше уже отмечалось, что при любом m элементарная $\forall^m$ -теория и $\exists^m$ -теория свободной полугруппы Π_2 разрешима [4].

ТЕОРЕМА 3. *При любом $n \geq 2$ и любом $1 \leq k \leq n$ позитивная $\forall^{k+1}\exists^3$ -теория с константами $a_1, \dots, a_{n-k}$ полугруппы Π_n^- алгоритмически неразрешима, в то время как при любом m позитивная $\forall^k\exists^m$ -теория с константами $a_1, \dots, a_{n-k}$ этой полугруппы разрешима.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *При любом $n \geq 2$ позитивная $\forall^{n+1}\exists^3$ -теория без констант полугруппы Π_n^- алгоритмически неразрешима, в то время как при любом m позитивная $\forall^n\exists^m$ -теория без констант этой полугруппы разрешима.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Позитивная $\forall^3\exists^3$ -теория без констант полугруппы Π_2^- алгоритмически неразрешима, в то время как при любом m позитивная $\forall^2\exists^m$ -теория без констант этой полугруппы алгоритмически разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Как и в работе [6], в основу доказательства теоремы будет положено существование операторных алгоритмов с нерекурсивной областью определения [9], но в отличие от работы [6] мы воспользуемся операторными алгоритмами с “упрощенными” командами.

Пусть $\mathcal{A}$ – операторный алгоритм с нерекурсивной областью определения, программа которого состоит лишь из команд следующего вида:

- [$\times 2$] – умножить данное число на 2 и перейти к выполнению следующей по порядку команды;
- [$\times 3$] – умножить данное число на 3 и перейти к выполнению следующей по порядку команды;
- [$: 6; j$] – если данное число делится на 6, то разделить его на 6 и перейти к выполнению команды с номером j , в противном случае данное число не менять и перейти к выполнению следующей по порядку команды;
- [стоп] .

Предположим, что операторный алгоритм $\mathcal{A}$ содержит m команд, занумерованных числами от 1 до m , причем начальная команда имеет номер 1, а единственная команда [стоп] – номер m .

Напомним, что работа операторного алгоритма $\mathcal{A}$ на входе p начинается с выполнения команды с номером 1; в результате получаем число p_1 и номер следующей выполняемой команды i_1 ; по p_1 команда с номером i_1 дает число p_2 и номер следующей команды i_2 и т.д. Вычисление на входе p будет закончено, когда на некотором шаге работы алгоритма в качестве номера следующей команды получится m – номер команды [стоп].

Очевидно, что операторный алгоритм $\mathcal{A}$ применим к числу p тогда и только тогда, когда существует последовательность

$$(p_0, i_0), (p_1, i_1), \dots, (p_t, i_t) \quad (1)$$

такая, что $p_0 = p$, $i_0 = 1$, $i_t = m$ и при любом $1 \leq j \leq t$ при применении к p_{j-1} команды с номером i_{j-1} получается число p_j и номер следующей команды i_j .

Ради удобства будем использовать 0 и 1 вместо a_1 и a_2 соответственно.

В работе [6] последовательности (1) сопоставляется элемент полугруппы Π_n

$$0^{p_0+1} 1^{i_0} 0^{p_1+1} 1^{i_1} 0^{p_2+1} 1^{i_2} \dots 0^{p_t+1} 1^{i_t} m,$$

мы же сопоставим последовательности (1) следующий элемент этой полугруппы:

$$0^{p_0+1}1^{i_0+\varepsilon_0m}0^{p_1+1}1^{i_1+\varepsilon_1m}0^{p_2+1}1^{i_2+\varepsilon_2m} \dots 0^{p_t+1}1^{i_t+\varepsilon_tm}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_j \Rightarrow 0$, если p_j делится на 6, и 1 в противном случае ($j = 0, \dots, t$).

Теперь, как это сделано в работах [6], [7], для произвольного натурального числа p построим *позитивную бескванторную* формулу $\Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n)$ такую, что на полугруппе Π_n истинна формула

$$(\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n)$$

тогда и только тогда, когда операторный алгоритм $\mathfrak{A}$ неприменим к p .

Для этого достаточно добиться, чтобы содержательно формула

$$(\exists s)(\exists u)(\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n)$$

утверждала, что w не имеет вид (2).

В качестве формулы $\Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n)$ можно взять дизъюнкцию следующих формул 1)–9).

1) Слово w пусто: $ww = w$.

2) Слово w содержит вхождение некоторой буквы a_i при $3 \leq i \leq n$:

$$\bigvee_{i=3}^n w = ua_i v.$$

3) Слово w не начинается ни с $0^{p+1}10$, ни с $0^{p+1}1^{1+m}0$:

$$\left(\bigvee_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (0^{p+1}10 = ua_i s \ \& \ w = ua_j v) \vee \bigvee_{i=1}^n 0^{p+1}10 = wa_i u \right) \\ \& \left(\bigvee_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (0^{p+1}1^{1+m}0 = ua_i s \ \& \ w = ua_j v) \vee \bigvee_{i=1}^n 0^{p+1}1^{1+m}0 = wa_i u \right).$$

4) Слово w не оканчивается ни на 01^m , ни на 01^{m+m} :

$$w1 = 1w \vee \bigvee_{0 \leq i < m} w = u01^i \vee \bigvee_{1 \leq i < m} w = u01^{i+m} \vee w = u1^{2m+1}.$$

5) Слово w содержит в качестве подслова слово 1^{2m+1} : $w = u1^{2m+1}v$.

6) Слово w содержит 1^m или 1^{2m} не в конце: $w = u01^m0v \vee w = u01^{2m}0v$.

Заметим, что если для слова w не выполняется ни одно из условий 1)–6), то w имеет вид

$$0^{p+1}1^{i_0}0^{p_1+1}1^{i_1}0^{p_2+1}1^{i_2} \dots 0^{p_t+1}1^{i_t}$$

для некоторых целых неотрицательных чисел $p_1, \dots, p_t$ и натуральных чисел $i_0, i_1, i_2, \dots, i_t$, причем i_0 – это 1 или $1 + m$, i_t – это m или $2m$, $1 \leq j \leq 2m$ ($1 \leq j \leq t$), причем при $j < t$ i_j отлично от m , и от $2m$.

7) Напомним, что если p_j делится на 6, то $1 \leq i_j \leq m$; в противном случае имеем $m+1 \leq i_j \leq 2m$, это условие нарушается с помощью следующей формулы:

$$\begin{aligned} s0 = 0s \& \left(w = 0s^6 1^{1+m} u \vee \bigvee_{1 \leq \varepsilon \leq 5} w = 00^\varepsilon s^6 10u \right. \\ & \vee w = u10s^6 1^{m+m} \vee \bigvee_{1 \leq \varepsilon \leq 5} w = u100^\varepsilon s^6 1^m \\ & \left. \vee \bigvee_{1 \leq i \leq m} w = u10s^6 1^{i+m} 0v \vee \bigvee_{1 \leq \varepsilon \leq 5} \bigvee_{1 \leq i \leq m} w = u100^\varepsilon s^6 1^i 0v \right). \end{aligned}$$

8) Каждому числу i , являющемуся номером команды вида $[\times d]$, где $d = 2, 3$, сопоставим формулу, которая содержательно утверждает, что в слове w в некотором месте произошел “сбой” из-за неправильного выполнения этой команды, т.е. либо неправильно вычислен результат выполнения этой команды, либо не то число указано в качестве номера следующей команды.

В качестве такой формулы возьмем формулу вида

$$s0 = 0s \& (\Psi_1 \vee \Psi_2),$$

где формула Ψ_1 будет содержательно утверждать, что неправильно вычислен результат выполнения команды вида $[\times d]$, а формула Ψ_2 содержательно будет утверждать, что результат применения команды $[\times d]$ вычислен правильно, но неправильно указан номер следующей команды (при условии, что s – степень 0).

Пусть Ψ_1 – следующая формула:

$$\begin{aligned} & \left(\bigvee_{\varepsilon=0,1} w = 0s1^{i+\varepsilon m} 0s^d 0u \right) \vee \left(\bigvee_{\varepsilon=0,1} \bigvee_{1 \leq l \leq d-1} w = v01^{i+\varepsilon m} 0s^d 0^l 1u \right) \\ & \vee \left(\bigvee_{\varepsilon=0,1} w = v00s1^{i+\varepsilon m} 0s^d 1u \right) \vee \left(\bigvee_{\varepsilon=0,1} w = v1s01^{i+\varepsilon m} 0s^d 0u \right). \end{aligned}$$

А в качестве Ψ_2 возьмем формулу

$$\begin{aligned} & \bigvee_{\varepsilon=0,1} \bigvee_{l=0,1} \bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq i+1}}^m (w = 0s1^{i+\varepsilon m} 0s^d 1^{j+lm} 0u \\ & \vee w = v10s1^{i+\varepsilon m} 0s^d 1^{j+lm} 0u \vee w = v10s1^{i+\varepsilon m} 0s^d 1^{j+lm} \vee w = 0s1^{i+\varepsilon m} 0s^d 1^{j+lm}). \end{aligned}$$

9) Каждому i , являющемуся номером команды вида $[: 6; j]$, сопоставим формулу, которая содержательно утверждает, что в слове w в некотором месте произошел

“сбой” из-за неправильного выполнения этой команды, т.е. либо неправильно вычислен результат выполнения этой команды, либо не то число указано в качестве номера следующей команды:

$$\begin{aligned}
 s0 = 0s \ \& \Big(w = 0s^6 1^i 0s0u \vee w = v00s^6 1^i 0s1u \\
 \vee w = v10s^6 1^i 0s0u \\
 \vee \bigvee_{\substack{\varepsilon=0,1 \\ t \neq j}} \bigvee_{t=1}^m (w = 0s^6 1^i 0s1^{t+\varepsilon m} 0u \vee w = 0s^6 1^i 0s1^{t+\varepsilon m} \\
 \vee w = v10s^6 1^i 0s1^{t+\varepsilon m} 0u \vee w = v10s^6 1^i 0s1^{t+\varepsilon m}) \\
 \vee w = s01^{i+m} s00u \vee w = v00s1^{i+m} 0s1u \\
 \vee w = v1s01^{i+m} s00u \\
 \vee \bigvee_{\substack{\varepsilon=0,1 \\ t \neq i+1}} \bigvee_{t=1}^m (w = 0s1^{i+m} 0s1^{t+\varepsilon m} 0u \vee w = 0s1^{i+m} 0s1^{t+\varepsilon m} \\
 \vee w = v10s1^{i+m} 0s1^{t+\varepsilon m} 0u \vee w = v10s1^{i+m} 0s1^{t+\varepsilon m}) \Big).
 \end{aligned}$$

Сделаем некоторые пояснения к последней формуле: первые четыре строки относятся к случаю, когда число, к которому применяется i -я команда $[: 6; j]$, делится на 6, причем, в первых двух строках утверждается, что неправильно вычислен результат, т.е. он не получается из предыдущего числа делением на 6, а следующие две строки утверждают, что результат вычислен правильно, но неправильно указан номер следующей команды. Аналогично четыре последние строки относятся к случаю, когда число, к которому применяется i -я команда $[: 6; j]$, не делится на 6, причем, первые две строки последней четверки утверждают, что неправильно вычислен результат (т.е. число, к которому применяется команда, изменено, хотя в данном случае оно не должно меняться), а две последние строки утверждают, что результат вычислен правильно, но неправильно указан номер следующей команды.

Дизъюнкцию построенных выше формул 1)–7) и формул вида 8), 9), отвечающих значениям i номеров соответствующих команд, обозначим через $\Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n)$.

Тогда для произвольного натурального числа p имеет место эквивалентность: на полугруппе Π_n истинна формула

$$(\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n)$$

тогда и только тогда, когда операторный алгоритм $\mathfrak{A}$ неприменим к p .

Построим формулу Ψ_p , полагая

$$\begin{aligned}
 \Psi_p \Leftrightarrow (\forall t)(\forall q)(\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \Big(tt = t \vee qq = q \\
 \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} (t = ua_i v \vee q = ua_i v) \vee (t = us \ \& \ qs = v^3) \\
 \vee \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-1}, t) \Big).
 \end{aligned}$$

Покажем, что имеет место эквивалентность

$$\Pi_n \models (\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \iff \Pi_n \models \Psi_p.$$

Обозначим через $\mathcal{A}(t, q)$ формулу

$$(\exists s)(\exists u)(\exists v) \left(tt = t \vee qq = q \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} (t = ua_i v \vee q = ua_i v) \vee (t = us \ \& \ qs = v^3) \right),$$

а через $\mathcal{B}(t)$ формулу

$$(\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-1}, t).$$

Тогда формула Ψ_p равносильна формуле $(\forall t)((\forall q)\mathcal{A}(t, q) \vee \mathcal{B}(t))$.

Если формула Ψ_p истинна на полугруппе Π_n , то истинна, в частности, и формула

$$\begin{aligned} & (\exists s)(\exists u)(\exists v) \left(a_n a_n = a_n \vee a_n a_n = a_n \right. \\ & \quad \left. \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} (a_n = ua_i v \vee a_n = ua_i v) \vee (a_n = us \ \& \ a_n s = v^3) \right) \\ & \quad \vee (\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n). \end{aligned}$$

Но, очевидно, формула

$$\begin{aligned} & (\exists s)(\exists u)(\exists v) \left(a_n a_n = a_n \vee a_n a_n = a_n \right. \\ & \quad \left. \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} (a_n = ua_i v \vee a_n = ua_i v) \vee (a_n = us \ \& \ a_n s = v^3) \right) \end{aligned}$$

ложна на полугруппе Π_n , поэтому истинна формула

$$(\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n).$$

Чтобы доказать обратное утверждение, предположим, что на полугруппе Π_n истинна формула

$$(\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

и покажем, что тогда истинна и формула Ψ_p .

Пусть t_0, q_0 – произвольные элементы полугруппы Π_n .

Покажем, что истинна формула

$$\begin{aligned} & (\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \left(t_0 t_0 = t_0 \vee q_0 q_0 = q_0 \right. \\ & \quad \left. \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} (t_0 = ua_i v \vee q_0 = ua_i v) \vee (t_0 = us \ \& \ q_0 s = v^3) \right. \\ & \quad \left. \vee \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-1}, t_0) \right). \end{aligned}$$

Но последняя формула равносильна формуле $\mathcal{A}(t_0, q_0) \vee \mathcal{B}(t_0)$.

Если t_0 или q_0 не является ненулевой степенью буквы a_n , то истинна формула

$$(\exists s)(\exists u)(\exists v) \left(t_0 t_0 = t_0 \vee q_0 q_0 = q_0 \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} (t_0 = u a_i v \vee q_0 = u a_i v) \right),$$

а значит, и формулы $\mathcal{A}(t_0, q_0)$ и $\mathcal{A}(t_0, q_0) \vee \mathcal{B}(t_0)$.

Пусть t_0 и q_0 – ненулевые степени буквы a_n .

Если $t_0 = a_n^r$ и $r \geq 2$, то истинна формула

$$(\exists s)(\exists u)(\exists v)(t_0 = u s \ \& \ q_0 s = v^3),$$

а значит, и формулы $\mathcal{A}(t_0, q_0)$ и $\mathcal{A}(t_0, q_0) \vee \mathcal{B}(t_0)$.

Если же $t_0 = a_n$, то истинна формула

$$(\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-1}, t_0),$$

а значит, и формула $\mathcal{A}(t_0, q_0) \vee \mathcal{B}(t_0)$.

Из истинности формулы $\mathcal{A}(t_0, q_0) \vee \mathcal{B}(t_0)$ следует истинность и равносильной ей формулы

$$\begin{aligned} & (\forall w)(\exists s)(\exists u)(\exists v) \left(t_0 t_0 = t_0 \vee q_0 q_0 = q_0 \right. \\ & \quad \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} (t_0 = u a_i v \vee q_0 = u a_i v) \vee (t_0 = u s \ \& \ q_0 s = v^3) \\ & \quad \left. \vee \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-1}, t_0) \right). \end{aligned}$$

Так как t_0, q_0 – произвольные элементы полугруппы Π_n , получаем, что на полугруппе Π_n истинна формула Ψ_p .

Поэтому для произвольного натурального числа p имеет место эквивалентность: *на полугруппе Π_n истинна формула Ψ_p тогда и только тогда, когда операторный алгоритм $\mathcal{A}$ неприменим к p .*

А так как по предположению операторный алгоритм $\mathcal{A}$ имеет *нерекурсивную область определения*, тем самым доказано, что при любом $n \geq 2$ *позитивная $\forall^3 \exists^3$ -теория с константами $a_1, \dots, a_{n-1}$ полугруппы Π_n алгоритмически неразрешима.*

Покажем, что для любого натурального числа m *алгоритмически разрешима позитивная $\forall \exists^m$ -теория с константами $a_1, \dots, a_{n-1}$.*

Пусть F – *позитивная $\forall \exists^m$ -формула*, бескванторная часть которой содержит лишь константы $a_1, \dots, a_{n-1}$.

Можно считать, что F имеет вид

$$(\forall x_1)(\exists y_1) \dots (\exists y_m) \Psi(x_1, y_1, \dots, y_m, a_1, \dots, a_{n-1}),$$

где $\Psi(x_1, y_1, \dots, y_m, a_1, \dots, a_{n-1})$ – бескванторная часть.

Нетрудно понять, что имеет место следующая эквивалентность:

$$\begin{aligned} \Pi_n \models (\forall x_1)(\exists y_1) \dots (\exists y_m) \Psi(x_1, y_1, \dots, y_m, a_1, \dots, a_{n-1}) \\ \iff \Pi_n \models (\exists y_1) \dots (\exists y_m) \Psi(a_n, y_1, \dots, y_m, a_1, \dots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 1 остается воспользоваться результатом Маканина [4] об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем уравнений в свободных полугруппах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По формуле $\Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n)$ построим формулу $F_{k,p}$, полагая

$$F_{k,p} \equiv (\forall y_1) \dots (\forall y_k) (\forall w) (\exists s) (\exists u) (\exists v) \left(\bigvee_{1 \leq i < j \leq k} y_i = y_j \right. \\ \vee \bigvee_{i=1}^k (y_i = y_i y_i \vee (y_i = uv \ \& \ u \neq uu \ \& \ v \neq vv)) \\ \left. \vee \bigvee_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^{n-k} y_i = a_j \vee \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-k}, y_1, \dots, y_k) \right).$$

Нетрудно понять, что имеет место эквивалентность

$$\Pi_n \models (\forall w) (\exists s) (\exists u) (\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n) \iff \Pi_n \models F_{k,p}.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Подобно тому, как это сделано в ходе доказательства теоремы 1, по операторному алгоритму $\mathcal{A}$ с *нерекурсивной областью определения* и по натуральному числу p построим *позитивную бескванторную* формулу $\Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n)$ такую, что для произвольного натурального числа p имеет место эквивалентность: *на полугруппе Π_n^- истинна формула*

$$(\forall w) (\exists s) (\exists u) (\exists v) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n)$$

тогда и только тогда, когда операторный алгоритм $\mathcal{A}$ неприменим к p .

Для этого потребуются внести очевидные, хотя и достаточно громоздкие, изменения в ход построения в процессе доказательства теоремы 1 формулы $\Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n)$, вызванные отсутствием в полугруппе Π_n^- пустого слова.

Построим формулу $F_{k,p}$, полагая

$$F_{k,p} \equiv (\forall y_1) \dots (\forall y_k) (\forall w) (\exists s) (\exists u) (\exists v) \left(\bigvee_{1 \leq i < j \leq k} y_i = y_j \vee \bigvee_{i=1}^n y_i = uv \right. \\ \left. \vee \bigvee_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^{n-k} y_i = a_j \vee \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_{n-k}, y_1, \dots, y_k) \right).$$

Нетрудно понять, что для произвольного натурального числа p имеет место эквивалентность

$$\Pi_n^- \models (\forall w) (\exists u) (\exists v) (\exists s) \Phi_p(w, s, u, v, a_1, \dots, a_n) \iff \Pi_n^- \models F_{k,p}.$$

Поэтому на полугруппе Π_n^- истинна формула $F_{k,p}$ тогда и только тогда, когда операторный алгоритм $\mathcal{A}$ неприменим к p .

А так как по предположению операторный алгоритм $\mathcal{A}$ имеет *нерекурсивную область определения*, тем самым доказано, что при любом $n \geq 2$ и любом $1 \leq k \leq n$ *позитивная $\forall^{k+1}\exists^3$ -теория с константами $a_1, \dots, a_{n-k}$ полугруппы Π_n^- алгоритмически неразрешима.*

Докажем, что для любого натурального числа n алгоритмически разрешима позитивная $\forall^k \exists^m$ -теория с константами $a_1, \dots, a_{n-k}$.

Пусть Φ – позитивная $\forall^k \exists^m$ -формула, бескванторная часть которой содержит лишь константы $a_1, \dots, a_{n-k}$.

Можно считать, что Φ имеет вид

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_k) (\exists y_1) \dots (\exists y_m) \Psi(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m, a_1, \dots, a_{n-k}),$$

где $\Psi(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m, a_1, \dots, a_{n-k})$ – бескванторная часть.

Нетрудно понять, что имеет место следующая эквивалентность:

$$\begin{aligned} \Pi_n^- &\models (\forall x_1) \dots (\forall x_k) (\exists y_1) \dots (\exists y_m) \Psi(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m, a_1, \dots, a_{n-k}), \\ &\iff \Pi_n^- \models (\exists y_1) \dots (\exists y_m) \Psi(a_{n-k+1}, \dots, a_n, y_1, \dots, y_m, a_1, \dots, a_{n-k}). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 3 остается, как и выше, воспользоваться результатом Маканина [4].

Выражаю глубокую благодарность чл.-корр. РАН С. И. Адияну за внимание к работе и полезные замечания, высказанные им при обсуждении излагаемых в работе результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Quine W. Concatenation as a basis for arithmetic // J. Symbolic Logic. 1946. V. 11. P. 105–114.
- [2] Дурнев В. Г. О позитивной теории свободной полугруппы // Вопросы теории групп и полугрупп. Тула, 1972. С. 122–172.
- [3] Косовский Н. К. Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
- [4] Маканин Г. С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Матем. сб. 1977. Т. 103(145). № 2(6). С. 147–236.
- [5] Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211. № 4. С. 772–774.
- [6] Марченков С. С. Неразрешимость позитивной $\forall \exists$ -теории свободной полугруппы // Сиб. матем. ж. 1982. Т. 23. № 1. С. 196–198.
- [7] Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\forall \exists^3$ -теории свободной полугруппы // Сиб. матем. ж. 1995. Т. 36. № 5. С. 1067–1080.
- [8] Перязев Н. А. О позитивной эквивалентности свободных алгебр // Восьмая Всесоюзная конференция по математической логике. Тезисы докл. М., 1986. С. 149.
- [9] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: durnev@univ.uni Yar.ac.ru

Поступило
27.04.1998
Исправленный вариант
08.09.1999