Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О группе Пикара и группе Брауэра вещественной алгебраической поверхности, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 211–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 06:31:09

УДК 512.7

О ГРУППЕ ПИКАРА И ГРУППЕ БРАУЭРА ВЕЩЕСТВЕННОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Краснов

Изучается отображение группы Брауэра вещественной алгебраической поверхности в инвариантную часть группы Брауэра ее комплексификации. Для этой цели применяется вещественное отображение цикла группы Пикара.

Библиография: 8 названий.

Введение. Далее X – неособая проективная вещественная алгебраическая поверхность, $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$ – комплексификация. Если $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа, то она действует на группе Пикара $\text{Pic } X_{\mathbb{C}}$ и группе Брауэра $\text{Br } X_{\mathbb{C}}$ и определены канонические гомоморфизмы

$$\alpha: \text{Pic } X \rightarrow (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G, \quad (1)$$

$$\alpha: \text{Br } X \rightarrow (\text{Br } X_{\mathbb{C}})^G. \quad (2)$$

При $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ первый гомоморфизм является изоморфизмом (см. [1]), но второй гомоморфизм не является мономорфизмом и может не быть эпиморфизмом. Далее мы предполагаем, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, и прежде всего докажем

Предложение. *Ядро гомоморфизма (2) является 2-периодической группой, т.е. каждый элемент имеет порядок 2, и его размерность над полем $\mathbb{F}_2$ равна*

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) + 1.$$

Мы хотим сформулировать достаточное условие для того, чтобы гомоморфизм (2) был эпиморфизмом. Чтобы сделать это, нам потребуется рассмотреть вещественное отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}: \text{Pic } X \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (3)$$

Оно устроено следующим образом. Если $y \in \text{Pic } X$ и Y – дивизор, представляющий элемент y , то двойственный класс когомологий $[Y(\mathbb{R})]^*$ по определению равен $\text{cl}_{\mathbb{R}}(y)$ (см. подробности в [2]). Так как гомоморфизм (1) является изоморфизмом, мы отождествляем с его помощью группу $\text{Pic } X$ с группой $(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G$ и получаем из гомоморфизма (3) следующий гомоморфизм

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}: (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (4)$$

Нетрудно увидеть, что подгруппа $(1 + g)(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})$, где g – образующая группы G , содержится в ядре гомоморфизма (4) (см. [2]), поэтому из гомоморфизма (4) получается гомоморфизм

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}: (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G / (1 + g)(\text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Так как

$$(\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G / (1 + g)(\text{Pic } X_{\mathbb{C}}) = H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}),$$

последний гомоморфизм можно переписать следующим образом

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}: H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (5)$$

Оказывается, что справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если гомоморфизм (5) мономорфен, то гомоморфизм (2) эпиморфен.*

ТЕОРЕМА 2. *Если $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – группа кручения, то из эпиморфности гомоморфизма (2) следует мономорфность гомоморфизма (5).*

Из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Если X является M -поверхностью и $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$, то гомоморфизм (2) эпиморфен.*

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Через $\bar{X}$ будем обозначать вещественное алгебраическое многообразие, которое получается из комплексификации $X_{\mathbb{C}}$, т.е. схему $X_{\mathbb{C}}$ рассматриваем над $\text{Spec } \mathbb{R}$. Тогда группа Галуа $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ действует на $\bar{X}$. Через X_{et} , $\bar{X}_{\text{et}}$ будем обозначать этальные топологии на вещественных алгебраических многообразиях X , $\bar{X}$ соответственно; заметим, что группа G действует на $\bar{X}_{\text{et}}$. Если $\mathcal{A}$ – пучок абелевых групп на X_{et} , то определено его ограничение $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}|_{X_{\text{et}}}$, так как проекция $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ является этальным морфизмом. Заметим также, что действие G на $\bar{X}_{\text{et}}$ продолжается до действия на $\bar{\mathcal{A}}$. Таким образом, определены кохомологии $H^q(X_{\text{et}}, \mathcal{A})$, $H^q(\bar{X}_{\text{et}}, \bar{\mathcal{A}})$, которые обычно обозначают через $H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A})$, $H_{\text{et}}^q(\bar{X}, \bar{\mathcal{A}})$, а также гомоморфизм ограничения

$$\alpha: H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A}) \rightarrow H_{\text{et}}^q(\bar{X}, \bar{\mathcal{A}}).$$

Так как проекция $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ – конечное накрытие Галуа с группой Галуа G , имеется спектральная последовательность Хохшильда–Серра (см. [3])

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H_{\text{et}}^q(\bar{X}, \bar{\mathcal{A}})) \implies H_{\text{et}}^{p+q}(X, \mathcal{A}).$$

Эта спектральная последовательность определяет возрастающую фильтрацию группы $H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A})$

$$F^0 H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A}) \subset F^1 H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A}) \subset \dots \subset F^{q-1} H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A}) \subset H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A}).$$

ЛЕММА 1. *Группа $F^{q-1} H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A})$ является 2-периодической, т.е. каждый ее элемент имеет порядок 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый G -пучок абелевых групп на $\overline{X}_{\text{et}}$ однозначно продолжается до пучка абелевых групп на X_{et} (см. [4]). Пусть $\mathbb{Z}_-$ – G -модуль $\mathbb{Z}$, на котором образующая g группы G действует умножением на -1 . Тогда соответствующий G -пучок на $\overline{X}_{\text{et}}$ будем обозначать через $\mathbb{Z}_-$. Этот G -пучок на $\overline{X}_{\text{et}}$ определяет пучок на X_{et} , который будем обозначать также через $\mathbb{Z}_-$. Из равенства

$$H_{\text{et}}^1(\text{Spec } \mathbb{R}, \mathbb{Z}_-) = H^1(G, \mathbb{Z}_-)$$

следует, что группа $H_{\text{et}}^1(\text{Spec } \mathbb{R}, \mathbb{Z}_-)$ имеет второй порядок; ее образующую обозначим через t . Образ t при каноническом гомоморфизме

$$H_{\text{et}}^1(\text{Spec } \mathbb{R}, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{Z}_-)$$

обозначим через t_X . Пусть $\mathcal{A}_- = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_-$. Тогда определен гомоморфизм

$$\smile t_X : H_{\text{et}}^{q-1}(X, \mathcal{A}_-) \rightarrow H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A}). \quad (6)$$

Этот гомоморфизм продолжается на спектральные последовательности

$$\smile t_X : H^{p-1}(G, H_{\text{et}}^q(\overline{X}, \overline{\mathcal{A}}_-)) \rightarrow H^p(G, H_{\text{et}}^q(\overline{X}, \overline{\mathcal{A}})).$$

Поэтому образ гомоморфизма (6) равен $F^{q-1}H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A})$. Так как элемент t_X имеет второй порядок, группа $F^{q-1}H_{\text{et}}^q(X, \mathcal{A})$ – 2-периодическая. Лемма доказана.

Пусть $\mathbb{G}_m$ – пучок на X_{et} , который каждому этальному морфизму $U \rightarrow X$ составляет группу $\mathcal{O}(U)^*$; соответствующий G -пучок на $\overline{X}_{\text{et}} = (X_{\mathbb{C}})_{\text{et}}$ будем обозначать также через $\mathbb{G}_m$. Тогда выполняются равенства

$$\text{Br } X = H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m), \quad \text{Br}(X_{\mathbb{C}}) = H_{\text{et}}^2(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m),$$

так как X – неособая поверхность (см. [5], [3]). Рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда–Серра

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H_{\text{et}}^q(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \Longrightarrow H_{\text{et}}^{p+q}(X, \mathbb{G}_m). \quad (7)$$

ЛЕММА 2. *Дифференциал*

$$d_2^{0,1} : H^0(G, H_{\text{et}}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \rightarrow H^2(G, H_{\text{et}}^0(\overline{X}, \mathbb{G}_m))$$

из спектральной последовательности (7) равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, существует морфизм $\mathrm{Spec} \mathbb{R} \rightarrow X$, который индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H_{\mathrm{et}}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) & \xrightarrow{d_2^{0,1}} & H^2(G, H_{\mathrm{et}}^0(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(G, H_{\mathrm{et}}^1(\mathrm{Spec} \mathbb{C}, \mathbb{G}_m)) & \xrightarrow{d_2^{0,1}} & H^2(G, H_{\mathrm{et}}^0(\mathrm{Spec} \mathbb{C}, \mathbb{G}_m)) \end{array} \quad (8)$$

Правый гомоморфизм в ней является изоморфизмом, так как $H_{\mathrm{et}}^0(\overline{X}, \mathbb{G}_m) = H_{\mathrm{et}}^0(\mathrm{Spec} \mathbb{C}, \mathbb{G}_m) = \mathbb{C}^*$. Левый гомоморфизм в диаграмме (8) равен нулю, так как $H_{\mathrm{et}}^1(\mathrm{Spec} \mathbb{C}, \mathbb{G}_m) = 0$. Поэтому из диаграммы (8) вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Теперь мы можем непосредственно приступить к доказательству предложения. В силу сказанного выше гомоморфизм (2) совпадает с краевым для спектральной последовательности (7) гомоморфизмом

$$H_{\mathrm{et}}^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\mathrm{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m)^G. \quad (9)$$

Ядро этого гомоморфизма равно $F^1 H_{\mathrm{et}}^2(X, \mathbb{G}_m)$, поэтому по лемме 1 является 2-периодической группой. Остается найти его размерность; для этого применим спектральную последовательность (7) и лемму 2; тогда получим равенства

$$\begin{aligned} \dim F^1 H_{\mathrm{et}}^2(X, \mathbb{G}_m) &= \dim H^1(G, H_{\mathrm{et}}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) + \dim H^2(G, H_{\mathrm{et}}^0(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \\ &= \dim H^1(G, H_{\mathrm{et}}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)) + \dim H^2(G, \mathbb{C}^*) \\ &= \dim H^1(G, \mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}}) + 1. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ. Рассмотрим эквивариантные этальные когомологии $H_{\mathrm{et}}^q(\overline{X}; G, \mathbb{G}_m)$; они совпадают с когомологиями $H_{\mathrm{et}}^q(X, \mathbb{G}_m)$ (см. [4]), причем вторая спектральная последовательность для эквивариантных когомологий

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H_{\mathrm{et}}^q(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \implies H_{\mathrm{et}}^{p+q}(\overline{X}; G, \mathbb{G}_m) \quad (10)$$

совпадает со спектральной последовательностью (7). Имеется канонический гомоморфизм эквивариантных когомологий

$$H_{\mathrm{et}}^q(\overline{X}; G, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*), \quad (11)$$

где $\mathcal{O}^*$ – G -пучок ростков голоморфных обратимых функций на $X(\mathbb{C})$ и $X(\mathbb{C})$ рассматривается с евклидовой топологией (см. [4]). Гомоморфизм (11) продолжается до гомоморфизма спектральной последовательности (10) в спектральную последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) \implies H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*). \quad (12)$$

Следовательно, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & H^2(G, H_{\text{et}}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^0(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) \end{array} . \quad (13)$$

Правый гомоморфизм в ней является изоморфизмом, так как

$$H_{\text{et}}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m) = \text{Pic } X_{\mathbb{C}}, \quad H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) = \text{Pic } X_{\mathbb{C}}$$

– группа Пикара комплексно-аналитического многообразия и гомоморфизм $\text{Pic } X_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Pic } X(\mathbb{C})$ является изоморфизмом. Поэтому если нижний дифференциал в диаграмме (13) равен нулю, то верхний также равен нулю. Тогда из леммы 2 получим, что краевой гомоморфизм (9) эпиморфен, а это будет означать, что гомоморфизм (2) эпиморфен. Итак, нам достаточно показать, что из мономорфности гомоморфизма (5) вытекает равенство нулю дифференциала

$$d_2^{0,2}: H^0(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) \rightarrow H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)), \quad (14)$$

и теорема 1 будет доказана. Перейдем к доказательству верхнего утверждения о дифференциале (14). Так как

$$H^3(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) = H^3(G, \mathbb{C}^*) = 0,$$

из спектральной последовательности (12) получаем гомоморфизм

$$H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*). \quad (15)$$

Из точной экспоненциальной последовательности G -пучков на $X(\mathbb{C})$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_- \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 1$$

получаем кограничный гомоморфизм

$$\delta: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-). \quad (16)$$

Он будет изоморфизмом, так как

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) = H^q(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})^G = 0 \quad \text{при } q \geq 3.$$

Группа $H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ равна $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$. Это равенство получается из гомоморфизма ограничения

$$\beta: H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^4(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

который является изоморфизмом (см. [6]). Таким образом, композиция гомоморфизмов (15), (16) дает новый гомоморфизм группы $H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}})$ в группу $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$; мы будем обозначать его через

$$\delta: H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \quad (17)$$

Покажем, что гомоморфизм (17) совпадает с отображением цикла (5). Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^0(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & & & \\
 \sim t_X^2 \downarrow & & \sim t_X^2 \downarrow & & & & \\
 H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) & \longrightarrow & H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & & & \\
 & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{\beta} & H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & & \\
 & \sim t_X^2 \downarrow & & \sim t_X^2 \downarrow & & \parallel & \\
 & \longrightarrow & H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{\beta} & H^4(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & &
 \end{array} \quad (18)$$

где элемент $t_X \in H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ определяется так же, как элемент $t_X \in H_{\text{et}}^1(x, \mathbb{Z}_-)$, β – гомоморфизм ограничения. Композиция гомоморфизмов

$$H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta} H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

в диаграмме (18) совпадает с отображением цикла (см. [2])

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}: \text{Pic } X \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Поэтому композиция гомоморфизмов в нижней строке диаграммы (18) совпадает с гомоморфизмом (5). Итак, гомоморфизмы (5), (17) совпадают. Следовательно, из мономорфности гомоморфизма (5) следует мономорфность гомоморфизма (17), а поэтому и мономорфность гомоморфизма (15), что равносильно обращению в нуль дифференциала (14). Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству второй теоремы.

Если рассмотреть доказательство теоремы 1, то видно следующее. Мономорфность гомоморфизма (5) равносильна обращению в нуль нижнего дифференциала в диаграмме (8), а эпиморфность гомоморфизма (2) равносильна обращению в нуль верхнего дифференциала в диаграмме (8). Мы будем доказывать, что при выполнении условия теоремы 2 из равенства нулю верхнего дифференциала в диаграмме (8) следует равенство нулю нижнего дифференциала. Но сначала докажем две леммы.

ЛЕММА 3. Гомоморфизм

$$H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)$$

мономорфен, и образ его равен подгруппе кручения $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^)_{\text{tors}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m)$ является группой кручения. Пусть ${}_n H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m)$ – ядро гомоморфизма

$$H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{x^n} H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m);$$

тогда достаточно проверить, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ гомоморфизм

$${}_n H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m) \rightarrow {}_n H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)$$

является изоморфизмом, где подгруппа ${}_n H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)$ определяется аналогично. Для этого рассмотрим точные последовательности Куммера

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{x^n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1, \\ 1 &\longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{x^n} \mathcal{O}^* \longrightarrow 1; \end{aligned}$$

из них получается следующая коммутативная диаграмма, строки в которой точны:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\text{et}}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mu_n) & \longrightarrow & {}_n H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(X(\mathbb{C}), \mu_n) & \longrightarrow & {}_n H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

Левый вертикальный гомоморфизм в ней является изоморфизмом, об этом уже говорилось. Средний гомоморфизм также будет изоморфизмом (см., например, [3]). Поэтому правый вертикальный гомоморфизм будет изоморфизмом. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – группа кручения, то гомоморфизм

$$H^2(G, H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \rightarrow H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*))$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании леммы 3 нам достаточно установить, что гомоморфизм

$$H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)_{\text{tors}}) \rightarrow H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*))$$

является изоморфизмом. Для этого рассмотрим точную последовательность G -модулей

$$0 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)_{\text{tors}} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) / \text{Tors} \rightarrow 0.$$

Из нее получается длинная точная последовательность когомологий группы G , из которой вытекает, что достаточно доказать равенство

$$H^q(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) / \text{Tors}) = 0 \quad \text{при } q = 1, 2. \quad (19)$$

Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) / H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) & \rightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)_{\text{tors}} & \xrightarrow{\delta} & H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}} & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) / H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) & \rightarrow & H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) & \rightarrow & 0 \end{array} \quad (20)$$

где $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ – образ гомоморфизма $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})$, а $\mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ – линейная оболочка множества $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ в $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})$ над полем $\mathbb{Q}$. Строки в диаграмме (20) получаются из экспоненциальной точной последовательности и сами являются точными, поэтому из диаграммы (20) вытекает равенство

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) / \text{Tors} = H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) / \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-). \quad (21)$$

Так как при $q = 1, 2$

$$H^q(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})) = 0, \quad H^q(G, \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = 0,$$

из точной последовательности G -модулей

$$0 \rightarrow \mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})/\mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow 0$$

получаем равенство при $q = 1, 2$

$$H^q(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})/\mathbb{Q} \cdot H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) = 0.$$

Поэтому из равенства (21) следует равенство (19). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(G, H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & H^2(G, H_{\text{et}}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \\ \sim t_X^2 \downarrow & & \sim t_X^2 \downarrow \cong \\ H^2(G, H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) & \xrightarrow{d_2^{2,2}} & H^4(G, H_{\text{et}}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \end{array}.$$

Из нее следует, что дифференциал $d_2^{0,2}$ нулевой тогда и только тогда, когда дифференциал $d_2^{2,2}$ нулевой. Аналогичное утверждение справедливо для нижнего дифференциала $d_2^{0,2}$ в диаграмме (13). Рассмотрим теперь следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^2(G, H_{\text{et}}^2(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) & \xrightarrow{d_2^{2,2}} & H^4(G, H_{\text{et}}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m)) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) & \xrightarrow{d_2^{2,2}} & H^4(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)) \end{array}. \quad (22)$$

Левый гомоморфизм в ней является изоморфизмом в силу леммы 3. Правый гомоморфизм – всегда изоморфизм. Поэтому из равенства нулю верхнего дифференциала в диаграмме (22) следует равенство нулю нижнего дифференциала. Теорема доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Так как $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$, из экспоненциальной точной последовательности получаем следующую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \text{Pic } X_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\delta} H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \longrightarrow H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \longrightarrow 0. \quad (23)$$

Через $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)_{\pm}$ обозначим подгруппу $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$, на которой образующая $g \in G$ действует умножением на ± 1 . Так как X является M -поверхностью и группа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ свободная, имеем разложение в прямую сумму (см. [7])

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) = H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)_{+} \oplus H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)_{-}. \quad (24)$$

Отсюда следует, что группы $\text{Pic } X_{\mathbb{C}}$, $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ имеют аналогичные разложения:

$$\text{Pic } X_{\mathbb{C}} = (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})_{+} \oplus (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})_{-}, \quad (25)$$

$$H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) = H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)_{+} \oplus H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)_{-}. \quad (26)$$

Докажем первое разложение. Пусть $y \in \text{Pic } X_{\mathbb{C}}$ и $\delta(y) = y_+ \oplus y_-$, где $y_{\pm} \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)_\pm$; нам нужно показать, что элементы $y_{\pm}$ алгебраические. Так как подгруппы $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)_\pm$ содержатся в подпространствах $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O})_\pm$ и образ элемента $\delta(y)$ в $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ равен нулю, образы элементов $y_{\pm}$ в $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$ также равны нулю, поэтому $y_{\pm}$ – алгебраические элементы. Итак, разложение (25) доказано. Разложение (26) сразу следует из разложения (24) и точной последовательности (23). Из разложений (24), (25), (26) получаем равенства

$$\begin{aligned} H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) &= (\text{Pic } X_{\mathbb{C}})^G/2, \\ H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) &= H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G/2, \\ H^2(G, H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) &= H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G/2, \end{aligned}$$

а тогда из точной последовательности (23) получается следующая точная последовательность

$$0 \longrightarrow H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\delta} H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \longrightarrow H^2(G, H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \longrightarrow 0;$$

в частности, гомоморфизм δ в ней мономорфен. Так как группа $H^4(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-))$ всегда равна нулю, а группа $H^3(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-))$ равна нулю по условию, имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{array}, \quad (27)$$

вертикальные гомоморфизмы в которой получаются из вторых спектральных последовательностей. При доказательстве теоремы 1 было показано, что композиция гомоморфизмов

$$\begin{aligned} H^2(G, \text{Pic } X_{\mathbb{C}}) &\longrightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \\ &\parallel \\ &H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{aligned}$$

совпадает с гомоморфизмом (5). Так как верхний гомоморфизм δ в диаграмме (27) мономорфен, для мономорфности гомоморфизма (5) достаточно мономорфности правого гомоморфизма в диаграмме (27). Но для поверхности с $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$ вторая спектральная последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \implies H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$$

вырождается (см. [4], [8]), поэтому правый гомоморфизм в диаграмме (27) мономорфен; следовательно, мономорфен гомоморфизм (5). Осталось применить теорему 1. Следствие доказано.

4. ПРИМЕРЫ. Рассмотрим сначала поверхность с $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$, $H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) = 0$, например, рациональную поверхность. Для такой поверхности $\mathrm{Br} X_{\mathbb{C}} = 0$. Это равенство вытекает из равенства $\mathrm{Br} X_{\mathbb{C}} = H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*)_{\mathrm{tors}}$ (лемма 3) и точной последовательности

$$\cdots \longrightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}) \longrightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \longrightarrow \cdots.$$

Следовательно, отображение $\alpha: \mathrm{Br} X \rightarrow (\mathrm{Br} X_{\mathbb{C}})^G$ эпиморфно. Тогда по теореме 2 отображение цикла

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}: H^2(G, \mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

мономорфно. Но, на самом деле, оно является изоморфизмом; это утверждение следует из диаграммы (27), так как для нашей поверхности все гомоморфизмы в ней будут изоморфизмами.

Приведем теперь пример поверхности, для которой отображение цикла (5) не мономорфно. Рассмотрим поверхность четвертой степени $x_0^4 - x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = 0$. Мы можем немного изменить коэффициенты этого уравнения, чтобы у полученной поверхности X группа $\mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}}$ порождалась плоским сечением. Это утверждение вытекает из теоремы Нётера. Итак, для такой поверхности имеем равенства:

$$H^2(G, \mathrm{Pic} X_{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}/2, \quad H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = 0.$$

Следовательно, гомоморфизм (5) не мономорфен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Manin Y. I. Le groupe de Brauer–Grothendick en géométrie diophantienne // Actes du Congrès Intern. Math. Nice. V. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 401–411.
- [2] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [3] Мили Дж. Этальные коомологии. М.: Мир, 1983.
- [4] Краснов В. А. Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 57–88.
- [5] Grothendick A. Le groupe de Brauer // Dix exposés sur la cohomologie des schemas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 46–188.
- [6] Краснов В. А. Эквивариантные коомологии вещественной алгебраической поверхности и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 101–126.
- [7] Рохлин В. А. Сравнения по mod 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта // Функцион. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 4. С. 71–75; 1973. Т. 7. № 2. С. 91–92.
- [8] Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–746.