Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Вабищевич, Операторно-разностные схемы для одного класса систем эволюционных уравнений, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 29–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 06:51:44

Операторно-разностные схемы для одного класса систем эволюционных уравнений

П. Н. Вабищевич

Рассматриваются разностные аппроксимации по времени при приближенном решении задачи Коши для специальной системы эволюционных уравнений первого порядка. К таким задачам мы приходим после аппроксимации по пространству в уравнении Шрёдингера при разделении мнимой и действительной частей, для нестационарных задач акустики и электродинамики. Построены безусловно устойчивые двухслойные операторно-разностные схемы с весами. Второй класс разностных схем базируется на формальном переходе к явным операторно-разностным схемам для эволюционного уравнения второго порядка при явно-неявных аппроксимациях отдельных уравнений системы. Обсуждаются вопросы регуляризации таких схем для получения безусловно устойчивых операторно-разностных схем. Построены схемы расщепления, которые связаны с решением простейших задач на каждом шаге по времени.

Библиография: 24 названия.

DOI: 10.4213/mzm8290

1. Введение. При решении прикладных проблем нам часто приходится иметь дело с краевыми задачами для систем нестационарных уравнений в частных производных. При построении вычислительных алгоритмов для таких задач приходится решать проблемы аппроксимации уравнений, принимая во внимание соответствующие начальные и граничные условия. Аппроксимация по пространству проводится на основе разностных методов, метода конечных элементов, метода конечных объемов [1]–[4]. Особые требования предъявляются к выбору аппроксимаций по времени при численном решении задач для систем уравнений. Помимо общих условий аппроксимации и устойчивости необходимо иметь в виду и вопросы вычислительной реализации построенных схем – решения соответствующей сеточной задачи на новом временном слое. В этом плане наиболее обнадеживающие результаты связываются с построением специальных аддитивных операторно-разностных схем (схем расщепления) [1], [5], [6].

Различные классы аддитивных схем построены для векторных задач. Типичной является ситуация, когда отдельные компоненты вектора неизвестных связаны друг с другом. Использование тех или иных схем расщепления ориентировано на то, чтобы получить хорошие задачи для отдельных компонент решения на новом временном слое. Для параболических и гиперболических систем уравнений с самосопряженным эллиптическим оператором аддитивные схемы построены в [1] на основе

принципа регуляризации. Для систем уравнений эффективные схемы расщепления могут строиться на основе попеременно-треугольного метода Самарского, который обычно рассматривается как итерационный метод [1], [7]. Такой подход реализован в [8] для динамических задач упругости, в [9], [10] – для задач несжимаемой жидкости с переменной вязкостью. Аддитивные схемы для нестационарных векторных уравнений первого и второго порядка, типичных для задач электродинамики, построены в работе [11].

В настоящей работе рассматривается задача Коши для линейной системы уравнений первого порядка в евклидовом пространстве с кососимметричным оператором задачи. Специфика задачи проявляется в специальной структуре операторной матрицы с ненулевыми элементами в последнем столбце и последней строке. Приведены простейшие априорные оценки для решения задачи, которые служат ориентиром при рассмотрении дискретной задачи. В рассматриваемом операторном виде записываются типичные задачи акустики и электродинамики. Рассмотрены классические схемы с весами и вопросы вычислительной реализации таких схем. Отдельно выделены явно-неявные схемы на сетке по времени с целыми и полуцелыми узлами. Построены два класса аддитивных схем, которые базируются на решении задач, связанных с отдельными операторами. Первый класс схем связан со стандартным аддитивным расщеплением операторной матрицы задачи, второй класс аддитивных схем строится на основе перехода к эквивалентному эволюционному уравнению второго порядка.

2. Постановка задачи. Пусть H_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, – конечномерные действительные гильбертовы (евклидовы) пространства, в которых скалярное произведение и норма есть $(\cdot, \cdot)_\alpha$ и $\|\cdot\|_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, соответственно. Отдельные компоненты решения обозначим через $u_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, для каждого t ($0 \leq t \leq T$, $T > 0$). Ищется решение системы эволюционных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{du_\alpha}{dt} + A_\alpha u_p &= f_\alpha, \\ \frac{du_p}{dt} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* u_\alpha &= f_p, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad 0 < t \leq T. \quad (2.1)$$

Здесь $f_\alpha(t) \in L_2(0, T; H_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, – заданы, а A_α – линейный постоянный (не зависящий от t) оператор из H_p в H_α для всех $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$. Система уравнений (2.1) дополняется начальными условиями

$$u_\alpha(0) = v_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (2.2)$$

Приведем простейшие априорные оценки для решения задачи Коши (2.1), (2.2), на которые мы будем ориентироваться при исследовании соответствующих операторно-разностных схем. Домножим отдельное уравнение (2.1) скалярно в H_α на u_α и, складывая их, получим

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \frac{d\|u_\alpha\|_\alpha^2}{dt} = \sum_{\alpha=1}^p (f_\alpha, u_\alpha)_\alpha.$$

Для правой части используем оценку

$$\sum_{\alpha=1}^p (f_{\alpha}, u_{\alpha})_{\alpha} \leq \sum_{\alpha=1}^p \|f_{\alpha}\|_{\alpha} \|u_{\alpha}\|_{\alpha} \leq \left(\sum_{\alpha=1}^p \|f_{\alpha}\|_{\alpha}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\alpha=1}^p \|u_{\alpha}\|_{\alpha}^2 \right)^{1/2}.$$

Применяя лемму Гронуолла и учитывая начальное условие (2.2), получим оценку

$$\left(\sum_{\alpha=1}^p \|u_{\alpha}(t)\|_{\alpha}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{\alpha=1}^p \|v_{\alpha}^0\|_{\alpha}^2 \right)^{1/2} + \int_0^t \left(\sum_{\alpha=1}^p \|f_{\alpha}(\theta)\|_{\alpha}^2 \right)^{1/2} d\theta, \quad (2.3)$$

которая выражает устойчивость решения задачи (2.1), (2.2) по начальным данным и правой части.

В некоторых случаях удобно интерпретировать систему уравнений (2.1) как одно эволюционное уравнение для вектора $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (2.4)$$

в котором $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$, а для элементов операторной матрицы $\mathbf{A}$ имеем представление

$$\mathbf{A} = \{A_{\alpha\beta}\}, \quad A_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \beta = 1, 2, \dots, p-1, \\ A_{\alpha}, & \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \beta = p, \\ -A_{\beta}^*, & \alpha = p, \beta = 1, 2, \dots, p-1, \\ 0, & \alpha = p, \beta = p. \end{cases} \quad (2.5)$$

На прямой сумме пространств $\mathbf{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_p$ положим

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^p (u_{\alpha}, v_{\alpha})_{\alpha}, \quad \|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{\alpha=1}^p \|u_{\alpha}\|_{\alpha}^2.$$

При этом $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$ в $\mathbf{H}$ и оценка (2.3) переписывается в виде

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq \|\mathbf{v}^0\| + \int_0^t \|\mathbf{f}(\theta)\| d\theta, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{v}^0 = \{v_1^0, v_2^0, \dots, v_p^0\}$.

Второй класс априорных оценок для задачи (2.1), (2.2) связан с переходом к одному эволюционному уравнению второго порядка для u_p . Дифференцирование последнего уравнения системы (2.1) с учетом стационарности операторов A_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$ дает

$$\frac{d^2 u_p}{dt^2} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_{\alpha}^* \frac{du_{\alpha}}{dt} = \frac{df_p}{dt}.$$

Принимая во внимание первые $p-1$ уравнения системы (2.1), получим

$$\frac{d^2 u_p}{dt^2} + \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_{\alpha}^* A_{\alpha} u_p = s_p(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2.7)$$

где

$$s_p = \frac{df_p}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_{\alpha}^* f_{\alpha}.$$

Начальные условия для уравнения (2.7), которые вытекают из (2.2) и последнего уравнения системы (2.1), имеют вид

$$u_p(0) = v_p^0, \quad \frac{du_p}{dt}(0) = w_p^0 \equiv \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_{\alpha}^* v_{\alpha}^0 + f_p. \quad (2.8)$$

Стандартную априорную оценку для задачи (2.7), (2.8) мы получим при скалярном умножении (2.7) в H_p на du_p/dt . Имеем равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d\|u_p\|_*^2}{dt} = \left(s_p, \frac{du_p}{dt} \right)_p,$$

в котором

$$\|u_p\|_*^2 = \left\| \frac{du_p}{dt} \right\|_p^2 + \sum_{\alpha=1}^{p-1} \|A_{\alpha} u_p\|_p^2.$$

С учетом

$$\left(s_p, \frac{du_p}{dt} \right)_p \leq \|s_p\|_p \left\| \frac{du_p}{dt} \right\|_p \leq \|s_p\|_p \|u_p\|_*$$

получим

$$\|u_p(t)\|_* \leq \left(\|w_p^0\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p-1} \|A_{\alpha} v_p^0\|_p^2 \right)^{1/2} + \int_0^t \|s_p(\theta)\|_p d\theta. \quad (2.9)$$

Привлекая отдельные уравнения системы (2.1), из (2.9) можно получить априорные оценки для u_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$.

3. Обсуждение постановки задачи. К системам эволюционных уравнений типа (2.1) мы приходим при аппроксимации по пространству многих прикладных проблем. Проиллюстрируем широкую распространенность и важность задачи (2.1), (2.2) некоторыми характерными примерами. Необходимо отметить, что в каждой рассматриваемой начально-краевой задаче необходимо конкретизировать соответствующие пространства сеточных и непрерывных функций. Особое внимание должно быть уделено свойствам сопряженности построенных сеточных операторов с учетом имеющихся граничных условий.

Начнем со случая системы из двух уравнений ($p = 2$ в (2.1)). В квантовой физике [12] большое внимание уделяется нестационарному уравнению Шрёдингера. Комплекснозначная волновая функция $\psi(\mathbf{x}, t)$ определяется из уравнения

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad (3.1)$$

где i – мнимая единица, $\hbar = h/(2\pi)$, h – постоянная Планка, а $\hat{H}$ – линейный оператор Гамильтона. Разделяя действительную и комплексную часть волновой функции ($\psi = u_1 + iu_2$), после аппроксимации по пространству приходим к системе уравнений (2.1) при $p = 2$, в которой A_1 есть дискретный аналог $-\hbar^{-1} \hat{H}$. В данном случае u_1, u_2 – скалярные функции, а $A_1 = A_1^*$.

Следующий пример системы уравнений типа (2.1) характерен тем, что u_1 – скалярная, а u_2 – векторная функции. При моделировании течений сжимаемой жидкости в качестве базовой линейной модели выступает [13] система уравнений акустики. Пусть $\mathbf{v}$ – скорость, $c = \text{const}$ – скорость звука, p' – отклонение давления от постоянного равновесного давления, отнормированное на $\rho_0 c$ (ρ_0 – постоянная равновесная плотность). Система уравнений для описания малых колебаний сжимаемой среды принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial p'}{\partial t} + c \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c \operatorname{grad} p' &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Будем рассматривать систему уравнений (3.2) в ограниченной области Ω с граничным условием (условие непротекания)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к границе. На множестве таких векторных функций имеем

$$\int_{\Omega} p' \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p' \, d\mathbf{x} = 0,$$

т.е. в соответствующих пространствах скалярных и векторных функций

$$\operatorname{div}^* = -\operatorname{grad}.\tag{3.3}$$

В силу этого можем записать сеточный аналог начально-краевой задачи для системы уравнений акустики (3.2) в виде (2.1) для $u_1 = p'$ (скалярная функция), $u_2 = \mathbf{v}$ (векторная функция) при условии что A_1 есть сеточный аналог $c \operatorname{div}$.

При построении дискретных аналогов необходимо отследить отмеченное свойство сопряженности операторов дивергенции и градиента (3.3). Такие согласованные аппроксимации относительно просто строятся на основе конечно-элементных аппроксимаций и при использовании разностных аппроксимаций на регулярных сетках. Возможности построения согласованных аппроксимаций на нерегулярных сетках обсуждаются в [14], [15].

Третий пример относится к случаю, когда обе компоненты u_1 , u_2 являются векторными функциями. Распространение электромагнитных волн в однородной среде описывается [16] уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0,\end{aligned}\tag{3.4}$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного поля соответственно, ε , μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости. Для того чтобы перейти от (3.4) к (2.1), положим $u_1 = \varepsilon^{1/2} \mathbf{E}$, $u_2 = \mu^{1/2} \mathbf{H}$ и свяжем A_1 с оператором $(\varepsilon \mu)^{-1/2} \operatorname{rot}$.

Отдельного упоминания заслуживают системы типа (2.1) при $p > 2$. Мы не будем рассматривать новые прикладные задачи, а ограничимся примерами, когда рассматриваемые уравнения (3.2) или (3.4) можно записать в виде системы уравнений (2.1) с числом уравнений большим двух.

Предположим, что рассматривается двумерная задача распространения электромагнитных волн, когда в декартовых координатах x, y, z нет зависимости от координаты z . Тогда система уравнений (3.4) распадается на две независимые системы (ТЕ и ТМ моды [17]), каждая из которых содержит три уравнения. Например, для искоемых E_x, E_y, H_z (ТЕ) имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} &= 0, \\ \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 0, \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Система уравнений (3.5) записывается в виде системы типа (2.1) при $p = 3$, $u_1 = \varepsilon^{1/2} E_x$, $u_2 = \varepsilon^{1/2} E_y$, $u_3 = \mu^{1/2} H_z$ и

$$A_1 \rightarrow -(\varepsilon\mu)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad A_2 \rightarrow (\varepsilon\mu)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x}.$$

В этом случае все искомые величины являются скалярными функциями.

Аналогичная ситуация имеет место и при использовании покоординатной записи системы уравнений акустики (3.2), которая рассматривается, например, в параллелепипеде Ω . Пусть $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$. Тогда из (3.2) получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + c \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + c \frac{\partial p'}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + c \frac{\partial p'}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + c \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Для использования записи типа (2.1) положим $p = 4$, $u_1 = v_x$, $u_2 = v_y$, $u_3 = v_z$, $u_4 = p'$ с операторами

$$A_1 \rightarrow c \frac{\partial}{\partial x}, \quad A_2 \rightarrow c \frac{\partial}{\partial y}, \quad A_3 \rightarrow c \frac{\partial}{\partial z}.$$

Принципиальный момент использования систем уравнений в виде (3.5), (3.6) связан с выделением наиболее простых (одномерных) дифференциальных операторов.

Многие прикладные математические модели имеют факторизованно-сопряженную структуру, когда оператор задачи представляется в виде произведения сопряженных друг другу операторов [18]. Такие постановки задач математической физики непосредственно связаны с использованием систем уравнений с сопряженными операторами, которые часто относятся к рассматриваемому нами классу (2.1). В частности, это замечание касается линейных динамических задач теории упругости, которые в различных постановках рассмотрены в работе [19]. Использование сопряженных операторов может быть удобным инструментом для построения эффективных вычислительных алгоритмов. Применительно к конечно-элементным аппроксимациям речь идет о технологии смешанных и гибридных элементах [20].

4. Схемы с весами. Для приближенного решения дифференциально-операторной задачи (2.1), (2.2) будем использовать обычные схемы с весами. Определим равномерную сетку по времени

$$\bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, \tau N = T\}$$

и положим $y^n = y(t_n)$. При использовании двухслойной схемы уравнения (2.1) аппроксимируются разностными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} + A_\alpha(\sigma y_p^{n+1} + (1 - \sigma)y_p^n) &= f_\alpha^{n+1/2}, \\ \frac{y_p^{n+1} - y_p^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^*(\sigma y_\alpha^{n+1} + (1 - \sigma)y_\alpha^n) &= f_p^{n+1/2}, \\ \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где σ – числовой параметр (вес); обычно, $0 \leq \sigma \leq 1$. Для простоты мы ограничимся случаем одинакового веса для всех уравнений системы (2.1). С учетом (2.2) дополним (4.1) начальным условием

$$y_\alpha^0 = v_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (4.2)$$

Схемы с весами широко используются для задач газовой динамики [21]. Для системы (4.1) из двух операторно-разностных уравнений детальное исследование условий устойчивости (необходимые и достаточные условия, выбор нормы) схем с весами проведено в [22]. Здесь мы ограничимся наиболее простыми оценками устойчивости для операторно-разностной схемы (4.1). Ориентиром для нас будет служить оценка (2.3).

ТЕОРЕМА 1. *Операторно-разностная схема (4.1) безусловно устойчива при $\sigma \geq 1/2$ и для разностного решения имеет место послойная оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^p \|y_\alpha^{n+1}\|_\alpha^2 \leq \exp\left(\frac{4\tau}{T}\right) \sum_{\alpha=1}^p \|y_\alpha^n\|_\alpha^2 + \tau T \exp\left(\frac{2\sigma - 1}{T} \tau\right) \sum_{\alpha=1}^p \|f_\alpha^{n+1/2}\|_\alpha^2. \quad (4.3)$$

Для ДОКАЗАТЕЛЬСТВА домножим каждое отдельное уравнение (4.1) скалярно в H_α на $2\tau y_\alpha^{n,\sigma}$, где

$$y_\alpha^{n,\sigma} = \sigma y_\alpha^{n+1} + (1 - \sigma)y_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

и сложим их. Принимая во внимание, что

$$2\tau y_\alpha^{n,\sigma} = \tau(y_\alpha^{n+1} + y_\alpha^n) + (2\sigma - 1)\tau^2 \frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau},$$

получим

$$\sum_{\alpha=1}^p \|y_\alpha^{n+1}\|_\alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^p \|y_\alpha^n\|_\alpha^2 + (2\sigma - 1)\tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \left\| \frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} \right\|_\alpha^2 = 2\tau \sum_{\alpha=1}^p (f_\alpha^{n+1/2}, y_\alpha^{n,\sigma})_\alpha. \quad (4.4)$$

Для членов в правой части имеем

$$2\tau(f_\alpha^{n+1/2}, y_\alpha^{n,\sigma})_\alpha = (2\sigma - 1)\tau^2 \left(f_\alpha^{n+1/2}, \frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} \right)_\alpha + \tau(f_\alpha^{n+1/2}, y_\alpha^{n+1} + y_\alpha^n)_\alpha.$$

Мы ограничимся схемами с $\sigma \geq 1/2$ и используем оценки

$$\begin{aligned} & (2\sigma - 1)\tau^2 \left(f_\alpha^{n+1/2}, \frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} \right)_\alpha \\ & \leq (2\sigma - 1)\tau^2 \sum_{\alpha=1}^p \left\| \frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} \right\|_\alpha^2 + \frac{(2\sigma - 1)}{4} \tau^2 \|f_\alpha^{n+1/2}\|_\alpha^2, \\ & \tau \sum_{\alpha=1}^p (f_\alpha^{n+1/2}, y_\alpha^{n,\sigma})_\alpha \leq \frac{\tau}{2T} \|y_\alpha^{n,\sigma}\|_\alpha^2 + \frac{\tau T}{2} \|f_\alpha^{n+1/2}\|_\alpha^2, \\ & \|y_\alpha^{n,\sigma}\|_\alpha^2 \leq 2(\|y_\alpha^{n+1}\|_\alpha^2 + \|y_\alpha^n\|_\alpha^2). \end{aligned}$$

Подстановка в (4.4) дает

$$\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \sum_{\alpha=1}^p \|y_\alpha^{n+1}\|_\alpha^2 \leq \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) \sum_{\alpha=1}^p \|y_\alpha^n\|_\alpha^2 + \frac{\tau T}{2} \left(1 + \frac{2\sigma - 1}{2T} \tau\right) \sum_{\alpha=1}^p \|f_\alpha^{n+1/2}\|_\alpha^2. \quad (4.5)$$

Без ограничения общности будем считать, что $N \geq 2$ и поэтому

$$\left(1 + \frac{\tau}{T}\right) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^{-1} \leq \exp\left(\frac{4\tau}{T}\right).$$

С учетом этого из (4.5) получим послойную оценку устойчивости (4.3).

Для простоты, здесь и далее мы ограничились послойными оценками разностного решения. Из них стандартным образом [22; лемма 1, гл. III, § 1] получаем оценки разностного решения по начальным данным и правой части. Оценка (4.3) выступает в качестве немного более грубого (ρ -устойчивость с $\rho = \exp(c\tau)$, $c > 0$) сеточного аналога оценки (2.3) и обеспечивает безусловную устойчивость разностной схемы с весами (4.1), (4.2) при естественных ограничениях $\sigma \geq 1/2$. Рассматривая соответствующую задачу для погрешности, мы убеждаемся в сходимости решения операторно-разностной задачи (4.1), (4.2) к решению дифференциально-разностной задачи (2.1), (2.2) в $\mathbf{H}$ при $\sigma \geq 1/2$ с $\mathcal{O}((2\sigma - 1)\tau + \tau^2)$. При $\sigma = 1/2$ имеем второй порядок сходимости по τ .

Вычислительная реализация схемы (4.1), (4.2) связана с решением следующей сеточной задачи на новом $n + 1$ временном слое:

$$\begin{aligned} y_\alpha^{n+1} + \sigma\tau A_\alpha y_p^{n+1} &= \chi_\alpha^{n+1/2}, \\ y_p^{n+1} - \sigma\tau \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* y_\alpha^{n+1} &= \chi_p^{n+1/2}, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad (4.6)$$

при заданных $\chi_p^{n+1/2}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Подставляя y_α^{n+1} из первых $p - 1$ уравнений системы (4.6) в последнее уравнение, получим

$$y_p^{n+1} + \sigma^2\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* A_\alpha y_p^{n+1} = \chi_p^{n+1/2} + \sigma\tau \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* \chi_\alpha^{n+1/2}. \quad (4.7)$$

Другие компоненты приближенного решения находятся после решения сеточной задачи (4.7) по явным формулам – первые $p - 1$ уравнения системы (4.6).

5. Явно-неявные схемы. Второй класс операторно-разностных схем связан с использованием явно-неявных аппроксимаций для отдельных уравнений системы (2.1). Начнем с простейшей схемы этого типа, когда для первых $p - 1$ уравнений используются явные аппроксимации:

$$\begin{aligned} \frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} + A_\alpha y_p^n &= f_\alpha^{n+1/2}, \\ \frac{y_p^{n+1} - y_p^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* y_\alpha^{n+1} &= f_p^{n+1/2}, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.1)$$

Для сохранения второго порядка аппроксимации часто ориентируются на использование различных сеток по времени для отдельных компонент решения. Примером может служить следующий вариант схемы (5.1):

$$\begin{aligned} \frac{y_\alpha^{n+1/2} - y_\alpha^{n-1/2}}{\tau} + A_\alpha y_p^n &= f_\alpha^n, \\ \frac{y_p^{n+1} - y_p^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* y_\alpha^{n+1/2} &= f_p^{n+1/2}, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.2)$$

Хотя последнее уравнение системы (5.1) (а также (5.2)) записано как формально неявная схема, сам переход на новый временной слой базируется на явных реализациях. Начальные условия для (5.2) возьмем в виде

$$\frac{y_\alpha^{1/2} + y_\alpha^{-1/2}}{2} = v_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad y_p^0 = v_p^0.$$

Явно-неявные схемы нашли широкое применение, особенно в варианте (5.2). Подробное обсуждение таких схем применительно к задачам электродинамики имеется в книге [17], в которой можно найти ссылки на работы других авторов.

Рассматривая последнее уравнение системы (5.2) на двух временных слоях, придем к уравнению

$$\frac{y_p^{n+1} - 2y_p^n + y_p^{n-1}}{\tau^2} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* \frac{y_\alpha^{n+1/2} - y_\alpha^{n-1/2}}{\tau} = \frac{f_p^{n+1/2} - f_p^{n-1/2}}{\tau}.$$

Принимая во внимание $p - 1$ первых уравнений системы (5.2), получим

$$\frac{y_p^{n+1} - 2y_p^n + y_p^{n-1}}{\tau^2} + \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* A_\alpha y_p^n = \xi_p^n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.3)$$

где

$$\xi_p^n = \frac{f_p^{n+1/2} - f_p^{n-1/2}}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* f_\alpha^n.$$

Тем самым приходим к явной аппроксимации эволюционного уравнения второго порядка (см. (2.7)). Уравнение (5.3) дополняется начальными условиями

$$y_p^0 = v_p^0, \quad \frac{y_p^1 - y_p^0}{\tau} = w_p^0, \quad (5.4)$$

которые вытекают из (4.2). Аппроксимация второго начального условия (5.4) со вторым порядком по τ проводится на решениях системы (2.1).

Для трехслойных операторно-разностных схем, к которым относится схема (5.3), получены [1], [22] законченные (совпадающие необходимые и достаточные условия) результаты по устойчивости. Имея их в виду, приведем типичные достаточные условия устойчивости и соответствующие оценки по начальным данным и правой части.

Будем рассматривать трехслойную разностную схему

$$B \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + Ay^n = f^n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.5)$$

с начальными данными

$$y^0 = v^0, \quad \frac{y^1 - y^0}{\tau} = w^0. \quad (5.6)$$

Ограничимся простейшим случаем, когда операторы A и B , разностной схемы (5.5) являются постоянными, самосопряженными и положительными, т.е.

$$A(t) = A = A^* > 0, \quad B(t) = B = B^* > 0$$

в евклидовом пространстве H .

ТЕОРЕМА 2. *Операторно-разностная схема (5.5) с постоянными, самосопряженными и положительными операторами A , B устойчива при*

$$B > \frac{\tau^2}{4} A, \quad (5.7)$$

причем справедлива оценка

$$\|S^{n+1}\|_*^2 \leq \exp\left(\frac{4\tau}{T}\right) \|S^n\|_*^2 + \tau T \left(\left(B - \frac{\tau^2}{4} A \right)^{-1} f^n, f^n \right), \quad (5.8)$$

где S^n – это пара (y^{n-1}, y^n) и

$$\|S^n\|_*^2 = \left(\left(B - \frac{\tau^2}{4} A \right) \frac{y^n - y^{n-1}}{\tau}, \frac{y^n - y^{n-1}}{\tau} \right) + \left(A \frac{y^n + y^{n-1}}{2}, \frac{y^n + y^{n-1}}{2} \right).$$

Для ДОКАЗАТЕЛЬСТВА введем обозначения

$$\zeta^n = \frac{y^n + y^{n-1}}{2}, \quad \eta^n = \frac{y^n - y^{n-1}}{\tau}$$

и с учетом тождества

$$y^n = \frac{1}{4}(y^{n+1} + 2y^n + y^{n-1}) - \frac{1}{4}(y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1})$$

перепишем схему (5.5) в виде

$$\left(B - \frac{\tau^2}{4}A\right) \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\tau} + A \frac{\zeta^{n+1} + \zeta^n}{2} = f^n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Домножим это уравнение скалярно в H на

$$2(\zeta^{n+1} - \zeta^n) = \tau(\eta^{n+1} + \eta^n),$$

что дает

$$\begin{aligned} & \left(\left(B - \frac{\tau^2}{4}A\right) \eta^{n+1}, \eta^{n+1} \right) + (A\zeta^{n+1}, \zeta^{n+1}) - \left(\left(B - \frac{\tau^2}{4}A\right) \eta^n, \eta^n \right) - (A\zeta^n, \zeta^n) \\ & = 2(f^n, (\zeta^{n+1} - \zeta^n)). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Пусть выполнено неравенство (5.7); тогда можно задать сеточную норму по правилу (см. (2.9))

$$\|S^n\|_*^2 \equiv \left(\left(B - \frac{\tau^2}{4}A\right) \eta^n, \eta^n \right) + (A\zeta^n, \zeta^n).$$

Такая норма согласуется с нормами для непрерывных функций (см., например, оценку (2.9)). С учетом этих обозначений уравнение (5.9) примет вид

$$\|S^{n+1}\|_*^2 - \|S^n\|_*^2 = \tau(f^n, (\eta^{n+1} + \eta^n)).$$

Аналогично доказательству оценки (4.5) имеем

$$\begin{aligned} \tau(f^n, (\eta^{n+1} + \eta^n)) & \leq \frac{\tau}{T} \left(\left(B - \frac{\tau^2}{4}A\right) \eta^{n+1}, \eta^{n+1} \right) \\ & + \frac{\tau}{T} \left(\left(B - \frac{\tau^2}{4}A\right) \eta^n, \eta^n \right) + \frac{\tau T}{2} \left(\left(B - \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1} f^n, f^n \right), \end{aligned}$$

и поэтому

$$\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \|S^{n+1}\|_*^2 \leq \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) \|S^n\|_*^2 + \frac{\tau T}{2} \left(\left(B - \frac{\tau^2}{4}A\right)^{-1} f^n, f^n \right).$$

Аналогично (4.3) из этого неравенства (при $2\tau \leq T$) получим оценку (5.8).

Используем теорему 2 для анализа схемы (5.3), (5.4), к которой мы приходим при реализации явно-неявной схемы (5.2) для задачи (2.1), (2.2).

Схема (5.3), (5.4) записывается в виде (5.5), (5.6) при

$$B = E, \quad A = \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* A_\alpha, \quad (5.10)$$

где E – единичный (тождественный) оператор. Критерий устойчивости (5.7) приводит нас к ограничениям на шаг разностной схемы (5.3): $\tau^2 < 4/\|A\|$.

Отталкиваясь от явной схемы (5.3), можно строить безусловно устойчивые неявные схемы. Наиболее просто это делать на основе принципа регуляризации разностных схем Самарского [1], [23], который базируется на повышении запаса устойчивости схемы за счет возмущения операторов разностной схемы. Устойчивость

схемы (5.5), (5.10) может быть обеспечена за счет увеличения оператора B или же за счет уменьшения оператора A .

При регуляризации оператора B положим

$$B = E + \sigma\tau^2 A, \quad A = \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_{\alpha}^* A_{\alpha}. \quad (5.11)$$

Схема (5.5), (5.11) остается в классе схем второго порядка аппроксимации и является безусловно устойчивой при $\sigma \geq 1/4$. Наибольший интерес представляет схема (5.5), (5.11) при $\sigma = 1/4$, когда норма разностного решения и оценка решения (5.8) более всего близки к соответствующей норме и оценке для дифференциальной задачи (2.9). В этом случае в (5.8) имеем $B - 0,25\tau^2 A = E$.

К регуляризованной схеме (5.5), (5.11) мы приходим при использовании следующей явно-неявной схемы:

$$\begin{aligned} \frac{y_{\alpha}^{n+1/2} - y_{\alpha}^{n-1/2}}{\tau} + A_{\alpha} y_p^n &= f_{\alpha}^n, \\ \left(E + \sigma\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_{\alpha}^* A_{\alpha} \right) \frac{y_p^{n+1} - y_p^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_{\alpha}^* y_{\alpha}^{n+1/2} &= f_p^{n+1/2}, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad (5.12)$$

для приближенного решения задачи Коши для системы уравнений (2.1).

ТЕОРЕМА 3. Регуляризованная операторно-разностная схема (5.12) безусловно устойчива при $\sigma \geq 1/4$ и аппроксимирует систему уравнений (2.1) со вторым порядком по τ .

Вычислительная реализация этой схемы связана с обращением того же оператора (см. (4.7)), что и при использовании схем с весами (4.1).

6. Аддитивные схемы покомпонентного расщепления. Выше рассмотренные безусловно устойчивые операторно-разностные схемы (4.1) и (5.12) не очень удобны в вычислительном плане. Построим аддитивные схемы для задачи (2.1), (2.2), в которых переход на новый временной слой был бы связан с решением более простых задач, связанных с обращением операторов с отдельными операторами $A_{\alpha}^* A_{\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, а не с их суммой (оператор A в (5.11)).

Будем использовать векторную запись (2.4) системы уравнений (2.1). Для оператора $\mathbf{A}$ с учетом (2.5) используем аддитивное представление

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^{p-1} \mathbf{A}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{A}^{(\alpha)} = -(\mathbf{A}^{(\alpha)})^*, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad (6.1)$$

где

$$\mathbf{A}^{(\alpha)} = \{A_{ij}^{(\alpha)}\}, \quad A_{ij}^{(\alpha)} = \begin{cases} A_{\alpha}, & i = \alpha, j = p, \\ -A_{\alpha}^*, & i = p, j = \alpha, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Основное свойство введенных операторов $\mathbf{A}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, связано с их кососимметричностью. Это позволяет использовать для приближенного решения задачи

Коши для уравнения (2.4), (6.1) различные классы безусловно устойчивых аддитивных операторно-разностных схем [5], [6]. Применительно к задаче Коши (2.1), (2.2) имеет смысл обратить внимание прежде всего на схемы второго порядка аппроксимации по τ .

Для системы из трех уравнений ($p = 3$) можно использовать операторный аналог классической схемы Писмена–Рекфорда (схема переменных направлений). Применительно к системе (2.4), (6.1) переход на новый временной слой осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{y}^{n+1/2} - \mathbf{y}^n}{0,5\tau} + \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{y}^{n+1/2} + \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{y}^n &= 2\mathbf{f}_1^{n+1/2}, \\ \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^{n+1/2}}{0,5\tau} + \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{y}^{n+1/2} + \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{y}^{n+1} &= 2\mathbf{f}_2^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где

$$\mathbf{f}^{n+1/2} = \mathbf{f}_1^{n+1/2} + \mathbf{f}_2^{n+1/2}.$$

Для аддитивной схемы (6.2) соответствующая оценка (см, например, [1; доказательство теоремы 3, § 1, гл. IX]) имеет вид

$$\|(\mathbf{E} + 0,5\tau\mathbf{A}^{(2)})\mathbf{y}^{n+1}\| \leq \|(\mathbf{E} + 0,5\tau\mathbf{A}^{(2)})\mathbf{y}^n\| + \tau(\|\mathbf{f}_1^{n+1/2}\| + \|\mathbf{f}_2^{n+1/2}\|),$$

которая выступает в качестве сеточного аналога оценки (2.6). Принимая во внимание кососимметричность оператора $\mathbf{A}^{(2)}$, имеем

$$\|(\mathbf{E} + 0,5\tau\mathbf{A}^{(2)})\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + 0,25\tau^2\|\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{y}\|^2.$$

Для более общего случая, когда число уравнений системы (2.1) больше трех, аддитивные схемы строятся на основе понятия суммарной аппроксимации. Для построения схем второго порядка можно ориентироваться на организацию вычислений по схеме

$$\frac{1}{2}\mathbf{A}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbf{A}^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{1}{2}\mathbf{A}^{(p-1)} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbf{A}^{(p-1)} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbf{A}^{(p-2)} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{1}{2}\mathbf{A}^{(1)}.$$

Соответствующая аддитивная схема покомпонентного расщепления имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{y}^{n+\alpha/(2p-2)} - \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/(2p-2)}}{\tau} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^{(\alpha)}(\mathbf{y}^{n+\alpha/(2p-2)} + \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/(2p-2)}) \\ = \mathbf{f}_\alpha^{n+1/2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1 \\ \frac{\mathbf{y}^{n+\alpha/(2p-2)} - \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/(2p-2)}}{\tau} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^{(2p-1-\alpha)}(\mathbf{y}^{n+\alpha/(2p-2)} + \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/(2p-2)}) \\ = \mathbf{f}_\alpha^{n+1/2}, \quad \alpha = p, p+1, \dots, 2p-2, \end{aligned} \quad (6.3)$$

в которой

$$\mathbf{f}^{n+1/2} = \sum_{\alpha=1}^{2p-2} \mathbf{f}_\alpha^{n+1/2}.$$

Можно показать, что аддитивная операторно-разностная схема суммарной аппроксимации (6.3) безусловно устойчива и аппроксимирует систему уравнений (2.1)

со вторым порядком по τ . Доказательство проводится стандартным образом, достаточно громоздкие технические детали можно найти в [6]. Домножая скалярно уравнения схемы (6.3) на $\mathbf{y}^{n+\alpha/2(p-1)} + \mathbf{y}^{n+(\alpha-1)/2(p-1)}$, получим соответствующую оценку. В самом простом случае, когда уравнение (2.4) однородно ($\mathbf{f}(t) = 0$), имеем

$$\|\mathbf{y}^{n+\alpha/2(p-1)}\| = \|\mathbf{y}^n\|, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2p-2.$$

Вычислительная реализация рассматриваемых аддитивных схем значительно более проста, чем схем типа (4.6) и (5.12). Чтобы пояснить это, рассмотрим, например, первый шаг в схеме (6.2). Необходимо решить уравнение

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\mathbf{A}^{(1)}\right)\mathbf{y}^{n+1/2} = \mathbf{r}^{n+1/2}.$$

при заданной правой части $\mathbf{r}^{n+1/2}$. В покоординатной записи этого уравнения имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} y_1^{n+1/2} + \frac{\tau}{2}A_1y_3^{n+1/2} &= r_1^{n+1/2}, \\ y_2^{n+1/2} &= r_2^{n+1/2}, \\ y_3^{n+1/2} - \frac{\tau}{2}A_1^*y_1^{n+1/2} &= r_3^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Подставляя $y_1^{n+1/2}$ из первого уравнения в третье, получим

$$y_3^{n+1/2} + \frac{\tau^2}{4}A_1^*A_1y_3^{n+1/2} = r_3^{n+1/2} + \frac{\tau}{2}A_1^*r_1^{n+1/2}.$$

Тем самым, необходимо решать задачу с одним оператором A_1 .

7. Регуляризованные аддитивные схемы. Основной недостаток аддитивных схем типа (6.2) связан с проблемами их обобщения на случай большего числа уравнений. Строгие результаты об устойчивости и сходимости удается получить только для частных задач с попарно-перестановочными операторами A_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, $p > 3$. Схемы суммарной аппроксимации типа (6.3) широко используются в вычислительной гидродинамике (см., например, [24]). Среди недостатков таких схем можно отметить непрозрачность конструкции (каждое отдельное уравнение не аппроксимирует дифференциальную задачу), относительную сложность получения схем повышенного порядка аппроксимации. Отметим некоторые возможности построения других схем расщепления для задачи (2.1), (2.2), которые относятся к классу регуляризованных аддитивных операторно-разностных схем [6].

Будем отталкиваться от явно-неявной схемы (5.2), которая записывается как (5.5), (5.10). Регуляризованную схему для (5.5), (5.10) будем строить не на увеличении оператора B , как это сделано в (5.11), а на уменьшении оператора A . Рассмотрим схему (5.5), в которой

$$B = E, \quad A = \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^*(E + \sigma\tau^2 A_\alpha A_\alpha^*)^{-1} A_\alpha. \quad (7.1)$$

При такой регуляризации свойство самосопряженности оператора A и второй порядок аппроксимации в схеме (5.5), (7.1) сохранены.

Достаточные условия устойчивости (5.7) в случае (7.1) запишем в виде

$$\frac{4}{(p-1)\tau^2} \sum_{\alpha=1}^{p-1} E > \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_{\alpha}^* (E + \sigma\tau^2 A_{\alpha} A_{\alpha}^*)^{-1} A_{\alpha}.$$

Это неравенство будет выполнено при

$$\frac{4}{(p-1)\tau^2} E > A_{\alpha}^* (E + \sigma\tau^2 A_{\alpha} A_{\alpha}^*)^{-1} A_{\alpha}.$$

При невырожденности оператора A_{α} имеем эквивалентное неравенство

$$\frac{4}{(p-1)\tau^2} C > C(E + \sigma\tau^2 C)^{-1} C, \quad C = A_{\alpha} A_{\alpha}^*.$$

Оно будет справедливо при $\sigma \geq (p-1)/4$.

Реализация регуляризованной схемы (5.5), (7.1) может быть основана на решении системы операторно-разностных уравнений

$$\begin{aligned} (E + \sigma\tau^2 A_{\alpha} A_{\alpha}^*) \frac{y_{\alpha}^{n+1/2} - y_{\alpha}^{n-1/2}}{\tau} + A_{\alpha} y_p^n &= f_{\alpha}^n, \\ \frac{y_p^{n+1} - y_p^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_{\alpha}^* y_{\alpha}^{n+1/2} &= f_p^{n+1/2}. \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad (7.2)$$

Неявные вычисления связаны с решением $p-1$ задач

$$\begin{aligned} (E + \sigma\tau^2 A_{\alpha} A_{\alpha}^*) y_{\alpha}^{n+1/2} \\ = (E + \sigma\tau^2 A_{\alpha} A_{\alpha}^*) y_{\alpha}^{n-1/2} + \tau f_{\alpha}^n - \tau A_{\alpha} y_p^n, \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1,$$

связанных с отдельными операторами A_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$.

ТЕОРЕМА 4. Регуляризованная аддитивная схема (7.2) для невырожденных операторов A_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, безусловно устойчива при $\sigma \geq (p-1)/4$ и аппроксимирует систему уравнений (2.1) со вторым порядком по τ . Для компоненты $y = y_p$ имеет место оценка (5.8), (7.1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, М., 1983.
- [2] P. Knabner, L. Angermann, *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Texts Appl. Math., **44**, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [3] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics*, Texts Appl. Math., **37**, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [4] Ch. Grossmann, H.-G. Roos, M. Stynes, *Numerical Treatment of Partial Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [5] Г. И. Марчук, *Методы расщепления*, Наука, М., 1988.
- [6] А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Аддитивные схемы для задач математической физики*, Наука, М., 1999.
- [7] А. А. Самарский, Е. С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений*, Наука, М., 1978.

- [8] F. J. Lisbona, P. N. Vabishchevich, “Operator-splitting schemes for solving elasticity problems”, *Comput. Methods Appl. Math.*, **1**:2 (2001), 188–198.
- [9] П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский, “Решение задач динамики несжимаемой жидкости с переменной вязкостью”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **40**:12 (2000), 1813–1822.
- [10] A. Samarskii, P. Vabishchevich, “Additive schemes for systems of time-dependent equations of mathematical physics”, *Numerical Methods and Applications*, Lecture Notes in Comput. Sci., **2542**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 48–60.
- [11] П. Н. Вабищевич, “Разностные схемы для решения нестационарных векторных задач”, *Дифференц. уравнения*, **40**:7 (2004), 936–943.
- [12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1989.
- [13] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика*, Наука, М., 1986.
- [14] А. А. Самарский, А. В. Колдоба, Ю. А. Повещенко, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский, *Разностные схемы на нерегулярных сетках*, Критерий, Минск, 1996.
- [15] P. N. Vabishchevich, “Finite-difference approximation of mathematical physics problems on irregular grids”, *Comput. Methods Appl. Math.*, **5**:3 (2005), 294–330.
- [16] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
- [17] A. Tafflove, S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, Boston, MA, 2000.
- [18] А. Н. Коновалов, “Сопряженно-факторизованные модели в задачах математической физики”, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **1**:1 (1998), 25–58.
- [19] А. Н. Коновалов, “Динамическая задача теории упругости в постановке “скорости-напряжения””, *Дифференц. уравнения*, **35**:2 (1999), 238–248.
- [20] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Ser. Comput. Math., **15**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [21] А. А. Самарский, Ю. П. Попов, *Разностные методы решения задач газовой динамики*, Наука, М., 1992.
- [22] А. А. Самарский, А. В. Гулин, *Устойчивость разностных схем*, УРСС, М., 2004.
- [23] А. А. Самарский, “О регуляризации разностных схем”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **7**:1 (1967), 62–93.
- [24] В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко, *Метод расщепления в задачах газовой динамики*, Наука, Новосибирск, 1981.

П. Н. Вабищевич

Институт проблем безопасного развития атомной
энергетики РАН, г. Москва
E-mail: vab@ibrae.ac.ru

Поступило

05.02.2009

Исправленный вариант

23.04.2012