Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Прасолов, Маленькие косы с большой ультраверхушкой, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 577–588

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 09:26:34

Маленькие косы с большой ультраверхушкой

М. Прасолов

В статье [1] поставлен вопрос (открытый вопрос 2): верно ли, что размер ультраверхушки класса сопряженности жесткой псевдоаносовской косы ограничен многочленом от длины косы и количества нитей? Мы даем отрицательный ответ.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Проблема сопряженности в группе кос решена положительно в 1969 г. Гарсайдом [2]. Построенный алгоритм экспоненциален. В работах [1], [3]–[7] алгоритм Гарсайда улучшался, но полиномиальный алгоритм для решения проблемы сопряженности найти пока не удалось.

Алгоритм Гарсайда вычисляет так называемую верхушку класса сопряженности данной косы.

Позже Тёрстон [3] ввел понятие левой нормальной формы, улучшив алгоритм Гарсайда. Левая нормальная форма вычисляется за полиномиальное время от длины косы и количества нитей. Тем самым Тёрстоном было получено полиномиальное решение проблемы равенства в группе кос.

В 1994 г. Аль-Рифай и Мортон [4] еще модернизировали алгоритм, разработанный Гарсайдом и впоследствии улучшенный Тёрстоном. Их алгоритм ищет меньшее подмножество класса сопряженности, чем верхушка, – суперверхушку. Авторы показали, как найти один элемент суперверхушки за полиномиальное время.

В 2003 г. в [5] Гонсалес-Менезес и Франко показали, как можно найти остальные элементы суперверхушки за время, ограниченное произведением размера суперверхушки на некоторый многочлен от длины косы и числа нитей. Однако, размер суперверхушки не ограничен таким многочленом.

В 2003 г. Гебхардт [6] определил еще меньшее подмножество класса сопряженности – ультраверхушку, а также предложил эффективный способ ее вычисления. Гебхардт предложил алгоритм, вычисляющий один элемент ультраверхушки, который согласно эксперименту работает быстро, но его полиномиальность не доказана. В [6] автор доказал, что оставшуюся часть ультраверхушки его алгоритм вычисляет за время, ограниченное произведением размера ультраверхушки на некоторый многочлен от длины косы и числа нитей. Однако, размер ультраверхушки заведомо

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-12148-офи_м).

не полиномиален для класса приводимых кос. Но поиск сопрягающей косы в случае приводимых кос сводится к поиску сопрягающей косы в случае периодических и псевдоаносовских кос. Для периодических кос найден полиномиальный алгоритм поиска сопрягающей косы [8]. Бирман, Гебхардт и Гонсалес-Менезес [1] предложили идею, как свести задачу в случае псевдоаносовских кос к так называемым жестким псевдоаносовским косам. Однако, как показывается в настоящей работе, существует серия жестких псевдоаносовских кос, для которой размер ультраверхушки класса сопряженности косы серии растет экспоненциально. Эта серия кос представляет принципиальную трудность на пути решения проблемы сопряженности в группе кос, предложенном авторами в [1].

ТЕОРЕМА 1. *Коса на n нитях*

$$\alpha_n := \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_4^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{(-1)^n}$$

жесткая, и ультраверхушка ее класса сопряженности состоит как минимум из $2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}$ элементов.

ТЕОРЕМА 2. *Коса α_n псевдоаносовская при нечетном $n \geq 3$.*

Экспоненциальный рост ультраверхушки класса сопряженности кос α_n был обнаружен Дынниковым экспериментально с помощью программы Гонсалеса-Менезеса, реализующей упомянутые выше алгоритмы. Согласно результатам вычислений, при $n = 3, 4, \dots, 11$, размер ультраверхушки класса сопряженности косы α_n равен

$$(3 - (-1)^n) \cdot 3^{n-3}.$$

Рассматриваемые выше алгоритмы основаны на специальном так называемом свойстве гарсайдности артиновского задания группы кос. Бирман, Ко и Ли [7] предложили новую систему образующих группы кос, также обладающую этим свойством и, тем самым, получили новые алгоритмы решения проблемы сопряженности, которые отличаются от ранее рассмотренных лишь использованием других образующих. Полученные алгоритмы оказались полиномиальными от длины косы и числа нитей в случае периодических кос [8], а также работают быстрее и в некоторых других случаях, чем ранее известные алгоритмы. Однако, размер ультраверхушки класса сопряженности косы из последовательности в теореме 1 растет экспоненциально и в новых образующих.

ТЕОРЕМА 3. *Ультраверхушка в образующих Бирман–Ко–Ли класса сопряженности косы α_n состоит как минимум из $2^{(n-1)/2}$ жестких кос при нечетном n .*

Вычисления на компьютере показали, что при $n = 3, 4, \dots, 9$ размер ультраверхушки в образующих Бирман–Ко–Ли класса сопряженности косы α_n равен

$$\frac{3 - (-1)^n}{2} \cdot n \cdot 3^{n-3}.$$

2. Определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Косой-перестановкой* называется коса, у которой существует диаграмма, в которой все перекрестки положительные и любые две нити пересекаются не более одного раза.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Элементом Гарсайда* (обозначается Δ) называется такая коса-перестановка, которой соответствует перестановка, которая меняет местами i -й и $(n - i)$ -й элементы для всех i , где n – количество нитей.

Каждой перестановке соответствует коса-перестановка. Для каждой косы-перестановки существует такая коса-перестановка, что их произведение равно элементу Гарсайда.

Мы говорим, что две нити в косе *пересекаются*, если они пересекаются в любой ее диаграмме.

Мы будем использовать так называемую левую нормальную форму в случае артиновских образующих и образующих Бирман–Ко–Ли. Во избежание путаницы в случае артиновских образующих назовем левую нормальную форму *A-нормальной* формой, а в случае образующих Бирман–Ко–Ли – *BKL-нормальной* формой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [3]. *A-нормальной* формой косы b называется ее представление в виде произведения

$$\Delta^k \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_m,$$

где b_i являются косами-перестановками и не равны элементу Гарсайда, причем для любых $i = 1, 2, \dots, m - 1$ и $j = 1, 2, \dots, n - 1$, если в косе b_{i+1} j -я и $(j + 1)$ -я нити пересекаются, то в косе b_i пара нитей, оканчивающиеся в j -й и $(j + 1)$ -й позиции, тоже пересекается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [4]. Суперверхушка класса сопряженности косы b – это множество кос, сопряженных косе b , у которых в *A-нормальной* форме степень при Δ максимальна, а количество кос-перестановок (число m) минимально.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть коса b записана в *A-нормальной* форме

$$b = \Delta^k \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_m.$$

Тогда операция *Cycling* сопоставляет данной косе косу

$$\mathbf{c}(b) = \Delta^k \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_m \cdot (\Delta^k b_1 \Delta^{-k}) = (\Delta^k b_1 \Delta^{-k})^{-1} b (\Delta^k b_1 \Delta^{-k}),$$

а операция *Descyling* – косу

$$\mathbf{d}(b) = \Delta^k \cdot (\Delta^{-k} b_m \Delta^k) \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_{m-1} = b_m b b_m^{-1}.$$

ТЕОРЕМА [4]. Пусть длина записи данной косы равна l . Тогда не более чем за $n^2 \cdot l$ применений операций *Cycling* и *Descyling* к данной косе мы получаем представителя суперверхушки класса сопряженности данной косы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [6]. Ультраверхушка $(U_A(\beta))$ класса сопряженности косы β – это подмножество суперверхушки, состоящее из кос b таких, что $\mathbf{c}^d(b) = b$ для некоторого натурального d .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\Delta^k \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_m$ – *A-нормальная* форма косы b . Коса b называется *жесткой*, если запись

$$\Delta^k \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_m \cdot (\Delta^k b_1 \Delta^{-k})$$

является *A-нормальной* формой косы $\mathbf{c}(b)$.

Перечисленные определения будут относиться к теореме 1, а следующие – к теореме 3.

При $i > j$ обозначим через $(i\ j)$ такую косу: все нити, кроме i -й и j -й идут параллельно друг другу, а i -я и j -я нити проходят над всеми остальными нитями, положительно пересекаясь один раз, т.е. i -я нить проходит над j -й.

Эти косы порождают группу кос [7] и называются *образующими Бирман–Ко–Ли*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_m$ – убывающая последовательность чисел. Косу

$$(n_1\ n_2\ \dots\ n_m) := (n_1\ n_2)(n_2\ n_3)\dots(n_{m-1}\ n_m)$$

назовем убывающим циклом (в терминологии статьи [7] – descending cycle).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Коса $\delta := (n\ n-1\ \dots\ 2\ 1)$ называется *элементом Гарсайда* в образующих Бирман–Ко–Ли (см. [7; fundamental word]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Два убывающих цикла $(n_1\ n_2\ \dots\ n_p)$ и $(m_1\ m_2\ \dots\ m_q)$ назовем параллельными, если выполнено условие: если расположить на окружности по порядку точки $1, 2, \dots, n$, то все точки m_i лежат на одной из дуг, на которые разбивают окружность точки n_i .

ТЕОРЕМА [7]. В полугруппе, порожденной образующими Бирман–Ко–Ли, делителями элемента Гарсайда (в образующих Бирман–Ко–Ли) являются всевозможные произведения некоторого числа попарно параллельных убывающих циклов и только они.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *BKL-нормальной формой* косы b называется представление косы b в виде произведения

$$\delta^k \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_m,$$

где b_i – делители элемента Гарсайда, не равные ему, причем для любого $i = 1, 2, \dots, m-1$ и любой образующей $(j\ k)$, косы

$$b_i \cdot (j\ k) \quad \text{и} \quad (j\ k)^{-1} \cdot b_{i+1}$$

не являются одновременно делителями элемента Гарсайда.

Определение операций Cycling, Decycling, суперверхушки и ультраверхушки аналогичны определениям в случае артиновских образующих. Обозначим ультраверхушку класса сопряженности косы β в новых образующих через $U_{BKL}(\beta)$.

Определения периодической, приводимой и псевдоаносовской косы мы здесь не приводим, читатель может их посмотреть в [1].

3. Основной результат. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ – стандартные образующие группы кос на $n+1$ нитях. Напомним формулировку теоремы 1.

ТЕОРЕМА 1. *Коса на $n+1$ нити*

$$\alpha_{n+1} := \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_4^{-1} \dots \sigma_n^{(-1)^{n+1}} \quad (1)$$

жесткая, и ультраверхушка ее класса сопряженности состоит как минимум из $2^{[(n-1)/2]}$ элементов.

Обозначим множество кос, полученных перестановкой образующих в записи (1) косы α_{n+1} , через S'_{n+1} . Для $2^{[(n-1)/2]}$ кос из S'_{n+1} мы докажем, что они жесткие. Заметим, что операция *Cycling*, примененная к жесткой косе, снова дает жесткую косу, а значит, по теореме из [4], указанной в п. 2, жесткая коса b лежит в $U_A(b)$. Так мы получим $2^{[(n-1)/2]}$ элементов $U_A(\alpha_{n+1})$. Сначала докажем, что косы из S'_{n+1} сопряжены косе α_{n+1} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Любая коса β из S'_{n+1} сопряжена косе α_{n+1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в записи косы β , полученной перестановкой образующих в записи (1) косы α_{n+1} , справа от σ_1 стоит образующая с номером > 2 , то их можно поменять местами, не меняя косы. Будем так делать, пока σ_1 не дойдет до правого края или не встретит σ_2^{-1} . В первом случае переставим σ_1 в начало и получим сопряженную косу. Далее образующую σ_1 можно довести до σ_2^{-1} . Далее аналогично будем двигать образующие σ_1 и σ_2^{-1} вместе, пока σ_2^{-1} не встретит σ_3 и т.д. В итоге получим косу α_{n+1} .

Пусть

$$\tau_k = \sigma_k^{(-1)^{k+1}}.$$

Тогда любую косу из S'_{n+1} можно записать в виде

$$\tau_{j_{n-s}} \tau_{j_{n-s-1}} \cdots \tau_{j_1} \tau_{i_1} \tau_{i_2} \cdots \tau_{i_s},$$

где $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_s$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-s}$ — числа от 1 до n . При этом различными последовательностями чисел i_k, j_k соответствуют различные косы из S'_{n+1} , потому что перестановки их нитей различны, что доказывается прямой проверкой. Каждой косе $\tau_{j_{n-s}} \tau_{j_{n-s-1}} \cdots \tau_{j_1} \tau_{i_1} \tau_{i_2} \cdots \tau_{i_s}$ из S'_{n+1} сопоставим набор чисел $n_1, m_1, n_2, m_2, \dots, n_r, m_r$ такой, что

$$\begin{aligned} j_1 &= 1 + n_1, \\ i_2 &= 1 + n_1 + m_1, \\ j_2 &= 1 + n_1 + m_1 + n_2, \\ i_3 &= 1 + n_1 + m_1 + n_2 + m_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Для простоты мы докажем жесткость кос из S'_{n+1} только для тех, у которых образующие, которые стоят левее двух своих соседей по номеру, имеют четный номер, а те образующие, которые стоят правее двух своих соседей по номеру, имеют нечетный номер. В обозначениях предыдущего абзаца все n_i четны, и все m_i нечетны, кроме последнего. В случае нечетного числа нитей дополнительно потребуем, чтобы $m_r \neq 0$. Обозначим это множество кос через S_{n+1} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Количество кос в S_{n+1} не меньше $2^{[(n-1)/2]}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение для нечетного n . Количество кос в S_{n+1} равно числу способов представить число $n - 1$ в виде суммы чисел $n_1, n_2, \dots, n_r, m_1, m_2, \dots, m_r$, где n_i четны, а m_i нечетны, кроме последнего, про которое ничего неизвестно. Сначала будем предполагать, что m_r нечетно. Количество таких способов равно сумме по r количеству способов представить числа $n - 1 + r$

Рис. 1. На рисунке произведение двух кос a_β и β слева равняется косе b_β справа, причем $\beta = \Delta^{-1}(\Delta a_\beta^{-1})b_\beta - A$ -нормальная форма

в виде суммы $2r$ четных слагаемых, что равно сумме по r количеств способов представить число $(n - 1 + r)/2$ в виде суммы $2r$ слагаемых, что равно

$$\sum_{r=1}^n C_{(n-1+r)/2+2r-1}^{2r-1} \geq \sum_{r=1}^n C_{(n-1)/2}^{2r-1} = 2^{(n-1)/2-1}.$$

Еще столько же способов получаем при четном m_r .

Теперь приведем каждую косу из S_{n+1} к A -нормальной форме.
Предположим, что количество нитей четно, и рассмотрим косу β из S_{n+1} , у которой $r = 1$, т.е.

$$\beta = \sigma_n \sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_{n_1+2}^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{n_1+1}.$$

Эта коса изображена в середине рис. 1. Заметим, что первая нить пересекается отрицательно с нитями с номерами $3, 5, 7, \dots, n_1 + 1$. Домножим данную косу слева на косу-перестановку a_β , которая реализует перестановку нитей

$$(3 \ 5 \ 7 \ \dots \ n_1 + 1 \ 1 \ 2 \ 4 \ \dots \ n_1 \ n_1 + 3 \ n_1 + 5 \ \dots \ n_1 + m_1 + 1 \ n_1 + m_1 + 2 \ n_1 + 2 \ n_1 + 4 \ \dots \ n_1 + m_1).$$

В полученном произведении первые $n_1/2$ нитей пересекают остальные нити сверху, а значит, мы можем пробросить эти нити наверх, устранив отрицательные перекрестки первых $n_1 + 1$ нитей и не создавая пары нитей, пересекающихся дважды (на рис. 1 правая коса является произведением кос слева). Аналогично пробросим вниз нити с номерами от $n_1 + 2 + m_1/2$ до n . Значит, полученное произведение является косой-перестановкой с перестановкой нитей

$$(2 \ 4 \ \dots \ n_1 \ n_1 + 2 \ 1 \ 3 \ 5 \ \dots \ n_1 + 1 \ n_1 + 4 \ n_1 + 6 \ \dots \ n_1 + m_1 + 2 \ n_1 + 1 \ n_1 + 3 \ n_1 + 5 \ \dots \ n_1 + m_1 + 1).$$

Теперь рассмотрим случай произвольного n и произвольную косу β из S_{n+1} . Домножим ее слева на произведение образующих, которые в косе β стоят левее своих соседей по номеру. Их номера: $1 + n_1 + m_1$, $1 + n_1 + m_1 + n_2 + m_2$ и т.д. По определению S_{n+1} эти образующие входят в косу β в отрицательной степени,

значит, они сократятся. Также, если количество нитей нечетно, то домножим косу слева на σ_n . Она также сократится, так как $m_r \neq 0$. Обозначим произведение образующих, на которые мы домножили, через c . Полученное произведение c и данной косы β является произведением коммутирующих кос β_k , у каждой из которых все нити неподвижны, кроме нитей с номерами от $1 + n_1 + m_1 + \dots + n_k + m_k$ до $n_1 + m_1 + \dots + n_{k+1} + m_{k+1}$ включительно. Если из косы β_k удалить все неподвижные нити, то получится коса γ_k , удовлетворяющая предположениям предыдущего абзаца, поэтому определены косы a_{γ_k} . Обозначим через d_k косу, полученную из косы a_{γ_k} добавлением нитей, удаленных из косы β_k . Тогда домножим косу $c\beta$ на произведение коммутирующих кос-перестановок d_k и получим косу перестановку b . Произведение c и кос d_k является косой-перестановкой a . Имеем

$$\beta = a^{-1}b = \Delta^{-1}a^*b, \quad \text{где} \quad a^* = \Delta a^{-1}.$$

В косе b i -я и $(i + 1)$ -я нити пересекаются для

$$\begin{aligned} i &= \frac{n_1}{2} + 1, \\ n_1 + \frac{m_1}{2} + 2, \\ n_1 + m_1 + 3 + \frac{n_2}{2}, \\ n_1 + m_1 + 4 + n_2 + \frac{m_2}{2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ n_1 + m_1 + \dots + n_{r-1} + m_{r-1} + 3 + \frac{n_r}{2}, \\ n_1 + m_1 + \dots + n_{r-1} + m_{r-1} + 4 + n_r + \frac{m_r}{2}. \end{aligned}$$

Но в косе a такие пары нитей не пересекаются, поэтому такие пары нитей пересекаются в косе a^* . Значит, $\Delta^{-1}a^*b$ — A -нормальная форма.

Покажем, что коса β является жесткой. В косе a нити, оканчивающиеся в позициях i и $i + 1$ для четных i , пересекаются, а для нечетных i не пересекаются. Заметим, что $a(\Delta^{-1}a^*\Delta) = \Delta$. Значит, i -я и $(i + 1)$ -я нити пересекаются в косе $\Delta^{-1}a^*\Delta$ для нечетных i . В косе b нити, заканчивающиеся в позициях i и $i + 1$, пересекаются для нечетных i и не пересекаются для четных i . Поэтому $\Delta^{-1}b(\Delta^{-1}a^*\Delta)$ — A -нормальная форма. Значит, коса β является жесткой и поэтому лежит в $U_A(\alpha_{n+1})$. Перейдем к теореме 3. Напомним ее формулировку.

ТЕОРЕМА 3. *Ультраверхушка в образующих Бирман–Ко–Ли класса сопряженности косы*

$$\alpha_n = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_4^{-1}\dots\sigma_{n-1}^{(-1)^n}$$

состоит как минимум из $2^{(n-1)/2}$ жестких кос при нечетном n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Коса*

$$\beta = \delta^{-1} \left((n-1 \ 1)(n-2 \ 2) \dots \left(\frac{n+1}{2} \ \frac{n-1}{2} \right) \right)^2$$

сопряжена косе α_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коса

$$\delta^{-1}\beta\delta = \delta^{-1}\left((n\ 2)(n-1\ 3)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\frac{n+1}{2}\right)\right)^2$$

сопряжена кose β , поэтому достаточно доказать для нее сопряженность кose α_n .

Так как

$$(n\ 2)(n\ n-1\ n-2\ \dots\ 2) = (n\ n-1\ n-2\ \dots\ 2)(3\ 2),$$

то

$$\begin{aligned} & ((n\ n-1\ \dots\ 2)(n\ n-1\ \dots\ 4)\cdots(n\ n-1))^{-1}(\delta^{-1}\beta\delta) \\ & \quad \times ((n\ n-1\ \dots\ 2)(n\ n-1\ \dots\ 4)\cdots(n\ n-1)) \\ & = ((n\ n-1\ \dots\ 2)(n\ n-1\ \dots\ 4)\cdots(n\ n-1))^{-1}\delta^{-1} \\ & \quad \times \left((n\ 2)(n-1\ 3)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\frac{n+1}{2}\right)\right)^2 \\ & \quad \times ((n\ n-1\ \dots\ 2)(n\ n-1\ \dots\ 4)\cdots(n\ n-1)) \\ & = ((n\ n-1\ \dots\ 2)(n\ n-1\ \dots\ 4)\cdots(n\ n-1))^{-1}\delta^{-1} \\ & \quad \times ((n\ n-1\ \dots\ 2)(n\ n-1\ \dots\ 4)\cdots(n\ n-1)) \\ & \quad \times ((n\ n-1)(n-2\ n-3)\cdots(3\ 2))^2 \\ & = \delta^{-1}((n-1\ n-2)^{-1}(n-1\ n-2\ n-3\ n-4)^{-1}\cdots(n-1\ n-2\ \dots\ 1)^{-1}) \\ & \quad \times ((n\ n-1\ \dots\ 2)(n\ n-1\ \dots\ 4)\cdots(n\ n-1)) \\ & \quad \times ((n\ n-1)(n-2\ n-3)\cdots(3\ 2))^2. \end{aligned}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} & (n-1\ n-2\ \dots\ 1)^{-1}(n\ n-1\ \dots\ 2) \\ & = ((2\ 1)^{-1}(n-1\ n-2\ \dots\ 2)^{-1})((n-1\ n-2\ \dots\ 2)(n\ 2)) \\ & = (1\ 2)(n\ 2), \end{aligned}$$

и

$$(n\ 2)(n\ n-1\ \dots\ 4) = (n\ n-1\ \dots\ 4)(4\ 2).$$

Исходя из этого, продолжим равенство

$$\begin{aligned} & \delta^{-1}((n-1\ n-2)^{-1}(n-1\ n-2\ n-3\ n-4)^{-1}\cdots(n-1\ n-2\ \dots\ 1)^{-1}) \\ & \quad \times ((n\ n-1\ \dots\ 2)(n\ n-1\ \dots\ 4)\cdots(n\ n-1)) \\ & \quad \times ((n\ n-1)(n-2\ n-3)\cdots(3\ 2))^2 \\ & = \delta^{-1}((n-2\ n-1)(n-3\ n-2)\cdots(1\ 2)) \\ & \quad \times ((n\ n-1)(n-1\ n-3)(n-3\ n-5)\cdots(4\ 2)) \\ & \quad \times ((n\ n-1)(n-2\ n-3)\cdots(3\ 2))^2 \\ & = ((2\ 3)(4\ 5)\cdots(n-1\ n))\delta^{-1} \\ & \quad \times (n\ n-1\ n-3\ n-5\ \dots\ 2)((n\ n-1)(n-2\ n-3)\cdots(3\ 2))^2. \end{aligned}$$

Сопрягая полученную косу косой $(n \ n-1)(n-2 \ n-3) \cdots (3 \ 2)$, получаем, что коса β сопряжена к себе

$$\begin{aligned} & (\delta^{-1}(n \ n-1 \ n-3 \ n-5 \ \dots \ 2))((n \ n-1)(n-2 \ n-3) \cdots (3 \ 2)) \\ &= (((1 \ 2)(2 \ 3) \cdots (n-1 \ n))((n \ n-1)(n-1 \ n-3)(n-3 \ n-5) \cdots (4 \ 2))) \\ &\quad \times ((n \ n-1)(n-2 \ n-3) \cdots (3 \ 2)) \\ &= ((n-2 \ n-1)(n-4 \ n-3) \cdots (1 \ 2))((n \ n-1)(n-2 \ n-3) \cdots (3 \ 2)). \end{aligned}$$

В стандартных образующих полученная коса может быть записана в виде

$$\sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-4}^{-1} \cdots \sigma_1^{-1} \sigma_{n-1} \sigma_{n-3} \cdots \sigma_2,$$

а коса $\Delta \alpha_n \Delta^{-1}$ записывается в виде $\sigma_{n-1} \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-3} \sigma_{n-4}^{-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1^{-1}$. Значит, эти две косы сопряжены согласно предложению 1. Поэтому косы β и α_n сопряжены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. В множестве кос

$$(n-1 \ 1), \quad (n-2 \ 2), \quad \dots, \quad \left(\frac{n+1}{2} \ \frac{n-1}{2} \right)$$

выберем произвольное подмножество S . Обозначим через s произведение кос в множестве S . Тогда коса

$$(\delta^{-1} s \delta)^{-1} \beta (\delta^{-1} s \delta)$$

лежит в $U_{BKL}(\alpha_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t – произведение кос, не лежащих в множестве S . Заметим, что

$$(\delta^{-1} s \delta)^{-1} \beta (\delta^{-1} s \delta) = \delta^{-1} (ts) (t \delta^{-1} s \delta).$$

Шаг 1. Докажем, что $t \delta^{-1} s \delta$ – делитель элемента Гарсайда.

Для $i = 1, 2, \dots, (n-1)/2$ положим

$$a_i = \begin{cases} (n-i \ i), & \text{если } (n-i \ i) \notin S, \\ (n-i+1 \ i+1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\delta^{-1} s \delta$ равно произведению тех a_i , для которых $(n-i \ i)$ лежит в S .

Коса $(t \delta^{-1} s \delta)$ равна произведению коммутирующих кос $a_i \cdot a_{i+1} \cdots a_j$, где образующие a_k и a_{k+1} принадлежат одному множителю, если $(n-i \ i)$ и $(n-i-1 \ i+1)$ принадлежат разным множествам (S или T).

Подсчитаем каждый множитель. Заметим, что

$$(r_1 \ r_2 \ \dots \ r_p)(r_q \ r) = (r_1 \ r_2 \ \dots \ r_q \ r \ r_{q+1} \ \dots \ r_p)$$

при $r_q < r < r_{q+1}$ и $(r \ r_q)(r_1 \ r_2 \ \dots \ r_p) = (r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{q-1} \ r \ r_q \ \dots \ r_p)$ при $r_{q-1} < r < r_q$. Пусть искомым множителем равен $a_i \cdot a_{i+1} \cdots a_j$. Тогда, если $(n-i \ i)$ не лежит в S и $(n-j \ j)$ не лежит в S , то этот множитель равен

$$(n-i \ n-i-2 \ \dots \ n-j \ j \ j+2 \ \dots \ i),$$

если $(n - i \ i) \in S$ и $(n - j \ j) \notin S$, то он равен

$$(n - i + 1 \ n - i - 1 \ \dots \ n - j \ j \ j + 2 \ \dots \ i + 1).$$

Остальные два случая разбираются аналогично, и мы получаем, что искомым множителем является убывающим циклом, и тогда $t\delta^{-1}s\delta$ является произведением попарно коммутирующих убывающих циклов. А значит, по определению $t\delta^{-1}s\delta$ – делитель элемента Гарсайда.

Шаг 2. Докажем, что $\delta^{-1} \cdot (ts) \cdot (t\delta^{-1}s\delta)$ – *BKL*-нормальная форма.

Делитель элемента Гарсайда c делится на образующую $(i \ j)$ в полугруппе, порожденной образующими, если $(j \ i) \cdot c$ – снова делитель элемента Гарсайда, что эквивалентно тому, что $c \cdot (j \ i)$ – делитель элемента Гарсайда. Согласно следствию 3.7 из [7] делитель элемента Гарсайда делится на образующую $(i \ j)$, если и только если числа i и j принадлежат одному из убывающих циклов в его разложении. По следствию 3.7 из [7], если делитель элемента Гарсайда a делится на все образующие, на которые делится делитель элемента Гарсайда b , то $a = bc$, где c – произведение образующих в положительной степени. Поэтому для любого делителя элемента Гарсайда b выполнено $\delta = bc$. По теореме 3.4 из [7] c – делитель элемента Гарсайда. Аналогично δb^{-1} – делитель элемента Гарсайда.

Пусть a, b – делители элемента Гарсайда и $ab = \delta$. Пусть $i > j$. Если $a \cdot (i \ j)$ – делитель элемента Гарсайда, то $(j \ i)b = (a \cdot (i \ j))^{-1}\delta$. Значит, b делится на образующую $(i \ j)$. Напомним, что

$$ts = \left((n - 1 \ 1)(n - 2 \ 2) \cdots \left(\frac{n + 1}{2} \frac{n - 1}{2} \right) \right).$$

Заметим, что

$$\left((n - 1 \ 1)(n - 2 \ 2) \cdots \left(\frac{n + 1}{2} \frac{n - 1}{2} \right) \right) \cdot \left((n \ 1)(n - 1 \ 2) \cdots \left(\frac{n + 3}{2} \frac{n - 1}{2} \right) \right) = \delta.$$

Далее, $\delta^{-1} \cdot (ts) \cdot (t\delta^{-1}s\delta)$ – левая нормальная форма, если для любой образующей $(i \ j)$ косы $ts(i \ j)$ и $(i \ j)(t\delta^{-1}s\delta)$ не являются делителями элемента Гарсайда, т.е. $t\delta^{-1}s\delta$ не делится ни на одну из образующих

$$(n \ 1), (n - 1 \ 2), \quad \dots, \quad \left(\frac{n + 3}{2} \frac{n - 1}{2} \right).$$

Предположим противное, пусть числа $n + 1 - k$ и k принадлежат одному из убывающих циклов в разложении $t\delta^{-1}s\delta$, описанном в шаге 1. Любой такой убывающий цикл состоит из двух убывающих арифметических прогрессий с разностью 2, причем в первой прогрессии все числа не меньше $(n + 1)/2$, а во второй – не больше $(n + 1)/2$. Значит, одно из чисел $n + 1 - k$ и k лежит в первой прогрессии, а другое – во второй. Но легко проверить, что полусумма чисел из разных прогрессий – нецелое число, а полусумма выбранных чисел равна $(n + 1)/2$. Противоречие.

Для продолжения доказательства предложения 4 нам потребуется следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Правой BKL-нормальной формой* косы b называется представление косы b в виде произведения $b_1 \cdot b_2 \cdots b_m \cdot \delta^k$, где b_i – делители элемента Гарсайда, не равные ему, причем для любого $i = 1, 2, \dots, m - 1$ и любой образующей

$(j\ k)$, косы $b_i \cdot (j\ k)^{-1}$ и $(j\ k) \cdot b_{i+1}$ не являются одновременно делителями элемента Гарсайда.

Шаг 3. Докажем, что

$$(\delta^{-1}ts\delta) \cdot (\delta^{-1}t\delta^{-1}s\delta^2) \cdot \delta^{-1}$$

является правой *BKL*-нормальной формой.

Утверждение шага равносильно тому, что для любого i коса $r = (n-i\ i) \cdot t\delta^{-1}s\delta -$ не делитель элемента Гарсайда. Пусть $(n-i\ i) \notin S$. Тогда коса r делится слева на $(n-i\ i)^2$, откуда по лемме 3.3 из [7] имеем, что коса r не делит элемент Гарсайда. Пусть $(n-i\ i) \in S$. Так как коса $t\delta^{-1}s\delta$ делится на $(n-i+1\ i+1)$ справа, то по следствию 3.7 из [7], коса $t\delta^{-1}s\delta$ делится на $(n-i+1\ i+1)$ слева. А значит, коса r делится на косу $(n-i\ i)(n-i+1\ i+1)$ слева, откуда по лемме 3.3 из [7] имеем, что коса r – не делитель элемента Гарсайда.

В силу шагов 1–3 доказательство предложения 4 завершает

ЛЕММА. Пусть $\delta^{-1} \cdot a \cdot b$ и $(\delta^{-1}a\delta) \cdot (\delta^{-1}b\delta) \cdot \delta^{-1}$ – соответственно (левая) и правая *BKL*-нормальные формы косы γ . Тогда коса γ жесткая и лежит в $U_{BKL}(\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(\delta^{-1}a\delta) \cdot (\delta^{-1}b\delta) \cdot \delta^{-1}$ является правой *BKL*-нормальной формой, то делители элемента Гарсайда $(\delta^{-1}a\delta)$ и $(\delta^{-1}b\delta)^*$ не имеют общих делителей, где $(\delta^{-1}b\delta)^*(\delta^{-1}b\delta) = \delta$. То есть делители элемента Гарсайда $(\delta^{-1}a\delta)$ и b^* не имеют общих делителей, где $bb^* = \delta$. Применим Cycling. Получим косу $\delta^{-1}b \cdot (\delta^{-1}a\delta)$. Так как $(\delta^{-1}a\delta)$ и b^* не имеют общих делителей, то $\delta^{-1}b \cdot (\delta^{-1}a\delta) -$ *BKL*-нормальная форма. Значит, γ жесткая. А по теореме из [4], указанной в п. 2, жесткая коса лежит в ультраверхушке своего класса сопряженности. Лемма, а вместе с ней и предложение 4 доказаны.

Выбирая множество S , мы получаем $2^{(n-1)/2}$ кос в $U_{BKL}(\alpha_n)$. Они все различны, потому что у них разные левые нормальные формы [7]. Перейдем к теореме 2. Напомним ее формулировку.

ТЕОРЕМА 2. Коса α_n псевдоаносовская при нечетном $n \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая коса является либо периодической, либо приводимой, либо псевдоаносовской [9], [10].

Пусть коса α_n периодическая, т.е. в некоторой степени принадлежит центру. Применение соотношений группы кос не меняет разницы числа положительных и отрицательных образующих в записи косы. Поэтому в любой записи любой степени данной косы одинаковое число положительных и отрицательных образующих. Но центральный элемент – это степень положительной косы $(n\ n-1\ n-2\ \dots\ 1)^n$ (это результат Чоу, 1948), а значит, осталось только рассмотреть случай, когда коса α_n в некоторой степени тождественна, откуда следует, что сама коса α_n тождественна, что очевидно не так.

Пусть коса α_n приводима, т.е. коса α_n получается из некоторой косы γ подстановкой вместо каждой нити некоторой косы. Тогда таковой является коса α_n^n . Пусть, если подставить вместо i -й нити косы γ^n косу γ_i , то получится коса α_n^n , причем хотя бы одна из кос γ_i имеет более одной нити, а коса γ имеет более одной нити.

Докажем, что при $n = 3$ это невозможно. Заметим, что в этом случае коса γ на двух нитях, а косы γ_1 и γ_2 не более, чем на двух нитях. Так как любые две нити косы α_3^3 не зацеплены, то косы γ^3 , γ_1 и γ_2 тривиальны, а значит, и коса α_3 тривиальна. Противоречие.

Для произвольного нечетного n заметим, что если натуральные числа k, l, m таковы, что $1 \leq k < l < m \leq n$, и числа $l - k$ и $m - l$ нечетные, то коса, полученная из косы α_n^n выбрасыванием всех нитей с номерами, отличными от k, l, m , — это коса α_3^3 . Откуда любые три нити с номерами k, l, m либо лежат в одной из кос γ_i , либо все три лежат в разных. Пусть i -я и j -я нити лежат в одной γ_s и $i < j$. Пусть число $j - i$ четно. В тройке $i, i + 1, j$ соседние числа разной четности, поэтому $(i + 1)$ -я нить тоже лежит в γ_s . Рассматривая тройки

$$(i, i + 1, i + 2), \quad (i + 1, i + 2, i + 3), \quad \dots, \quad (n - 2, n - 1, n)$$

и тройки

$$(i - 1, i, i + 1), \quad (i - 2, i - 1, i), \quad \dots, \quad (1, 2, 3)$$

получаем, что все нити лежат в γ_s , что противоречит тому, что в γ больше одной нити. Пусть число $j - i$ нечетно. Если $i > 1$, то рассмотрим тройку $i - 1, i, j$. Если $j < n$, то рассмотрим тройку $i, j, j + 1$. Далее действуем аналогично предыдущему. Итак, теорема 3 доказана.

Автор благодарен И. А. Дынникову за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. S. Birman, V. Gebhardt, J. González-Meneses, “Conjugacy in Garside groups I: cyclings, powers and rigidity”, *Groups Geom. Dyn.*, **1**:3 (2007), 221–279.
- [2] F. A. Garside, “The braid group and other groups”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **20**:1 (1969), 235–254.
- [3] D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. F. Levy, M. S. Paterson, W. P. Thurston, *Word Processing in Groups*, Jones and Barlett Publ., Boston, MA, 1992.
- [4] E. A. Elrifai, H. R. Morton, “Algorithms for positive braids”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **45**:4 (1994), 479–497.
- [5] N. Franco, J. González-Meneses, “Conjugacy problem for braid groups and Garside groups”, *J. Algebra*, **266**:1 (2003), 112–132.
- [6] V. Gebhardt, “A new approach to the conjugacy problem in Garside groups”, *J. Algebra*, **292**:1 (2005), 282–302.
- [7] J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee, “A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups”, *Adv. Math.*, **139**:2 (1998), 322–353.
- [8] J. S. Birman, V. Gebhardt, J. González-Meneses, “Conjugacy in Garside groups III: periodic braids”, *J. Algebra*, **316**:2 (2007), 746–776.
- [9] W. P. Thurston, “On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **19**:2 (1988), 417–431.
- [10] M. Bestvina, M. Handel, “Train-tracks for surface homeomorphisms”, *Topology*, **34**:1 (1995), 109–140.

М. Прасолов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

14.03.2009