Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Кузнецова, Об одном кратном тригонометрическом ряде, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 950–952

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:15:31

Об одном кратном тригонометрическом ряде

О. И. Кузнецова

Пусть $\mathbb{R}^m$ – m -мерное вещественное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $xy = x_1y_1 + \dots + x_my_m$ – скалярное произведение векторов x и y ,

$$\mathbb{T}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : -\pi \leq x_i < \pi, i = 1, \dots, m\}$$

– m -мерный тор, $\mathbb{Z}_+^m$ – множество векторов l из $\mathbb{R}^m$ с целыми неотрицательными координатами, $|l|_1 = l_1 + \dots + l_m$.

В [1] рассматривается ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{|l|_1=k} e^{ilx}, \quad x \in \mathbb{T}^m. \quad (1)$$

Предполагается, что последовательность коэффициентов $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ ряда (1) удовлетворяет условиям Боаса–Теляковского [2]:

$$a_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2)$$

$$T(a) = \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta a_{k-1} - \Delta a_{k+1}) \right| < \infty, \quad (3)$$

где $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$. Утверждается [1; теорема], что при выполнении условий (2), (3) ряд (1) сходится почти всюду к некоторой функции $f \in L(\mathbb{T}^m)$ и является ее рядом Фурье тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty. \quad (4)$$

Данная теорема при $m = 2, 3, \dots$ не верна. Покажем это.

Если функция $f \in L(\mathbb{T}^m)$ имеет ряд Фурье степенного типа ($\widehat{f}(l) = 0$ при $l \notin \mathbb{Z}_+^m$), то для нее справедлив m -мерный аналог неравенства Харди–Литтлвуда [3; раздел 4.3]. Для суммы ряда (1) это неравенство имело бы вид ($\|\cdot\|_{L(\mathbb{T}^m)} = \|\cdot\|$)

$$\|f\| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k+1} \|F_k\|.$$

Множество точек

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m x_i = k \right\}$$

выпукло в $\mathbb{R}^{m-1}$ и содержит $(m-1)$ -мерный шар радиуса ck , где $c = c(m)$ – некоторая положительная константа. По теореме Юдина [4]

$$\|F_k\| \geq c_1(m) \log^{m-1}(k+2).$$

Получаем оценку снизу $\|f\|$:

$$\|f\| \geq c_2(m) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k+1} \log^{m-1}(k+2). \quad (5)$$

Пусть

$$a_k = \frac{1}{\log^{1+\varepsilon}(k+2)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Данная выпуклая последовательность удовлетворяет условиям (2)–(4), но ряд (5) для нее расходится при $m \geq 2$.

Заметим, что ошибочным в доказательстве теоремы является утверждение, что

$$\int_{\mathbb{T}^m} \left| \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(n)} F_k(x) \right| dx \leq c < \infty,$$

где

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 0, \dots, n \\ \frac{2n-k+1}{n+1}, & k = n+1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Из неравенства (5) при $a_k = \lambda_k^{(n)}$ следует, что данный интеграл не меньше, чем

$$M \sum_{k=0}^n \frac{\log^{m-1}(k+2)}{k+1} \geq M_1 \log^m n,$$

где $M, M_1 > 0$.

Приведем простое достаточное условие интегрируемости ряда (1). Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k F_k(x)$$

– частичная сумма ряда (1).

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условию (2) и

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| \log^m(k+2) < \infty, \quad (6)$$

то ряд (1) сходится почти всюду к некоторой функции $f \in L(\mathbb{T}^m)$, является ее рядом Фурье, а соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^m} |f(x) - S_n(x)| dx = 0 \quad (7)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$a_n = o\left(\frac{1}{\log^m n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $D_n(x) = \sum_{|l|_1 \leq n} e^{ilx}$. Применим к частичной сумме S_n преобразование Абеля

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k D_k(x) + a_n D_n(x). \quad (9)$$

Из условия (6) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty.$$

Поскольку $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а последовательность D_n ограничена почти всюду на $\mathbb{T}^m$ (см., например, [5; лемма 2]), в равенстве (9) при почти всех x можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Пусть

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta a_k D_k(x). \quad (10)$$

Интегрируемость функции f следует из верхней оценки в двустороннем неравенстве

$$\int_{\mathbb{T}^m} |D_n(x)| dx \asymp \log^m n \quad (11)$$

([6], см. также [7], – оценка сверху, [4] – нижняя оценка) и условия (6). Доказательство того факта, что ряд (1) есть ряд Фурье, стандартно (см., например, [5]). Необходимость и достаточность условия (8) для сходимости данного ряда в $L(\mathbb{T}^m)$ (соотношение (7)) вытекает из равенств (9) и (10), условия (6) и двусторонней оценки (11).

В заключение отметим, что если $\{a_k\}$ – монотонная последовательность, то достаточное условие (6) и необходимое условие (5) интегрируемости ряда (1) совпадают.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] П. В. Задерей, Е. Н. Пелагено, *Матем. заметки*, **84**:4 (2008), 627–631. [2] С. А. Теляковский, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:6 (1964), 1209–1236. [3] У. Рудин, *Теория функций в поликруге*, Мир, М., 1974. [4] В. А. Юдин, *Матем. заметки*, **25**:1 (1979), 119–122. [5] О. И. Кузнецова, *Матем. заметки*, **63**:3 (1998), 402–406. [6] Э. С. Белинский, “Поведение констант Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье”, *Метрические вопросы теории функций и отображений*, Наукова думка, Киев, 1977, 19–39. [7] А. Н. Подкорытов, *Вестн. ЛГУ. Матема., мех., астрон.*, 1982, № 7, 110–111.

О. И. Кузнецова

Институт прикладной математики

и механики НАН Украины,

г. Донецк

E-mail: kuznets@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило

16.05.2009