Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Дьяченко, Скорость поточечного приближения функций чезаровскими (C, β) -средними их рядов Фурье, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 2, 217–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:14:07

Скорость поточечного приближения функций чезаровскими (C, β) -средними их рядов Фурье

А. М. Дьяченко

Рассматривается вопрос о взаимосвязи гладкости функции в фиксированной точке с поведением в этой точке чезаровских (C, β) -средних ряда Фурье этой функции.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Поведение в точке частичных сумм и средних Чезаро тригонометрических рядов Фурье исследовалось во многих работах (см., например, [1]–[6]). В данной статье рассматривается вопрос о взаимосвязи гладкости функции в фиксированной точке с поведением в этой точке чезаровских (C, β) -средних ряда Фурье этой функции.

Пусть m – натуральное число, 2π -периодическая по каждой переменной измеримая функция $f(\mathbf{x})$ ограничена на $[-\pi, \pi]^m$,

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m} c_{\mathbf{k}}(f) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

– ее ряд Фурье, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ и $\mathbf{k}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^m k_j x_j$. Пусть число $\beta \in (0, 1)$. Тогда чезаровскими (C, β) -средними ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ называются выражения

$$\sigma_{\mathbf{n}}^{\beta}(\mathbf{x}; f) = \left(\prod_{j=1}^m A_{n_j}^{\beta} \right)^{-1} \sum_{l_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{l_m=0}^{n_m} \prod_{j=1}^m A_{n_j-l_j}^{\beta-1} S_{l_1, \dots, l_m}(\mathbf{x}; f),$$

где $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, \dots, m$, $S_{l_1, \dots, l_m}(\mathbf{x}; f)$ – соответствующая прямоугольная частичная сумма ряда Фурье функции f ($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел), $A_n^{\beta} = \prod_{\iota=1}^n (\beta + \iota)/n!$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\psi(t)$ – неубывающая на $[0, \infty)$ неотрицательная функция такая, что $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$ и $\psi(t_1 + t_2) \leq \psi(t_1) + \psi(t_2)$ при любых $t_1 \geq 0$ и $t_2 \geq 0$. Тогда будем писать $\psi(t) \in \Psi$.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – положительное число, m – натуральное число, функция $\psi(t) \in \Psi$. Пусть определенная на $\mathbb{R}^m$ 2π -периодическая по каждому переменному измеримая функция $f(\mathbf{x})$ в некоторой точке $\mathbf{x}_0$ удовлетворяет при всех

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00302а).

$\mathbf{t} \in [-\pi, \pi]^m$ условию

$$|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{t}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \psi(|\mathbf{t}|), \quad \text{где } |\mathbf{t}| = \left(\sum_{j=1}^m t_j^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда, если $\beta \in (0, 1)$, $\sigma_{\mathbf{n}}^{\beta}(\mathbf{x}; f)$ – чезаровские (C, β) -средние ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ с ограниченным отношением индексов, т.е. такие, что $n_i/n_j \leq R$ при $1 \leq i, j \leq m$, то

$$|f(\mathbf{x}_0) - \sigma_{\mathbf{n}}^{\beta}(\mathbf{x}_0; f)| \leq C(R, m, \beta) n_1^{-\beta} \int_{\pi/n_1}^{2\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt,$$

где постоянная $C(R, m, \beta)$ зависит только от R , m и β .

Здесь и далее через $C(\cdot)$ будут обозначаться положительные постоянные, зависящие лишь от параметров, перечисленных в скобках. Эти постоянные не обязаны быть одинаковыми в различных утверждениях, кроме случаев, когда это будет специально оговорено.

Как будет показано ниже, в общем случае теорему 1 усилить нельзя. Однако в одномерной ситуации справедлив такой результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\psi(t) \in \Psi$ такова, что

$$\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt < \infty.$$

Пусть определенная на $\mathbb{R}$ 2π -периодическая измеримая функция одной переменной $f(x)$ в некоторой точке x_0 удовлетворяет при всех $t \in [-\pi, \pi]$ условию

$$|f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq \psi(|t|).$$

Тогда, если $\beta \in (0, 1)$ и $\sigma_n^{\beta}(x; f)$ – чезаровские (C, β) -средние ряда Фурье функции $f(x)$, то

$$|f(x_0) - \sigma_n^{\beta}(x_0; f)| = o(n^{-\beta})$$

при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1 будет установлена в п. 2, а теорема 2 – в п. 4. В пп. 3 и 4 будет изучен вопрос об окончательности этих теорем. Оказывается, что ответ на него зависит от свойств функции $\psi(t)$ и размерности m . Справедливы такие результаты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\beta \in (0, 1)$, m – натуральное число, а функция $\psi(t) \in \Psi$ такова, что

$$\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt = \infty.$$

Тогда существуют определенная на $\mathbb{R}^m$ 2π -периодическая по каждому переменному измеримая функция $g(\mathbf{x})$, удовлетворяющая в некоторой точке $\mathbf{x}_0$ при всех $\mathbf{t} \in [-\pi, \pi]^m$ условию

$$|g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{t}) - g(\mathbf{x}_0)| \leq \psi(|\mathbf{t}|),$$

возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^{\infty}$ и постоянная $C = C(\psi, \beta, m)$ такие, что при всех r имеем

$$|g(\mathbf{x}_0) - \sigma_{n_r, \dots, n_r}^{\beta}(\mathbf{x}_0; g)| \geq C n_r^{-\beta} \int_{\pi/n_r}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt,$$

где $n_r, \dots, n_r = (n_r, \dots, n_r) = \mathbf{n}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\beta \in (0, 1)$, натуральное число $m \geq 2$, а не равная тождественно нулю функция $\psi(t) \in \Psi$ такова, что

$$\int_0^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt < \infty.$$

Тогда существуют определенная на $\mathbb{R}^m$ 2π -периодическая по каждому переменному измеримая функция $g(\mathbf{x})$, удовлетворяющая в некоторой точке $\mathbf{x}_0$ при всех $\mathbf{t} \in [-\pi, \pi]^m$ условию

$$|g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{t}) - g(\mathbf{x}_0)| \leq \psi(|\mathbf{t}|),$$

возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^\infty$ и постоянная $C = C(\psi, \beta, m)$ такие, что при всех r имеем

$$|g(\mathbf{x}_0) - \sigma_{n_r, \dots, n_r}^\beta(\mathbf{x}_0; g)| \geq C n_r^{-\beta}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\beta \in (0, 1)$, $m = 1$, не равная тождественно нулю функция $\psi(t) \in \Psi$ такова, что

$$\int_0^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt < \infty,$$

а неотрицательная последовательность чисел $b_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда существуют определенная на $\mathbb{R}$, измеримая 2π -периодическая функция $g(x)$, удовлетворяющая при всех $t \in [-\pi, \pi]$ условию

$$|g(t) - g(0)| \leq \psi(|t|),$$

и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^\infty$, для которых при всех r справедлива оценка

$$|g(0) - \sigma_{n_k}^\beta(0; g)| \geq b_{n_r} n_r^{-\beta}.$$

Отметим, что теоремы 1, 3 и 4 являются обобщениями результатов работы [7].

2. Доказательство теоремы 1. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА А (см. [1; с. 157–159]). Пусть число $\beta \in (0, 1)$, n – натуральное число и $K_n^\beta(t)$ – одномерное ядро метода (C, β) , т.е.

$$K_n^\beta(t) = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{l=0}^n A_{n-l}^{\beta-1} D_l(t),$$

где $D_l(t)$ – соответствующее ядро Дирихле. Тогда при $t \in (0, \pi)$ справедлива формула

$$K_n^\beta(t) = \frac{1}{A_n^\beta} \frac{\sin((n + (\beta + 1)/2)t - \pi\beta/2)}{(2 \sin t/2)^{\beta+1}} + \frac{2\theta(t)\beta}{n(2 \sin t/2)^2},$$

где $|\theta(t)| \leq 1$ при всех $t \in (0, \pi]$. Кроме того, при $t \in (0, \pi)$ справедлива оценка

$$|K_n^\beta(t)| \leq F(\beta) \min(n^{-\beta} t^{-(1+\beta)}, n),$$

где постоянная $F(\beta)$ зависит лишь от β .

Перейдем к доказательству теоремы 1. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ и $f(\mathbf{0}) = 0$. Обозначим при $1 \leq j \leq m$ через $T_j(0) = [-\pi, 0]$ и $T_j(1) = [0, \pi]$. Если $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ – m -мерный вектор, все координаты которого равны 0 или 1, то положим

$$T_p = \prod_{j=1}^m T_j(p_j).$$

Пусть, также, S – это множество всех m -мерных векторов с координатами, равными 0 или 1.

Имеем

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}_0) - \sigma_{\mathbf{n}}^{\beta}(\mathbf{x}_0; f)| &= |\sigma_{\mathbf{n}}^{\beta}(\mathbf{0}; f)| = \frac{1}{\pi^m} \left| \int_{[-\pi, \pi]^m} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m K_{n_j}^{\beta}(t_j) dt_1 \dots dt_m \right| \\ &\leq \sum_{p \in S} \frac{1}{\pi^m} \left| \int_{T_p} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m K_{n_j}^{\beta}(t_j) dt_1 \dots dt_m \right| \equiv \sum_{p \in S} \frac{1}{\pi^m} I_p. \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку из-за четности одномерных ядер $K_n^{\beta}(t)$ все величины I_p оцениваются одинаково, оценим $I_{1, \dots, 1}$. Для любых векторов с натуральными координатами $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ и $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$ таких, что $1 \leq k_j \leq n_j$ при $1 \leq j \leq m$, положим

$$Q_{\mathbf{n}, \mathbf{k}} = \prod_{j=1}^m \left[\frac{\pi(k_j - 1)}{n_j}, \frac{\pi k_j}{n_j} \right].$$

Отметим, что при $t_j \in [\pi(k_j - 1)/n_j, \pi k_j/n_j]$ имеем (см. лемму A)

$$|K_{n_j}^{\beta}(t_j)| \leq C(\beta) k_j^{-1-\beta} n_j.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_{1, \dots, 1} &\leq \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} \int_{Q_{\mathbf{n}, \mathbf{k}}} |f(\mathbf{t})| \prod_{j=1}^m K_{n_j}^{\beta}(t_j) dt_1 \dots dt_m \\ &\leq C(\beta, m) \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} \psi \left(\left| \left(\frac{\pi k_1}{n_1}, \dots, \frac{\pi k_m}{n_m} \right) \right| \right) \prod_{j=1}^m k_j^{-1-\beta} \\ &\equiv C(\beta, m) \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} J_{\mathbf{n}, \mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если $1 \leq j \leq m$, то положим

$$M_j = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) : k_j \in \mathbb{N} \cap [1, n_j], 1 \leq j \leq m, k_j \geq \max_{i \neq j} k_i \right\}.$$

Теперь

$$\sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} J_{\mathbf{n}, \mathbf{k}} \leq \sum_{j=1}^m \sum_{\mathbf{k} \in M_j} J_{\mathbf{n}, \mathbf{k}} \equiv \sum_{j=1}^m S_j. \quad (3)$$

Все S_j оцениваются одинаково, поэтому достаточно оценить S_1 . Имеем

$$\begin{aligned} S_1 &\leq C(m) \sum_{k_1=1}^{n_1} \psi\left(\frac{\pi k_1}{n_1}\right) k_1^{-1-\beta} \sum_{k_2=1}^{k_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{k_1} \prod_{q=2}^m k_q^{-1-\beta} \leq C(m, \beta) \sum_{k_1=1}^{n_1} \psi\left(\frac{\pi k_1}{n_1}\right) k_1^{-1-\beta} \\ &\leq C_1(m, \beta) n_1^{-\beta} \sum_{k_1=1}^{n_1} \int_{\pi k_1/n_1}^{\pi(k_1+1)/n_1} \frac{\psi(t)}{t^{1+\beta}} dt \leq C_1(m, \beta) n_1^{-\beta} \int_{\pi/n_1}^{2\pi} \frac{\psi(t)}{t^{1+\beta}} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая оценки (1)–(4) и ограниченность отношения индексов (C, β) -средних, получаем

$$|f(\mathbf{x}_0) - \sigma_{\mathbf{n}}^{\beta}(\mathbf{x}; f)| \leq C(m, \beta) \sum_{j=1}^m n_j^{-\beta} \int_{\pi/n_j}^{2\pi} \frac{\psi(t)}{t^{1+\beta}} dt \leq C(m, \beta, R) n_1^{-\beta} \int_{\pi/n_1}^{2\pi} \frac{\psi(t)}{t^{1+\beta}} dt,$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство теорем 3 и 4. Для установления теоремы 3 понадобятся вспомогательные результаты.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть число $\beta \in (0, 1)$, положительная функция $h(t)$ монотонно неубывает на $[0, \pi]$, числа a, b и c таковы, что $0 < a < c < b \leq \pi$, причем для некоторого числа $k \geq 1$ справедливы неравенства

$$\frac{c-a}{b-c} \leq k \quad \text{и} \quad \frac{c}{a} \leq k.$$

Тогда существует такая положительная постоянная $C = C(\beta, k)$, что

$$C \int_c^b \frac{h(t) dt}{t^{1+\beta}} \geq \int_a^b \frac{h(t) dt}{t^{1+\beta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$I = \int_c^b \frac{h(t) dt}{t^{1+\beta}}, \quad I_0 = \int_a^c \frac{h(t) dt}{t^{1+\beta}}.$$

Рассмотрим два случая. Пусть $b \leq 2c$. Тогда

$$I \geq h(c)(b-c) \frac{1}{b^{\beta+1}}, \quad I_0 \leq h(c)(c-a) \frac{1}{a^{\beta+1}}.$$

Отсюда в этом случае

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{h(t) dt}{t^{1+\beta}} &= I_0 + I \leq I + h(c)(c-a) \frac{1}{a^{\beta+1}} \leq I + h(c)k(b-c)k^{\beta+1} \frac{1}{c^{\beta+1}} \\ &\leq I + k^{\beta+2} 2^{\beta} h(c)(b-c) \frac{1}{b^{1+\beta}} \leq I(1 + k^{\beta+2} 2^{\beta}), \end{aligned}$$

т.е. в этом случае требуемая оценка установлена. Если же $b > 2c$, то, поскольку $(c-a)/(2c-c) \leq 1 \leq k$, по уже доказанному

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{h(t) dt}{t^{1+\beta}} &= \int_a^{2c} \frac{h(t) dt}{t^{1+\beta}} + \int_{2c}^b \frac{h(t) dt}{t^{1+\beta}} \\ &\leq C(\beta, k) \int_c^{2c} \frac{h(t) dt}{t^{\beta}} + \int_{2c}^b \frac{h(t) dt}{t^{1+\beta}} \leq (C(\beta, k) + 1) \int_c^b \frac{h(t) dt}{t^{\beta}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 1. Пусть число $\beta \in (0, 1)$. Тогда существуют такое положительное число $C = C(\beta)$ и натуральное число $r = r(\beta) \geq 10$, что при всех натуральных $n \geq 2r$ и натуральных $k \in [r, n/2]$ имеет место оценка

$$\int_{\pi k/n}^{2\pi k/n} |K_n^\beta(t)| dt \geq C n^{-\beta} \int_{\pi k/n}^{2\pi k/n} \frac{dt}{t^{\beta+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что (см. [1; с. 131])

$$\lambda_1(\beta)n^\beta \leq A_n^\beta \leq \lambda_2(\beta)n^\beta$$

при всех $\beta \in (0, 1)$ и $n \geq 1$ для некоторых положительных постоянных $\lambda_1(\beta)$ и $\lambda_2(\beta)$. Согласно лемме A при всех $t \in (0, \pi)$ имеем

$$\begin{aligned} |K_n^\beta(t)| &\geq n^{-\beta} \left(C_1(\beta) \frac{|\sin((n + (\beta + 1)/2)t - \pi\beta/2)|}{t^{\beta+1}} - \frac{\pi^2}{2n^{1-\beta}t^2} \right) \\ &= \frac{C_1(\beta)}{n^\beta t^{\beta+1}} \left(\left| \sin \left(\left(n + \frac{\beta + 1}{2} \right) t - \frac{\pi\beta}{2} \right) \right| - \frac{\pi^2}{2C_1(\beta)(nt)^{1-\beta}} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где постоянная $C_1(\beta)$ зависит лишь от β . Выберем $r \geq 10$ так, чтобы

$$\frac{\pi^2}{2C_1(\beta)r^{1-\beta}} < \frac{1}{4}.$$

Тогда при $n \geq 2r$ и $k \in [r, n/2]$ на отрезке $[\pi k/n, 2\pi k/n]$ содержится не менее $k - 2$ периодов функции $|\sin((n + (\beta + 1)/2)t - \pi\beta/2)|$.

Если I_q – один из таких периодов и

$$E_{I_q} = \left\{ t \in I_q : \left| \sin \left(\left(n + \frac{\beta + 1}{2} \right) t - \frac{\pi\beta}{2} \right) \right| \geq \frac{1}{2} \right\},$$

то мера Лебега $\mu(E_{I_q}) = (2/3)\mu(I_q)$. При этом для $t \in E_{I_q}$ имеем (см. (5))

$$|K_n^\beta(t)| \geq \frac{C_1(\beta)}{4n^\beta t^{\beta+1}}.$$

С учетом того, что $(\beta + 1)/2 \in (0, 1)$, для любого q имеем $\mu(I_q) \geq \pi/(n + 1)$. Отсюда

$$\mu \left(\bigcup_q I_q \right) \geq \frac{\pi(k - 2)}{n + 1} = \frac{k - 2}{k} \frac{n}{n + 1} \frac{\pi k}{n} > \frac{4}{5} \frac{20}{21} \frac{\pi k}{n} > \frac{3}{4} \frac{\pi k}{n}.$$

Но тогда

$$\mu \left(\bigcup_q E_{I_q} \right) \geq \frac{1}{2} \frac{\pi k}{n}.$$

Поэтому, с учетом того, что функция $1/t^{\beta+1}$ монотонно убывает на $(0, \pi)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\pi k/n}^{2\pi k/n} |K_n^\beta(t)| dt &\geq \frac{C_1(\beta)}{4n^\beta} \sum_q \int_{E_{I_q}} \frac{dt}{t^{\beta+1}} \\ &\geq \frac{C_1(\beta)}{4n^\beta} \int_{[2\pi k/n - \mu(\bigcup_q E_{I_q}), 2\pi k/n]} \frac{dt}{t^{\beta+1}} \geq \frac{C_1(\beta)}{4n^\beta} \int_{3\pi k/(2n)}^{2\pi k/n} \frac{dt}{t^{\beta+1}}. \end{aligned}$$

Применяя утверждение 1 (с $h(t) = 1$), получим

$$\int_{\pi k/n}^{2\pi k/n} |K_n^\beta(t)| dt \geq \frac{C_2(\beta)}{n^\beta} \int_{\pi k/n}^{2\pi k/n} \frac{dt}{t^{\beta+1}},$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что в лемме 1 можно взять $r = 2^s$, где s – натуральное число.

ЛЕММА 2. Пусть число $\beta \in (0, 1)$, функция $\psi(t) \in \Psi$ и

$$\int_0^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt = \infty.$$

Тогда существуют 2π -периодическая функция $f(x)$, положительная постоянная C и монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^\infty$ такие, что

$$|f(x)| \leq \psi(|x|) \quad \text{при } x \in [-\pi, \pi]$$

и при всех r выполняется неравенство

$$\sigma_{n_r}^\beta(0; f) \geq C n_r^{-\beta} \int_{\pi/n_r}^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$Q(\beta) = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi |K_n^\beta(t)| dt.$$

Из леммы A следует, что $Q(\beta) < \infty$.

Построим индуктивно две последовательности натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^\infty$ и $\{l_r\}_{r=1}^\infty$ и последовательность измеримых функций $\{f_r(x)\}_{r=1}^\infty$ так, что $l_r < n_r < l_{r+1}$ при всех $r \geq 1$,

$$\begin{aligned} f_r(x) &= 0 & \text{при } x \in [-\pi, \pi] \setminus \left[\frac{\pi}{n_r}, \frac{\pi}{l_r} \right], \\ |f_r(x)| &\leq \psi(|x|) & \text{при } x \in [-\pi, \pi], \end{aligned}$$

при всех r имеем

$$\sigma_{n_r}^\beta(0; f_r) \geq C_1 n_r^{-\beta} \int_{\pi/n_r}^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt, \quad (6)$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от r , при любом $r > 1$ выполнено неравенство

$$F(\beta) \int_{\pi/n_{r-1}}^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt < \frac{C_1}{4} \int_{\pi/l_r}^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt \quad (7)$$

и при любом $r > 1$ имеем

$$Q(\beta) \psi\left(\frac{\pi}{l_r}\right) \leq \frac{C_1}{4n_{r-1}^\beta} \int_{\pi/n_{r-1}}^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt. \quad (8)$$

Пусть s – натуральное число из замечания 1. Возьмем $l_1 = 1$ и подберем $n_1 = 2^{q_1} \geq 2^{s+1}l_1$ так, чтобы $q_1 \in \mathbb{N}$ и

$$\int_{\pi/n_1}^{\pi/l_1} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt > 1.$$

Затем определим на $[-\pi, \pi]$ функцию

$$f_1(x) = X_{[2^s\pi/n_1, \pi/l_1]}(x) \operatorname{sign} K_{n_1}^\beta(x) \psi(x).$$

Тогда по лемме 1 имеем (см. также утверждение 1)

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1}^\beta(0; f_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{2^s\pi/n_1}^{\pi/l_1} \psi(t) |K_{2^{q_1}}^\beta(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{2^{-q_1+s}\pi}^{\pi} \psi(t) |K_{2^{q_1}}^\beta(t)| dt \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{q_1-s-1} \psi(\pi 2^{-q_1+s+\nu}) \int_{2^{-q_1+s+\nu}\pi}^{2^{-q_1+s+\nu+1}\pi} |K_{2^{q_1}}^\beta(t)| dt \\ &\geq C_2(\beta) n_1^{-\beta} \sum_{\nu=0}^{q_1-s-1} \psi(\pi 2^{-q_1+s+\nu}) \int_{2^{-q_1+s+\nu}\pi}^{2^{-q_1+s+\nu+1}\pi} \frac{dt}{t^{\beta+1}} \\ &\geq \frac{C_2(\beta)}{2} n_1^{-\beta} \sum_{\nu=0}^{q_1-s-1} \int_{2^{-q_1+s+\nu}\pi}^{2^{-q_1+s+\nu+1}\pi} \frac{\psi(t) dt}{t^{\beta+1}} \\ &= \frac{C_2(\beta)}{2} n_1^{-\beta} \int_{2^{-q_1+s}\pi}^{\pi} \frac{\psi(t) dt}{t^{\beta+1}} \\ &\geq C_3(\beta, s) n_1^{-\beta} \int_{2^{-q_1}\pi}^{\pi} \frac{\psi(t) dt}{t^{\beta+1}} = 2C_4(\beta) n_1^{-\beta} \int_{\pi/n_1}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь, пусть определены числа $\{n_r\}_{r=1}^{p-1}$, $\{l_r\}_{r=1}^{p-1}$ и функции $\{f_r(x)\}_{r=1}^{p-1}$, удовлетворяющие условиям:

- $l_r < n_r < l_{r+1}$ при всех $1 \leq r \leq p-2$;
- $l_{p-1} < n_{p-1}$;
- $f_r(x) = 0$ при $x \in [-\pi, \pi] \setminus [\pi/n_r, \pi/l_r]$;
- $|f_r(x)| \leq \psi(|x|)$ при всех $x \in [-\pi, \pi]$ и $1 \leq r \leq p-1$,

а также условию (6) при $1 \leq r \leq p-1$ и (7), (8) при $2 \leq r \leq p-1$. Тогда заметим, что, поскольку $f_r(x) = 0$ при $x \in [-\pi, \pi/n_{p-1}]$ и $1 \leq r \leq p-1$, при $\nu > n_{p-1}$ имеем (см. лемму A)

$$\left| \sigma_\nu^\beta \left(0; \sum_{j=1}^{p-1} f_j \right) \right| \leq F(\beta) \nu^{-\beta} \int_{\pi/n_{p-1}}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt, \quad (10)$$

где постоянная $F(\beta)$ – из леммы A. Используя тот факт, что

$$\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt = \infty,$$

и то, что $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$, выберем натуральное $l_p > n_{p-1}$ так, чтобы выполнялись неравенства (7) и (8) для $p = r$ и $C_1 = C_4(\beta)$. Затем, найдем такое $n_p = 2^{q_p} \geq 2^{s+1}l_p$, что

$$\int_{\pi/n_p}^{\pi/l_p} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt > \frac{1}{2} \int_{\pi/n_p}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt.$$

Определим на $[-\pi, \pi]$ функцию

$$f_p(x) = X_{[2^s \pi/n_p, \pi/l_p]}(x) \operatorname{sign} K_{n_p}^\beta(x) \psi(x).$$

Дословно повторяя оценку (9), получим

$$\sigma_{n_p}^\beta(0; f_p) \geq 2C_4(\beta)n_p^{-\beta} \int_{\pi/n_p}^{\pi/l_p} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt \geq C_4(\beta)n_p^{-\beta} \int_{\pi/n_p}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt.$$

Таким образом, оценка (6) выполнена с постоянной $C_1 = C_4(\beta)$, и шаг индукции завершен.

Определим теперь функцию $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} f_p(x)$. Ясно, что $|f(x)| \leq \psi(|x|)$ при $x \in [-\pi, \pi]$. Оценим при $p \geq 1$ среднее (см. (10) и (6)–(8))

$$\begin{aligned} \sigma_{n_p}^\beta(0; f) &\geq -\left| \sigma_{n_p}^\beta\left(0; \sum_{j=1}^{p-1} f_j\right) \right| + \sigma_{n_p}^\beta(0; f_p) - \left| \sigma_{n_p}^\beta\left(0; \sum_{j=p+1}^{\infty} f_j\right) \right| \\ &\geq -F(\beta)n_p^{-\beta} \int_{\pi/n_{p-1}}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt \\ &\quad + C_1 n_p^{-\beta} \int_{\pi/n_p}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/l_{p+1}} \psi(t) |K_n^\beta(t)| dt \\ &\geq C_1 n_p^{-\beta} \int_{\pi/n_p}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt - \frac{C_1}{4} n_p^{-\beta} \int_{\pi/l_p}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt - Q(\beta) \psi\left(\frac{\pi}{l_{p+1}}\right) \\ &\geq \frac{C_1}{2} n_p^{-\beta} \int_{\pi/n_p}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства леммы 2 видно, что числа $\{n_r\}_{r=1}^{\infty}$ можно выбрать из любой наперед заданной возрастающей последовательности натуральных чисел.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Поскольку

$$\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt = \infty,$$

то возьмем $g(\mathbf{x}) = f(x_1)$, где $f(t)$ – функция из леммы 2. Тогда требуемое утверждение (с $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$) сразу вытекает из этой леммы.

В статье [7] было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. Пусть число $\beta \in (0, 1)$. Тогда существуют положительная постоянная $C(\beta)$ и измеримая и ограниченная на T^2 функция $f(s, t)$, равная нулю в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, такие, что для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ справедлива оценка

$$|\sigma_{n_k, n_k}^\beta((0, 0); f)| \geq \frac{C(\beta)}{n_k^\beta}.$$

Из теоремы А сразу же вытекает справедливость теоремы 4.

4. Одномерный случай.

ЛЕММА 3. Пусть функция $f(t)$ – ограниченная измеримая на $[-\pi, \pi]$ функция, $\beta \in (0, 1)$, отрезок $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ и не содержит точку 0. Тогда

$$I_{a,b} = \int_a^b f(t) K_n^\beta(t) dt = o(n^{-\beta})$$

при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем (см. лемму A)

$$|I_{a,b}| \leq \frac{1}{A_n^\beta} \left| \int_a^b \frac{f(t) \sin((n + (\beta + 1)/2)t - \pi\beta/2)}{|2 \sin t/2|^{\beta+1}} dt \right| + \frac{C}{n} \int_a^b \frac{|f(t)|}{t^2} dt \equiv I_1 + I_2. \quad (11)$$

Поскольку коэффициенты Фурье интегрируемой функции стремятся к нулю, имеем

$$\int_a^b \frac{f(t) \sin((n + (\beta + 1)/2)t - \pi\beta/2)}{|2 \sin t/2|^{\beta+1}} dt \rightarrow 0 \quad (12)$$

при $n \rightarrow \infty$. Наконец,

$$I_2 \leq \frac{C(f, a, b)}{n}. \quad (13)$$

Теперь утверждение леммы 3 вытекает из формул (11)–(13).

Перейдем к доказательству теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$ и $f(0) = 0$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Подберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$Y = \frac{F(\beta)}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\psi(|t|)}{|t|^{\beta+1}} dt < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14)$$

Затем, фиксируя данное $\delta > 0$, выберем такое n_0 , что (см. лемму 3) при $n \geq n_0$ имеем

$$J = \frac{1}{\pi} \left| \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]} f(t) K_n^\beta(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2n^\beta}. \quad (15)$$

Поскольку $|\sigma_n^\beta(0; f)| \leq n^{-\beta} Y + J$, из неравенств (14) и (15) вытекает утверждение теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Проведем его по схеме, аналогичной использованной в доказательстве леммы 2.

Построим индуктивно две последовательности натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^\infty$ и $\{l_r\}_{r=1}^\infty$ и последовательность измеримых функций $\{f_r(x)\}_{r=1}^\infty$ так, что $l_r < n_r < l_{r+1}$ при всех $r \geq 1$,

$$\begin{aligned} f_r(x) &= 0 & \text{при } x \in [-\pi, \pi] \setminus \left[\frac{\pi}{n_r}, \frac{\pi}{l_r} \right], \\ |f_r(x)| &\leq \psi(|x|) & \text{при } x \in [-\pi, \pi], \end{aligned}$$

при всех r имеем

$$\sigma_{n_r}^\beta(0; f_r) - \left| \sigma_{n_r}^\beta \left(0; \sum_{j=1}^{r-1} f_j \right) \right| \geq 2b_{n_r} n_r^{-\beta}, \quad (16)$$

и при любом $r > 1$ имеем

$$Q(\beta)\psi\left(\frac{\pi}{l_r}\right) < b_{n_r}n_{r-1}^{-\beta}. \quad (17)$$

Пусть s – натуральное число из замечания 1. Возьмем $l_1 = 1$, и пусть $n_1 = 2^{q_1} \geq 2^{s+1}l_1$.

Затем определим на $[-\pi, \pi]$ функцию

$$f_1(x) = X_{[2^s\pi/n_1, \pi/l_1]}(x) \operatorname{sign} K_{n_1}^\beta(x) \psi(x).$$

Тогда по лемме 1 имеем (см. также утверждение 1)

$$\begin{aligned} \sigma_{n_1}^\beta(0; f_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{2^s\pi/n_1}^{\pi/l_1} \psi(t) |K_{2^{q_1}}^\beta(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{2^{-q_1+s}\pi}^{\pi} \psi(t) |K_{2^{q_1}}^\beta(t)| dt \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{q_1-s-1} \psi(\pi 2^{-q_1+s+\nu}) \int_{2^{-q_1+s+\nu}\pi}^{2^{-q_1+s+\nu+1}\pi} |K_{2^{q_1}}^\beta(t)| dt \\ &\geq C_2(\beta) n_1^{-\beta} \sum_{\nu=0}^{q_1-s-1} \psi(\pi 2^{-q_1+s+\nu}) \int_{2^{-q_1+s+\nu}\pi}^{2^{-q_1+s+\nu+1}\pi} \frac{dt}{t^{\beta+1}} \\ &\geq \frac{C_2(\beta)}{2} n_1^{-\beta} \sum_{\nu=0}^{q_1-s-1} \int_{2^{-q_1+s+\nu}\pi}^{2^{-q_1+s+\nu+1}\pi} \frac{\psi(t) dt}{t^{\beta+1}} = \frac{C_2(\beta)}{2} n_1^{-\beta} \int_{2^{-q_1+s}\pi}^{\pi} \frac{\psi(t) dt}{t^{\beta+1}} \\ &\geq C_3(\beta, s) n_1^{-\beta} \int_{2^{-q_1}\pi}^{\pi} \frac{\psi(t) dt}{t^{\beta+1}} = 2C_4(\beta, s) n_1^{-\beta} \int_{2^{-q_1}\pi}^{\pi} \frac{\psi(t) dt}{t^{\beta+1}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Фиксируем n_1 так, чтобы

$$C_4(\beta, s) \int_{2^{-q_1}\pi}^{\pi} \frac{\psi(t) dt}{t^{\beta+1}} > 2b_{n_1}.$$

Теперь, если уже определены числа $\{n_k\}_{k=1}^{r-1}$, $\{l_k\}_{k=1}^{r-1}$ и функции $\{f_k(x)\}_{k=1}^{r-1}$, удовлетворяющие условиям

$$l_r < n_r < l_{r+1}, \quad 1 \leq k \leq r-2, \quad l_{k-1} < n_{k-1},$$

$$f_k(x) = 0 \quad \text{при } x \in [-\pi, \pi] \setminus \left[\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{l_k} \right],$$

$$|f_k(x)| \leq \psi(|x|) \quad \text{при } x \in [-\pi, \pi], \quad \text{при } 1 \leq k \leq r-1,$$

и условиям (16) при $1 \leq k \leq r-1$ и (17) при $2 \leq k \leq r-1$, то выберем $l_r > n_{r-1}$ так, чтобы выполнялось неравенство (17). Согласно лемме 3 для $\nu \geq l_r$ имеем

$$\left| \sigma_\nu^\beta \left(0; \sum_{j=1}^{r-1} f_j \right) \right| = p_\nu \nu^{-\beta}, \quad (19)$$

где $p_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. Выберем такое $n_r = 2^{q_r} \geq 2^{s+1}l_r$, что

$$C_4(\beta, s) \int_{\pi/n_r}^{\pi/l_r} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt > \max(p_{n_r}, 2b_{n_r}),$$

где $C_4(\beta, s)$ – постоянная из оценки (18). Затем определим на $[-\pi, \pi]$ функцию

$$f_r(x) = X_{[2^s \pi / n_r, \pi / l_r]}(x) \operatorname{sign} K_{n_r}^\beta(x) \psi(x).$$

Используя оценку (18) и равенство (19), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{n_r}^\beta(0; f_r) - \left| \sigma_{n_r}^\beta\left(0; \sum_{j=1}^{r-1} f_j\right) \right| &\geq 2C_4(\beta, s) n_r^{-\beta} \int_{\pi/n_p}^{\pi/l_p} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt - p_{n_r} n_r^{-\beta} \\ &\geq C_4(\beta, s) n_r^{-\beta} \int_{\pi/n_p}^{\pi/l_p} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt \geq 2b_{n_r} n_r^{-\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом выполнена оценка (16) и шаг индукции завершен.

Определим функцию

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} f_p(x).$$

Ясно, что $|f(x)| \leq \psi(|x|)$ при $x \in [-\pi, \pi]$. Оценим при $p \geq 1$ среднее (см. (16), (17))

$$\begin{aligned} \sigma_{n_p}^\beta(0; f) &\geq \sigma_{n_p}^\beta(0; f_p) - \left| \sigma_{n_p}^\beta\left(0; \sum_{j=1}^{p-1} f_j\right) \right| - \left| \sigma_{n_p}^\beta\left(0; \sum_{j=p+1}^{\infty} f_j\right) \right| \\ &\geq 2b_{n_p} n_p^{-\beta} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/l_{p+1}} \psi(t) |K_n^\beta(t)| dt \geq 2b_{n_p} n_p^{-\beta} - Q(\beta) \psi\left(\frac{\pi}{l_{p+1}}\right) \geq b_{n_p} n_p^{-\beta}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*. т. 1, М., 1965.
- [2] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [3] J. G. Herriot, “Nörlund summability of double Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52**:1 (1942), 72–94.
- [4] В. А. Ильин, “Условия локализации прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье в классах С. М. Никольского”, *Матем. заметки*, **8**:5 (1970), 595–606.
- [5] Н. Ч. Крутицкая, “Локализация при ограниченном суммировании методами Чезаро, Рисса и Абеля кратных рядов Фурье”, *Матем. заметки*, **12**:3 (1972), 355–364.
- [6] Н. Ч. Крутицкая, “Окончательные условия локализации прямоугольных чезаровских средних и средних метода Абеля при ограниченном суммировании кратного тригонометрического ряда Фурье в классах Лиувилля”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:3 (1973), 593–602.
- [7] А. М. Дьяченко, “О свойствах средних Чезаро двойных рядов Фурье”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, № 2, 3–11.

А. М. Дьяченко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: dyak86@mail.ru

Поступило

21.05.2009

Исправленный вариант

29.10.2009