Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, С. А. Богатый, Д. Реповш, Компакт Банаха–Мазура есть александровская компактификация Q -многообразия, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm83>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:51:01

УДК 517.98

КОМПАКТ БАНАХА–МАЗУРА ЕСТЬ АЛЕКСАНДРОВСКАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ Q -МНОГООБРАЗИЯ

С. М. Агеев, С. А. Богатый, Д. Реповш

Доказано, что для всех $n > 2$ компакт Банаха–Мазура $Q(n)$ есть компактификация Q -многообразия евклидовой точкой. Ранее этот результат был известен для $n = 2$.
Библиография: 20 названий.

1. Введение. Задача определения топологического типа компакта Банаха–Мазура $Q(n)$ возникла в польской школе геометрической теории банаховых пространств. А. Пелчинский заметил, что элементарно-геометрические рассуждения доказывают стягиваемость $Q(n)$. С другой стороны компакт Банаха–Мазура тесно связан с гиперпространством всех выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$. Принимая во внимание эти обстоятельства, а также проблему Войдыславского о гомотопности гиперпространств определенного типа гильбертову кубу Q , Пелчинский высказал следующие две гипотезы, которые стали широко известны в топологических кругах в особенности после публикации Вэста [1]:

1) пространство $Q(n)$ (при $n \geq 2$) является абсолютным ретрактом,
и более сильная гипотеза:

2) пространство $Q(n)$ (при $n \geq 2$) гомотопно гильбертову кубу Q .

В 1996 г. Фабел доказал, что компакт $Q(2)$ является абсолютным ретрактом ($Q(2) \in \text{AE}$), и в том же году было показано [2], что компакт $Q(n)$ есть абсолютный экстензор для всех $n \geq 2$. Наконец, в 1997 г. ([3] и кратко в [4]) было получено отрицательное решение вопроса о гомотопности $Q(n)$ и гильбертова куба Q (см. также [5]).

ТЕОРЕМА 1.1. $Q(2)$ и Q не гомотопны.

Основой доказательства теоремы 1.1 является установление гомотопической нетривиальности $Q(2) \setminus \{\text{Eucl}\}$, где $\{\text{Eucl}\} \in Q(n)$ есть евклидова точка, которой соответствует изометрический класс стандартного n -мерного евклидова пространства. В свою очередь, это есть следствие нетривиальности 4-мерной группы когомологий $H^4(Q(2) \setminus \{\text{Eucl}\}, \mathbb{Q})$ с рациональными коэффициентами. Идеи работы [6] позволили в [3] открыть структуру комплексов Эйленберга–Маклейна в компакте Банаха–Мазура $Q(2)$, что

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке гранта NSERC № OGP005616. Работа второго автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00289. Работа третьего автора выполнена при частичной поддержке гранта MESS № 0101-509.

влекло за собой возможность применять достаточно продвинутую технику алгебраической топологии: вычисления в кольцах когомологий и теорию Смита периодических гомеоморфизмов [3, с. 7]. Заметим, что и появившаяся позже работа [7] по проблеме 2 в решающий момент доказательства использует на с. 224 те же вычисления¹. По всей видимости, обнаружение более глубокой связи алгебраической топологии с компактами Банаха–Мазура позволит продвинуться в изучении его топологии, в частности, доказать негомеоморфность $Q(n)$ и гильбертова куба для всех $n > 2$.

В [9] исследование $Q(2)$ было продолжено и было доказано, что $Q(2)$ есть одноточечная компактификация Q -многообразия, что, в свою очередь, с помощью теоремы 1.1 влекло его неоднородность. Естественно возникающая проблема о $Q(n)$, $n > 2$, была сведена к некоторому правдоподобному вопросу из выпуклой геометрии. Здесь мы вновь возвращаемся к этой проблеме, и опираясь на идеи работы [9], примененной к понятию эллиптической выпуклости, доказываем, что справедлива

ТЕОРЕМА 1.2. $Q_{\mathcal{E}}(n) \rightleftharpoons Q(n) \setminus \{\text{Eucl}\}$ есть Q -многообразие.

Наконец, мы считаем своим приятным долгом поблагодарить рецензента за ценные советы, способствовавшие улучшению статьи.

2. Предварительные факты и результаты. Пусть G есть компактная группа Ли. Под действием G на пространстве X понимается гомоморфизм $T: G \rightarrow \text{Aut } X$ группы G в группу $\text{Aut } X$ всех автогомеоморфизмов X такой, что отображение $G \times X \rightarrow X$, заданное $(g, x) \mapsto T(g)(x) = g \cdot x$, непрерывно. Пространство X с фиксированным действием G называется G -пространством.

Изотропная подгруппа точки x , или *стабилизатор* x , определяется как $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$, а орбита x как $G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$. Пространство всех орбит обозначается через X/G , а естественное отображение $\pi: X \rightarrow X/G$, заданное $\pi(x) = G(x)$, называется *орбитной проекцией*. Орбитное пространство X/G снабжается фактор-топологией, индуцированной π (см. [10]).

Приведем теперь одно из эквивалентных определений компакта Банаха–Мазура $Q(n)$ (для детального ознакомления с топологией компакта Банаха–Мазура см., например, [9] и [5]). Через $C(n)$ обозначим семейство всех компактных выпуклых центрально-симметричных ($\text{rel } 0$) тел в $\mathbb{R}^n$. Если измерять расстояние между подмножествами $\mathbb{R}^n$ с помощью метрики Хаусдорфа ρ_H и определять линейную комбинацию $\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$ с помощью операции Минковского, то $(C(n), \rho_H)$ становится локально компактным выпуклым пространством. Более того, $C(n)$ может быть снабжено действием общей линейной группы $\text{GL}(n) \times C(n) \rightarrow C(n)$, $T \cdot V = T(V)$, где $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \in \text{GL}(n)$ и $V \in C(n)$, которое согласуется с выпуклой структурой на $C(n)$. Хорошо известно, что орбитное пространство $C(n)/\text{GL}(n)$ естественно гомеоморфно компактному Банаха–Мазура.

Напомним, что компакт Банаха–Мазура $Q(n) = C(n)/\text{GL}(n)$ гомеоморфен также пространству орбит по действию ортогональной группы $O(n)$ пространства $\mathbb{R}^n$. Известно (см. [11]), что для любого выпуклого тела $V \in C(n)$, существует единственный

¹Отметим, что работа [8] того же автора и с тем же названием содержит грубые ошибки. В лемме 6 утверждается существование $O(2)$ -эквивариантного отображения, которое не является $O(2)$ -эквивариантным. Это привело к тому, что в доказательстве основного результата (теорема 4) группа $SO(2)$ и $O(2)$ отождествляются и вопрос об окончательной факторизации по группе $\mathbb{Z}_2 = O(2)/SO(2)$, для осуществления которой в [4] и привлекается теория Смита, даже не возникает.

эллипсоид $E_V \in C(n)$ (называемый *эллипсоидом Левнера*), который содержит V и имеет минимальный евклидов объем. Из минимальности $\text{vol } E_V$ следует $\text{GL}(n)$ -инвариантность E_V , $E_{T \cdot V} = T \cdot E_V$, для любого $T \in \text{GL}(n)$. Непрерывная зависимость E_V от V относительно метрики Хаусдорфа была доказана в [2]. Поэтому $\mathcal{L}: C(n) \rightarrow \mathfrak{E}$, $\mathcal{L}(V) = E_V$, есть $\text{GL}(n)$ -ретракция $C(n)$ на “эллиптическую” орбиту $\mathfrak{E} = \text{GL}(n) \cdot B^n$, где B^n есть единичный шар ($\mathcal{L}$ называется *ретракцией Левнера*). Пусть $L(n) = \mathcal{L}^{-1}(B^n)$ есть срез, который является компактным $O(n)$ -пространством. Другими словами, $L(n)$ состоит из $V \in C(n)$, эллипсоид Левнера которых совпадает с B^n . Теперь легко заметить, что орбитное пространство $Q(n) = C(n)/\text{GL}(n)$ естественно гомеоморфно $L(n)/O(n)$. Поэтому $Q_{\mathcal{E}} = Q(n) \setminus \{\text{Eucl}\}$ совпадает с $L_{\mathcal{E}}(n)/O(n)$, где $L_{\mathcal{E}} = L(n) \setminus \{B^n\}$. Следовательно, теорема 1.2 сводится к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2.1. *$L_{\mathcal{E}}(n)/O(n)$ есть Q -многообразие.*

Пространство X называется *абсолютным окрестностным экстензором*, $X \in \text{ANE}$, если любое отображение $\varphi: A \rightarrow X$, определенное на замкнутом подмножестве A метрического пространства Z , и называемое *частичным отображением*, может быть продолжено на некоторую окрестность $U \subset Z$ множества A , $\tilde{\varphi}: U \rightarrow X$, $\tilde{\varphi}|_A = \varphi$. Если мы можем всегда взять $U = Z$, то X называется *абсолютным экстензором*, $X \in \text{AE}$. Заметим, что в случае, когда X есть метрическое пространство, понятия абсолютного (окрестностного) экстензора и абсолютного (окрестностного) ретракта совпадают. По характеризационной теореме Торунчика [12], [13] локально компактное пространство $X \in \text{ANE}$ локально устроено как гильбертов куб Q (т.е. является Q -многообразием) тогда и только тогда, когда X допускает произвольно близкие к Id_X отображения $f_i: X \rightarrow X$, $i \in \{1, 2\}$ с $\text{Im } f_1 \cap \text{Im } f_2 = \emptyset$.

Так как в силу [2] $Q(n) \in \text{AE}$, то $L(n)/O(n) \in \text{AE}$, и поэтому, $Q_{\mathcal{E}} \cong L_{\mathcal{E}}(n)/O(n) \in \text{ANE}$. Следовательно, доказательство теоремы 2.1 (и, следовательно, теоремы 1.2) легко сводится с помощью характеризационного критерия Торунчика к следующему факту (см. [9]).

ТЕОРЕМА 2.2. *Существуют гомотопии*

$$f_t: L_{\mathcal{E}}(n)/O(n) \rightarrow L_{\mathcal{E}}(n)/O(n) \quad \text{и} \quad g_t: L_{\mathcal{E}}(n)/O(n) \rightarrow L_{\mathcal{E}}(n)/O(n), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

такие, что $f_0 = g_0 = \text{Id}$ и $\text{Im } f_t \cap \text{Im } g_s = \emptyset$ для всех $0 < s \leq t \leq 1$.

Хорошо известно [14], что существует $O(n)$ -ретракция $R: C(n) \rightarrow L(n)$, которая отображает $C_{\mathcal{E}}(n)$ в $L_{\mathcal{E}}(n)$. Однако мы будем нуждаться в более точном результате, который следует из геометрических рассуждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3 (см. [9]). *Существует непрерывная $O(n)$ -ретракция $\mathfrak{R}: C(n) \rightarrow L(n)$ такая, что для любого $V \in C(n)$ $\mathfrak{R}(V)$ и V аффинно эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T есть элемент $\text{GL}(n)$ такой, что $T^{-1} \cdot B^n = \mathcal{L}(V)$. В силу [15] оператор T может быть представлен как $T_2 \circ T_1$, где $T_2 \in O(n)$, а T_1 является самосопряженным. Мы полагаем $\mathfrak{R}(V) = T_1(V)$. Проверку всех требуемых свойств мы оставляем читателю.

Пусть (X, d) есть метрическое пространство с диаметром 1. В [9], по ошибке, была приведена формула

$$\rho((x, t), (x', t')) = \sqrt{t^2 + (t')^2 - 2tt' \cos \gamma}, \quad \text{где} \quad \cos \gamma = \frac{(2 - d^2(x, x'))}{2},$$

для метрики на конусе $\text{Con } X$ (впрочем, не влияющая на справедливость остального материала). Правильная формула широко известна (см., например, [16, с. 91]) и немного отличается от нашей:

$$\rho((x, t), (x', t')) = \sqrt{t^2 + (t')^2 - 2tt' \cos \gamma}, \quad \text{где } \gamma = d(x, x').$$

Авторы признательны С. Антонян за любезное указание на эту неточность (не влияющую на содержание работы [9]) в его реферате – дополнительную информацию об этой метрике можно найти в [7].

Далее, мы вводим частичный порядок между компактными группами Ли. Мы полагаем $K < H$, где K и H есть компактные группы Ли, если K изоморфна собственной подгруппе H . Ясно, что

- (α) если $K < H$, то либо $\dim K < \dim H$, либо $\dim K = \dim H$ и $\mathcal{C}_K < \mathcal{C}_H$, где $\mathcal{C}_H$ есть число компонент линейной связности H .

Если K есть замкнутая подгруппа компактной группы Ли H и $\dim K = \dim H$, то K есть открытая подгруппа. Отсюда может быть выведен более сильный результат.

- (β) Пусть K – замкнутая подгруппа компактной группы Ли H . Если $\dim K = \dim H$ и $\mathcal{C}_K = \mathcal{C}_H$, то $K = H$.

Проверка следующего свойства введенного порядка довольно проста, и мы его оставляем читателю.

- (γ) Не существует счетной последовательности компактных групп Ли $\{H_i\}$ таких, что $H_1 > H_2 > H_3 > \dots > H_n > \dots$.

Ясно, что пара $\text{ind } H = (\dim H, \mathcal{C}_H)$ принадлежит $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Пусть $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ снабжено лексикографическим порядком. Из (α) следует, что отображение $H \mapsto \text{ind } H$ сохраняет порядок.

Из (γ) мы можем вывести следующий принцип, позволяющий проводить доказательства индукцией по компактным группам Ли.

Предложение 2.4. Пусть $\mathcal{P}(H)$ есть свойство, которое зависит от компактной группы Ли H . Предположим, что

- (δ) $\mathcal{P}(H)$ верно для тривиальной группы $H = \{e\}$ и
(ε) $\mathcal{P}(H)$ верно, если $\mathcal{P}(K)$ верно для всех $K < H$.

Тогда $\mathcal{P}(H)$ верно для всех групп H .

В качестве примера в [17] было рассмотрено следующее свойство, удовлетворяющее (δ) и (ε): $\mathcal{P}(H)$ верно, если для любого метрического H -пространства $X \in H\text{-ANE}$ орбитное пространство X/H есть ANE.

3. Доказательство теоремы 2.2. Напомним, что точка a выпуклого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ называется *экстремальной*, если $V \setminus \{a\}$ является выпуклым. Хорошо известно, что множество $\text{Extr}(V)$ всех экстремальных точек V лежит в относительной границе $\text{rbd } V$, и V совпадает с выпуклой оболочкой $\text{Conv}(\text{Extr}(V))$. Если $\text{Extr}(V) = \text{rbd}(V)$, то V называется *эллиптически выпуклым*, в противном случае V не является эллиптически выпуклым. Покажем справедливость двух нижеприводимых фактов, из которых легко следует теорема 2.2.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует $O(n)$ -гомотопия $H: L(n) \times [0, 1] \rightarrow L(n)$ такая, что*

- (а) $H_0 = \text{Id}$ и для всех $t \in [0, 1]$, $H_t^{-1}(B^n)$ содержится во множестве эллиптически выпуклых тел и
- (б) $H_t(V)$ является эллиптически выпуклым для любых $V \in L(n)$ и $t > 0$.

ТЕОРЕМА 3.2. *Существует $O(n)$ -гомотопия $F: L(n) \times [0, 1] \rightarrow L(n)$ такая, что*

- (с) $F_0 = \text{Id}$ и
- (д) $F_t(V)$ не является эллиптически выпуклым для любых $V \in L_g(n)$ и $t > 0$.

Для доказательства теоремы 2.2 достаточно рассмотреть две $O(n)$ -гомотопии

$$F: L(n) \times [0, 1] \rightarrow L(n) \quad \text{и} \quad H \circ F: L(n) \times [0, 1] \rightarrow L(n)$$

и затем перейти к пространству орбит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть $V \in L(n)$. Заметим, что выпуклое тело V является эллиптически выпуклым тогда и только тогда, когда каждая опорная гиперплоскость тела V пересекает V ровно в одной точке [15]. Этот критерий позволяет связать понятие эллиптической выпуклости с линейной комбинацией Минковского.

ЛЕММА 3.3. *Пусть $V, V_i \in C(n)$ и $V = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot V_i$, где все $\lambda_i > 0$. Тогда V является эллиптически выпуклым тогда и только тогда, когда V_i является эллиптически выпуклым для любого i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Π и Π_i есть параллельные опорные гиперплоскости V и V_i , соответственно. Пусть также $A = V \cap \Pi$ и $A_i = V_i \cap \Pi_i$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot A_i \subset A$. Несложно показать, что $\sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot x_i \in A$, $x_i \in V_i$, влечет $x_i \in A_i$. Следовательно, $A = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot A_i$ и, стало быть, A состоит из одной точки тогда и только тогда, когда каждое A_i состоит из одной точки. Далее следует применить критерий эллиптической выпуклости, приведенный выше.

Продолжаем доказательство теоремы 3.1. Пусть гомотопия $\psi_t: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq 1$, определена формулой $\psi_t(x) = x/(1+t \cdot \|x\|) \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что это непрерывная гомотопия и для любого $t \in [0, 1]$

- (1) ψ_t есть $O(n)$ -гомеоморфизм,
- (2) ψ_t переводит любой отрезок в кривую, которая с любым эллипсом пересекается в конечном числе точек, а также
- (3) для любого $V \in C(n)$ $\psi_t(V)$ является эллиптически выпуклым телом (см. [8, с. 95]).

Из (1) легко следует, что непрерывное отображение

$$\Psi: L(n) \times [0, 1] \rightarrow C(n), \quad (V, t) \in L(n) \times [0, 1] \mapsto \psi_t(V) \in C(n),$$

сохраняет действие группы $O(n)$. Чтобы проверить, что $O(n)$ -гомотопия $H \doteq \mathfrak{H} \circ \Psi: L(n) \times [0, 1] \rightarrow L(n)$, где $\mathfrak{H}$ взято из 2.3, удовлетворяет теореме 3.1, следует воспользоваться (2)–(3). Все детали мы оставляем читателю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Вначале заметим, что при переходе к выпуклой оболочке дополнительные экстремальные точки не появляются.

(4) $\text{Extr}(\text{Conv } A) \subset A$ для любого $A \subset \mathbb{R}^n$.

Следовательно, если K конечно, то $\text{Extr Conv } K$ также конечно, и поэтому $\text{Conv } K$ не является эллиптически выпуклым. Основная идея доказательства теоремы 3.2 состоит в нахождении достаточного числа тел в $C(n)$, не являющихся эллиптически выпуклыми.

ЛЕММА 3.4. Пусть $V \in L_{\mathcal{E}}(n)$ и $H = O(n)_V$ есть стабилизатор V . Тогда для любого конечного множества $L \subset \text{Bd } V$ с $0 \in \text{Int}(\text{Conv } L)$, $W \triangleq \text{Conv}(H \cdot L) \in C(n)$ не является эллиптически выпуклым. Более того, стабилизатор $O(n)_W$ содержит H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\{\pm \text{Id}\} \subset H$ и $0 \in \text{Int}(\text{Conv } L) \subset \text{Conv}(H \cdot L)$, то $\text{Conv}(H \cdot L) \in C(n)$. Далее обратим внимание на следующий элементарный факт.

(5) Если $A, B \in C(n)$ и $\text{Bd } A \subset \text{Bd } B$, то $A = B$ (и поэтому $\text{Bd } A = \text{Bd } B$).

Предположим противоположно к лемме, что W является эллиптически выпуклым, т.е. $\text{Extr}(W) = \text{Bd } W$. Поэтому $\text{Bd } W = \text{Extr}(\text{Conv}(H \cdot L)) \subset H \cdot L \subset \text{Bd } V$. В силу (5) $V = W$. Так как L конечно и $O(n)$ действует ортогонально на $\mathbb{R}^n$, $H \cdot L$ содержится в дизъюнктном объединении $\bigsqcup r_i \cdot S^{n-1}$ конечного числа концентрических сфер. Ввиду $\text{Bd } W \subset H \cdot L$ и связности $\text{Bd } W$, $\text{Bd } W \subset r_{i_0} \cdot S^{n-1}$ для некоторого i_0 . Из (5) следует, что $V = W = r_{i_0} \cdot B^n$, что противоречит $V \in L_{\mathcal{E}}(n)$.

Наконец, $O(n)_W$ содержит H ввиду ортогональности действия $O(n)$ на $\mathbb{R}^n$.

Далее мы найдем в произвольно малой окрестности $V \in L_{\mathcal{E}}(n)$ тело, не являющееся эллиптически выпуклым, обладающее дополнительными свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $V \in L_{\mathcal{E}}(n)$ и $H = O(n)_V$ есть стабилизатор V . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество $L \subset \text{Bd } V$ с $0 \in \text{Int}(\text{Conv } L)$, что

- (i) $W = \text{Conv}(H \cdot L)$ не является эллиптически выпуклым,
- (ii) V и W имеют равные $O(n)$ -стабилизаторы и
- (iii) $\rho_H(V, W) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы применим [19, гл. 2, следствие 5.5] к $O(n)$ -пространству $C(n)$. Тогда существует $\theta > 0$ такое, что

- (6) как только $U \in C(n)$ и $\rho_H(V, U) < \theta$, то подгруппа, сопряженная стабилизатору $O(n)_U$, содержится в H , или эквивалентно, $O(n)_U \subset H'$, где H' есть некоторая подгруппа, сопряженная H .

ЛЕММА 3.6. Если $U \in C(n)$, $\rho_H(V, U) < \theta$ и $O(n)_U \supseteq H$, то $O(n)_U = H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H \subset O(n)_W$, в силу (6) мы имеем $H \subset H'$. Так как группы Ли H и H' изоморфны, то $\dim H = \dim H'$ и $\mathcal{C}(H) = \mathcal{C}(H')$. Свойство (β) влечет, что $H = H'$.

Ясно, что существует конечное подмножество $L \subset \text{Bd } V$ такое, что $0 \in \text{Int}(\text{Conv } L)$ и $\rho_H(V, \text{Conv } L) < \theta$. Пусть $W \triangleq \text{Conv}(H \cdot L)$. Тогда $V \supseteq \text{Conv}(H \cdot L) = W \supseteq \text{Conv } L$,

и поэтому $\rho_H(V, W) < \theta$. Поскольку $O(n)_W = O(n)_{\text{Conv}(H \cdot L)} \supset O(n)_{H \cdot L} \supseteq H$, в силу 3.6 мы имеем $O(n)_W = H$.

Теперь мы применим предложение 3.5, чтобы построить обильное семейство эквивариантных ретракций на орбиты, не являющиеся эллиптически выпуклыми.

ЛЕММА 3.7. *Существуют открытое $O(n)$ -покрытие $\omega = \{\mathcal{U}_\gamma\}$ $O(n)$ -пространства $Z \doteq L_{\mathcal{G}}(n) \times (0, 1]$ и семейство $\Omega = \{r_\gamma: \mathcal{U}_\gamma \rightarrow P_\gamma\}$ $O(n)$ -отображений такие, что*

- (е) для любого γ $P_\gamma = (O(n) \cdot Q_\gamma) \times \{t_\gamma\}$, где $Q_\gamma \in C(n)$ не является эллиптически выпуклым, а $t_\gamma \in (0, 1]$,
- (f) $\{\mathcal{U}_\gamma\}$ является $O(n)$ -примыкающим покрытием к $A \doteq L(n) \times [0, 1] \setminus Z = \{B^n\} \times [0, 1] \cup L(n) \times \{0\}^2$ и
- (g) для любой $O(n)$ -орбиты $\theta(a) \subset A$, $a \in A$, и для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что $\text{dist}(r_\gamma, \text{Id}_{\mathcal{U}_\gamma}) < \varepsilon$, как скоро $\mathcal{U}_\gamma$ содержится в δ -окрестности (относительно метрики Хаусдорфа) $N(\theta(a); \delta)$ орбиты $\theta(a)$ (или кратко, $\text{dist}(r_\gamma, \text{Id}) \rightarrow 0$, как только $\mathcal{U}_{\gamma_i} \rightarrow \theta(a) \subset A$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \in L_{\mathcal{G}}(n)$, $t \in (0, 1]$ и $R = \{g \cdot Q, t \mid g \in O(n)\} \subset Z$ есть орбита Q . По теореме Пале о срезе [20] существует $O(n)$ -ретракция $r'_R: \mathcal{V}_R \rightarrow R$, $r'_R|_R = \text{Id}$, где $\mathcal{V}_R \subset Z$ есть инвариантная окрестность R . Здесь мы можем предполагать, что

- (7) $\{\mathcal{V}_R\}$ есть $O(n)$ -примыкающее покрытие к A и
- (8) $\text{dist}(r'_{R_i}, \text{Id}) \rightarrow 0$, как только $\mathcal{V}_{R_i} \rightarrow \theta(a) \subset A$.

В силу предложения 3.5 для любой орбиты $R = (O(n) \cdot Q) \times \{t\}$ мы можем найти орбиту $R' = (O(n) \cdot Q') \times \{t\}$ такую, что

- (9) тело Q' не является эллиптически выпуклым и
- (10) существует такой $O(n)$ -гомеоморфизм $s_R: R \rightarrow R'$, что $\text{dist}(s_{R_i}, \text{Id}) \rightarrow 0$, как только $\mathcal{V}_{R_i} \rightarrow \theta(a) \subset A$.

Покрывание $\{\mathcal{V}_R\}$ и семейство композиций $r_R = s_R \circ r'_R: \mathcal{V}_R \rightarrow R'$ являются искомыми объектами ω и Ω .

Теперь мы завершаем доказательство теоремы 3.3. Пусть $\{\lambda_\gamma: Z \rightarrow [0, 1]\}$ есть эквивариантное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\mathcal{U}_\gamma\}$. Пусть $\mathfrak{R}$ есть ретракция из предложения 2.3. Мы определяем искомое $O(n)$ -отображение F следующим образом:

$$F(V, t) = \begin{cases} \mathfrak{R} \circ \left(\sum_\gamma \lambda_\gamma(V, t) \cdot r_\gamma(V, t) \right), & \text{где } (V, t) \in Z, \\ F(V, t) = V, & \text{где } (V, t) \in A. \end{cases}$$

По лемме 3.3 конечная сумма $\sum_\gamma \lambda_\gamma(V, t) \cdot r_\gamma(V, t)$, $(V, t) \in Z$, не является эллиптически выпуклым телом. Так как в силу предложения 2.3 $\mathfrak{R}(W)$ и W являются аффинно эквивалентными, то $F(V, t)$, $(V, t) \in Z$, также не является эллиптически выпуклым. Непрерывность F в точке $(V, t) \in A$ следует из (8).

²Мы говорим, что семейство $\{B_\gamma\}$ G -подмножеств X , лежащих в $X \setminus A$, является G -примыкающим к G -множеству A , если для любой $x \in A$ и для любой окрестности $\theta(x) \subset X$, существует окрестность $\theta_1(x) \subset X$ такая, что $B_\gamma \subset G \cdot \theta(x)$, как скоро $B_\gamma \cap G \cdot \theta_1(x) \neq \emptyset$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] West J. On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds // *Fund. Math.* 1980. V. 106. P. 31–40.
- [2] Агеев С. М., Богатый С. А., Фабел П. Компакт Банаха–Мазура $Q(n)$ есть AR // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1998. № 1. С. 11–13.
- [3] Ageev S., Bogatyı S. The Banach–Mazur compactum in the dimension two // *Topology Atlas. Preprint.* 1997. V. 291.
- [4] Агеев С. М., Богатый С. А. О негомеоморфности компакта Банаха–Мазура и гильбертова куба // *УМН.* 1998. Т. 53. № 1. С. 209–210.
- [5] Repovš D. Geometric topology of the Banach–Mazur compacta // *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku.* 1999. V. 1074. P. 89–101.
- [6] Toruńczyk H., West J. The fine structure of $\exp S^1/S^1$; a Q -manifold hyperspace localization of the integers // *Proc. of the International Conference on Geometric Topology.* Warsaw.: PWN, 1980. P. 439–449.
- [7] Antonyan S. The topology of the Banach–Mazur compactum // *Fund. Math.* 2000. V. 166. P. 209–232; Antonyan S. Universal proper G -spaces // *Topology Appl.* 2002. V. 117. P. 23–43.
- [8] Antonyan S. The topology of the Banach–Mazur compactum // *Preprint № 558: Instituto de Matematicas de la UNAM,* 1997.
- [9] Ageev S. M., Repovš D. On Banach–Mazur compacta // *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.* 2000. V. 69. P. 316–335.
- [10] Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
- [11] John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions // *Studies and Essays. Courant Anniversary Volume.* New York: Interscience, 1948. P. 187–204.
- [12] Toruńczyk H. On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q -manifolds // *Fund. Math.* 1980. V. 106. P. 31–40.
- [13] van Mill J. *Infinite Dimension Topology. Prerequisites and Introduction.* New York: North Holland, 1989.
- [14] Abels H. Universal proper G -spaces // *Math. Z.* 1978. V. 159. P. 143–158.
- [15] Lang S. *Linear Algebra.* New York: Addison-Wesley Publ. Co., 1971.
- [16] Burago D., Burago Yu., Ivanov S. *A Course in Metric Geometry.* Graduate Stud. in Math. V. 33. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001; Hu S. T. *Theory of Retracts:* Wayne State Univ. Press, 1965.
- [17] Агеев С. М., Реповш Д. О методе Яворовского в проблеме сохранения экстензорных свойств орбитным функтором // *Матем. заметки.* 2002. Т. 71. № 3. С. 470–472.
- [18] Bessaga C., Pelczynski A. *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology.* Warsaw.: PWN, 1975.
- [19] Борсук К. *Теория ретрактов.* М.: Мир, 1971.
- [20] Palais R. S. On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups // *Ann. of Math.* 1961. V. 73. № 2. P. 295–323.

(С. М. Агеев) Брестский государственный

университет им. А. С. Пушкина, Беларусь

(С. А. Богатый) Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

(Д. Реповш) Люблянский университет, Словения

E-mail: ageev@highmath.brsu.brest.by,

bogatyı@mech.math.msu.su, dusan.repovs@fmf.uni-lj.si

Поступило

25.10.2002

Исправленный вариант

20.11.2003