Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Николов, Непрерывность и граничное поведение метрики Каратеодори, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 230–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm831>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 10:08:53

УДК 517

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ МЕТРИКИ КАРАТЕОДОРИ

Н. Николов

Основной целью этой статьи является изучение граничного поведения метрик Каратеодори высшего порядка, сингулярной метрики Каратеодори и метрики Азукава вблизи h -растяжимой граничной точки ограниченной гладкой псевдовыпуклой области в $\mathbb{C}^n$.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В этой статье изучаются непрерывность и граничное поведение метрик Каратеодори высшего порядка, сингулярной метрики Каратеодори и метрики Азукава областей в $\mathbb{C}^n$.

Известно, что метрики Каратеодори высшего порядка всегда полунепрерывны сверху, но не обязаны быть непрерывны (за исключением стандартной) [1]. М. Ярнишки и П. Пфлуг [1] доказали, что в ограниченных областях эти метрики непрерывны. В настоящей статье этот результат обобщается (теорема 1) и доказывается непрерывность метрик Каратеодори высшего порядка произвольной области в $\mathbb{C}^n$ в точках, где стандартная метрика Каратеодори положительна.

В теоремах 2 и 3 устанавливаются стабильность и непрерывность сингулярной метрики Каратеодори строго гипервыпуклых областей [2] и модельных областей [3] соответственно. Из этих теорем и результата Ст. Нивоша [2] следует, что сингулярная метрика Каратеодори и метрика Азукава в таких областях совпадают (следствия 2 и 3). Отметим, что непрерывность метрики Азукава для одного класса областей, включающего гипервыпуклые области, была доказана недавно Вл. Звонеком [4].

При помощи теорем 1 и 3 выводятся (теорема 4) точные некасательные пределы метрик Каратеодори высшего порядка, сингулярной метрики Каратеодори и метрики Азукава в h -растяжимой граничной точке гладкой ограниченной псевдовыпуклой области в $\mathbb{C}^n$. Случай стандартной метрики Каратеодори рассмотрен автором в [5].

2. Определения и формулировки результатов. Пусть D – область в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $\text{Hol}(D, \Delta)$ пространство всех голоморфных отображений из D в единичный круг Δ в $\mathbb{C}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим k -ю метрику Каратеодори следующим образом (см. [1]):

$$C_D^{(k)}(z, X) = \sup\{|f_{(k)}(z)X| : f \in \text{Hol}(D, \Delta), \text{ord}_z f \geq k\},$$

где $f_{(k)}(z)X = \sum_{|\alpha|=k} (1/\alpha!) D^\alpha f(z) X^\alpha$, а $\text{ord}_z f$ означает порядок нуля f в z . Отметим, что $C_D^{(1)}(z, X)$ – стандартная метрика Каратеодори. Легко видеть также, что

$$(C_D^{(k)}(z, X))^k (C_D^{(l)}(z, X))^l \leq (C_D^{(k+l)}(z, X))^{k+l} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что существует следующий предел:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_D^{(k)}(z, X) =: C_D^\infty(z, X).$$

Он называется *сингулярной метрикой Каратеодори*.

Функция Грина и *метрика Азукава* определяются соответственно как

$$\begin{aligned} g_D(z, w) &= \sup \{ u(w) : u - \text{отрицательная плюрисубгармоническая} \\ &\quad \text{функция в } D \text{ и } u(v) \leq \log \|v - z\| + O_u(1) \}, \\ A_D(z, X) &= \limsup_{\lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0} \frac{\exp g(z, z + \lambda X)}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Отметим, что эти две функции полунепрерывны сверху по обоим переменным [6]. Кроме того, имеют место следующие неравенства:

$$C_D^{(k)}(z, X) \leq C_D^\infty(z, X) \leq A_D(z, X).$$

Область D называется *строго гипервыпуклой*, если существуют другая область $D' \ni D$ и плюрисубгармоническая функция φ в D' такие, что $\lim_{z \rightarrow \partial D} \varphi(z) = 0$ и $D = \{z \in D' : \varphi(z) < 0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D – область в $\mathbb{C}^n$, а точка $z_0 \in D$ такова, что $C_D^{(1)}(z_0, X) > 0 \forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C > 0$ и окрестность $U \subset D$ точки z_0 такие, что

$$|C_D^{(k)}(z, X) - C_D^{(k)}(w, Y)| \leq C(\|X - Y\| + (\|X\| + \|Y\|)\|z - w\|)$$

$$\forall z, w \in U, \forall X, Y \in \mathbb{C}^n.$$

Отметим, что для произвольной области D функция $C_D^{(k)}(z, \cdot)$ непрерывна и логарифм-плюрисубгармонична, но функция $C_D^{(k)}(\cdot, X)$ не обязана быть непрерывной ($k \geq 2$).

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. При условиях теоремы 1 сингулярная метрика Каратеодори $C_D^\infty(z, X)$ полунепрерывна снизу в $U \times \mathbb{C}^n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть D – строго гипервыпуклая область в $\mathbb{C}^n$, а $\{D_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность областей такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h(\partial D_j, \partial D) = 0,$$

где h обозначает расстояние Хаусдорфа. Если $D_j \times \mathbb{C}^n \ni (z_j, X_j) \rightarrow (z, X) \in D \times \mathbb{C}^n$, то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} C_{D_j}^\infty(z_j, X_j) = C_D^\infty(z, X).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Сингулярная метрика Каратеодори строго гипервыпуклой области в $\mathbb{C}^n$ непрерывна и совпадает с метрикой Азукава.*

Кроме того, при условиях теоремы 2 имеем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} A_{D_j}(z_j, X_j) = A_D(z, X).$$

Перед тем как изложить следующие результаты, напомним понятие h -растяжимой точки [3] (или полурегулярной точки в терминологии [7]). Пусть D – область в $\mathbb{C}^n$ и $p \in \partial D$ – гладкая псевдовыпуклая граничная точка конечного типа с мультиипом Катлина $M = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ и q -типом Л'Анжелло Δ_q . Тогда p называется h -растяжимой точкой, если $\Delta_q = m_{n+1-q}$ для $1 \leq q \leq n$.

Согласно [3] существует такая локальная система голоморфных координат $z = (z_1, z')$, что в них $p = 0$ и вблизи $p = 0$ область D может быть задана с помощью определяющей функции r вида

$$r(z) = \operatorname{Re} z_1 + P(z') - R_1(z) + R_2(z).$$

Здесь P – плюрисубгармонический полином, не имеющий гармонических составляющих и такой, что

$$\begin{aligned} P(t^{1/m_2} z_2, \dots, t^{1/m_n} z_n) &= tP(z') \quad \forall t > 0, \quad z' \in \mathbb{C}^{n-1}; \\ 0 \leq R_1(z) &\leq C(\operatorname{Im} z_1)^2, \quad |R_2(z)| \leq C((\sigma(z'))^{1+\gamma} \end{aligned}$$

для $\sigma(z') = \sum_{j=2}^n |z_j|^{m_j}$ и каких-то положительных постоянных C и γ .

Для каждого $\varepsilon \in \mathbb{R}$ положим

$$E_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z') + \varepsilon \sigma(z') < 0\}.$$

Неограниченная область $E := E_0$ называется *моделью* для D в p . Отметим, что граничная точка $p \in \partial D$ является h -растяжимой тогда, когда соответствующая модель E – область конечного типа (т.е. все ее граничные точки конечного типа) [3], [7].

Положим $S_R = \{z \in \mathbb{C}^n : \sigma(z) := |z_1| + \sigma(z') < R\}$ для $R > 0$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть E – модельная область конечного типа, а $R(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ – такая функция, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\varepsilon) = +\infty$. Пусть $F_\varepsilon = E_\varepsilon \cap S_{R(\varepsilon)}$, $(z_\varepsilon, X_\varepsilon) \in F_\varepsilon \times \mathbb{C}^n$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (z_\varepsilon, X_\varepsilon) = (z, X) \in E \times \mathbb{C}^n$. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_{F_\varepsilon}^\infty(z_\varepsilon, X_\varepsilon) = C_E^\infty(z, X).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Сингулярная метрика Каратеодори модельной области конечного типа непрерывна и совпадает с ее метрикой Азукава.*

Кроме того, при условиях теоремы 3 имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_{F_\varepsilon}(z_\varepsilon, X_\varepsilon) = A_E(z, X).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть D – гладкая ограниченная псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$, а E – модельная область D в h -растяжимой граничной точке $p \in \partial D$. Пусть S обозначает любую метрику Каратеодори высшего порядка, или сингулярную метрику Каратеодори, или метрику Азукава. Если $X = (1, 0)$ векторное поле, а Λ – некасательный конус в D с вершиной в p , то

$$\lim_{\Lambda \ni z \rightarrow p} \frac{S_D(z, X_z)}{S_E(e, X(z))} = 1$$

равномерно по X .

Здесь $e = (-1, 0')$ и

$$X(z) = ((-r(z))^{-1}(X_z)_1, (-r(z))^{-1/m_2}(X_z)_2, \dots, (-r(z))^{-1/m_n}(X_z)_n),$$

где $(X_z)_j$ есть j -я компонента X_z в определенных выше локальных координатах.

Предел, указанный в теореме 4, имеет смысл потому, что модельная область E – гиперболическая по отношению к стандартной метрике Каратеодори [5] (т.е. $C_E^{(1)}(z, X) > 0 \forall z \in E, X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$).

3. Доказательство результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку $C_D^{(1)}(z, X)$ – непрерывная функция, гомотетичная по второй переменной, из условия теоремы следует, что существуют постоянная $C_1 > 0$ и окрестность $U \Subset D$ точки z_0 такие, что $C_D^{(1)}(z, X) \geq C_1 \|X\| \forall z \in U, \forall X \in \mathbb{C}^n$. Тогда $\forall z, w \in U, \forall X, Y \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\begin{aligned} & |C_D^{(k)}(z, X) - C_D^{(k)}(w, Y)| \\ & \leq |(C_D^{(k)}(z, X))^k - (C_D^{(k)}(w, Y))^k| (C_1 \max(\|X\|, \|Y\|))^{1-k}. \end{aligned} \quad (1)$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно оценить в отдельности

$$|(C_D^{(k)}(w, X))^k - (C_D^{(k)}(w, Y))^k| \quad \text{и} \quad |(C_D^{(k)}(w, X))^k - (C_D^{(k)}(z, X))^k|.$$

Предположим, что $C_D^{(k)}(w, X) \geq C_D^{(k)}(w, Y)$. При помощи теоремы Монтеля можно найти экстремальную функцию f для $C_D^{(k)}(w, X)$. Тогда в силу неравенства Коши имеем

$$\begin{aligned} 0 & \leq (C_D^{(k)}(w, X))^k - (C_D^{(k)}(w, Y))^k \leq |f_k(w)X| - |f_k(w)Y| \\ & \leq \text{dist}^{-k}(U, \partial D) C_2 \|X - Y\| (\|X\| + \|Y\|)^{k-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $C_2 > 0$ – постоянная, зависящая только от n и k .

Теперь оценим $|(C_D^{(k)}(z, X))^k - (C_D^{(k)}(w, X))^k|$.

Обозначим через $CV_D(z)$ объем Каратеодори–Эйзенмана D в точке $z \in D$, т.е. $CV_D(z) = \sup \det |JF(z)|$, где супремум берется по всем голоморфным отображениям F из D в единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$, $F(z) = 0$, а $JF = (\partial F_k / \partial z_l)_{k,l}$ есть комплексная матрица Якоби F . Как упомянуто в [8], $CV_D(z) > 0$, если только $C_D^{(1)}(z, X) > 0$

$\forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Поскольку $CV_D(z)$ – непрерывная функция, имеем $CV_D(z) \geq C_3 > 0$ $\forall z \in U$.

Пусть $z \in U$ и F – экстремальное отображение для $CV(z)$. Для каждого $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq n$, положим

$$(\lambda_{l,1}, \dots, \lambda_{l,n}) = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{l\text{-th place}} (JF(z))^{-1} \quad \text{и} \quad g_{z,l} = \sum_{j=1}^n \lambda_{l,j} F_j.$$

Функция $g_{z,l}$ обладает следующими свойствами:

$$g_{z,l}(z) = 0, \quad \frac{\partial g_{z,l}}{\partial z_l}(z) = 1, \quad \frac{\partial g_{z,l}}{\partial z_j}(z) = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad j \neq l.$$

Кроме того, так как $|\det JF(z)| \geq C_3 > 0$ и компоненты $JF(z)$ равномерно ограничены в U (в силу неравенств Коши), имеем $\sup_D |g_{z,l}| \leq C_4 \quad \forall z \in U, 1 \leq l \leq n$.

Пусть теперь $z, w \in U$, $X \in \mathbb{C}^n$, $C_D^{(k)}(w, X) \geq C_D^{(k)}(z, X)$, а f – экстремальная функция для $C_D^{(k)}(w, X)$. Для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ положим

$$h_{z,\alpha} = \frac{1}{\alpha!} \sum_{l=1}^n (f_{z,l})^{\alpha_l}.$$

Определим следующую последовательность голоморфных функций в D :

$$f_0 = f, \quad f_{j+1} = f_j - \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} h_{z,\alpha} D^\alpha f_j(z).$$

Поскольку $D^\alpha h_{z,\alpha}(z) = 1$ и $D^\beta h_{z,\alpha}(z) = 0 \quad \forall \beta \neq \alpha, |\beta| \leq \alpha$, по индукции следует, что $\text{ord}_z f_j \geq j$. С другой стороны, $|D^\alpha f(z) - D^\alpha f(w)| \leq C_5 \|z - w\| \quad \forall z, w \in U$ ввиду теоремы о среднем и неравенства Коши. Имеем также $D^\alpha f(w) = 0$ и $|h_{z,\alpha}| \leq C_6 \quad \forall |\alpha| < k, \forall z \in U$. Тогда, снова используя теорему о среднем, неравенства Коши и индуктивные аргументы, $\forall z, w \in U, \forall j \leq k$ получаем $|D^\alpha f_j(z)| \leq C_7 \|z - w\| \quad \forall |\alpha| < k$, $|D^\alpha f_j(z) - D^\alpha f(w)| \leq C_7 \|z - w\| \quad \forall |\alpha| = k$ и $\sup_D |f_j| \leq 1 + C_7 \|z - w\|$. Из этого и из определения $C_D^{(k)}(w, X)$ следует, что

$$(1 + C_6 \|z - w\|) (C_D^{(k)}(z, X))^k \geq |(f_{(k)}(z)X)| \geq |f_{(k)}(w)X| - C_7 \|X\|^k \|z - w\|.$$

Ввиду того, что $C_D^{(k)}(z, X) \leq \|X\| \text{dist}^{-1}(z, \partial D)$, а f – экстремальная для $C_D^{(k)}(w, X)$, заключаем, что

$$0 \leq (C_D^{(k)}(w, X))^k - (C_D^{(k)}(z, X))^k \leq C_8 \|X\|^k \|z - w\|. \quad (3)$$

Неравенства (1), (2) и (3) завершают доказательство теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пользуясь неособым линейным отображением (если это необходимо), можно предположить, что компоненты вектора X не равны 0, а значит, и компоненты векторов $X_j \rightarrow X$ тоже не равны 0. Рассмотрим линейные отображения $\Psi_j(w) = \frac{(w - z_j)X}{X_j} + z$ и положим $G_j = \Psi_j(D_j)$. Имеем

$$C_{D_j}^\infty(z_j, X_j) = C_{G_j}^\infty(z, X). \quad (4)$$

Поскольку D — строго гипервыпуклая область, существуют другая область $D' \ni D$ и плюрисубгармоническая функция φ в D' такие, что $\lim_{z \rightarrow \partial D} \varphi(z) = 0$ и $D = \{z \in D' : \varphi(z) < 0\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что открытое множество $\{w \in D' : \varphi(w) < -\varepsilon\}$ содержит точку z . Обозначим через D_ε связную компоненту этого множества, содержащую z . Пусть $R > 0$ такова, что шар $B(0, R) \ni D$, а $D_{-\varepsilon}$ — связная компонента открытого множества $B(z, R) \cap \{w \in D' : \varphi(w) < \varepsilon\}$, содержащая D . Поскольку $D_\varepsilon \Subset D \Subset D_{-\varepsilon} \forall j \gg 1$, найдутся области G_ε и $G_{-\varepsilon}$ такие, что $D_\varepsilon \Subset G_\varepsilon \subset G_j \subset G_{-\varepsilon} \Subset D_{-\varepsilon}$ и $G_\varepsilon \subset D \subset G_{-\varepsilon}$. Из этого следует, что

$$C_{G_{-\varepsilon}}^\infty(z, X) \leq C_{G_j}^\infty(z, X) \leq C_{G_\varepsilon}^\infty(z, X), \quad (5)$$

$$C_{G_{-\varepsilon}}^\infty(z, X) \leq C_D^\infty(z, X) \leq C_{G_\varepsilon}^\infty(z, X). \quad (6)$$

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C_{G_\varepsilon}^\infty(z, X) - C_{G_{-\varepsilon}}^\infty(z, X)) = 0, \quad (7)$$

что вместе с (4), (5) и (6) завершит доказательство теоремы 2.

Обозначим через $g_{-\varepsilon}$ функцию Грина $D_{-\varepsilon}$. Пусть $\chi \in C^\infty$ -гладкая функция такая, что $\chi \equiv 1$ в D_ε и $\text{supp } \chi \subset G_\varepsilon$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и f_m — экстремальная функция для $C_{G_\varepsilon}^{(m)}(z, X)$. Поскольку $g_{-\varepsilon}(z, \cdot)$ — плюрисубгармоническая функция и $g_{-\varepsilon}(z, w) > -\infty$, $z \neq w$ (ибо $D_{-\varepsilon}$ ограничена), можно решить $\bar{\partial}$ -проблему $\bar{\partial}h_m = \bar{\partial}(\chi f_m)$ в ограниченной псевдовыпуклой области $D_{-\varepsilon}$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) с L^2 оценкой [9]

$$\begin{aligned} \int_{D_{-\varepsilon}} |h_m|^2 \frac{\exp(-2(m+n)g_{-\varepsilon}(z, w))}{(1 + \|w\|^2)^2} dV(w) \\ \leq 2 \int_{D_{-\varepsilon}} |\bar{\partial}(\chi f_m)|^2 \exp(-2(m+n)g_{-\varepsilon}(z, w)) dV(w). \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что $t_m = \chi f_m - h_m$ — голоморфная функция в $D_{-\varepsilon}$. Из сходимости первого интеграла и из неравенства

$$g_{-\varepsilon}(z, w) \leq \log \frac{\|w - z\|}{\text{dist}(z, \partial D_{-\varepsilon})}$$

[1] следует, что $\text{ord}_z h_m \geq m + 1$. Тогда, пользуясь тем, что $\chi \equiv 1$ в $D_\varepsilon \ni z$, получаем

$$(t_m)_{(m)}(z)X = (f_m)_{(m)}(z)X. \quad (9)$$

Теперь оценим $\sup_{G_{-\varepsilon}} |t_m|$. Из неравенства о среднем следует, что

$$\begin{aligned} \text{Vol } B(O, 1) (\text{dist}(G_{-\varepsilon}, \partial D_{-\varepsilon}))^{2n} \sup_{G_{-\varepsilon}} |t_m|^2 &\leq \int_{D_{-\varepsilon}} |t_m|^2 \\ &\leq 2 \int_{D_{-\varepsilon}} (|\chi f_m|^2 + |h_m|^2) \leq 2 \left(\text{Vol } G_\varepsilon + \int_{D_{-\varepsilon}} |h_m|^2 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку $g_{-\varepsilon}$ отрицательна в $D_{-\varepsilon}$, из (8) получаем, что

$$\int_{D_{-\varepsilon}} |h_m|^2 \leq 2(1 + R^2)^2 \max_{w \in \text{supp } \bar{\partial}\chi} \exp(-2(m+n)g_{-\varepsilon}(z, w)) \int |\bar{\partial}\chi|^2. \quad (11)$$

С другой стороны, так как $D_{-\varepsilon} \subset B(0, R)$, имеем, что (см. [6])

$$g_{-\varepsilon}(z, w) \geq C \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(k(\varphi(w) - \varepsilon) + \frac{\|w\|^2 - R^2}{k} \right)$$

для w вне окрестности U точки z , где постоянная C зависит только от диаметра U и R . Поскольку $\text{supp } \bar{\partial}\chi \subset G_\varepsilon \setminus D_\varepsilon \subset D_{-\varepsilon} \setminus D_\varepsilon$, имеем

$$\max_{w \in \text{supp } \bar{\partial}\chi} \exp(-2(m+n)g_{-\varepsilon}(z, w)) \leq b(\varepsilon, m),$$

где $b(\varepsilon, m) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \exp \left(2C(m+n) \left(2k\varepsilon + \frac{R^2}{k} \right) \right)$. Вместе с (10) и (11) это показывает, что

$$\sup_{G_{-\varepsilon}} |t_m| \leq C_\varepsilon (1 + b(\varepsilon, m)) \quad (12)$$

для какой-то постоянной C_ε , не зависящей от $m \in \mathbb{N}$.

Поскольку f_m – экстремальная функция для $C_{G_\varepsilon}^{(m)}(z, X)$, можно заключить ввиду определения $C_{G_{-\varepsilon}}^{(m)}(z, X)$, (9) и (12), что

$$C_{G_{-\varepsilon}}^m(z, X) \geq C_{G_\varepsilon}^m(z, X) (C_\varepsilon (1 + b(\varepsilon, m)))^{\frac{1}{m}}.$$

Переходя последовательно к пределам при $m \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0+$, $k \rightarrow \infty$ и используя (6), получаем (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. В силу результата Нивоша [2] для каждой точки $z \in D$ имеем $C_D^\infty(z, X) = A_D(z, X)$ для почти всех $X \in \mathbb{C}^n$. С другой стороны, $A_D(z, \cdot)$ – логарифм-плюрисубгармоническая функция [10]. Непрерывная функция $C_D^\infty(z, \cdot)$ также логарифм-плюрисубгармонична в качестве супремума таких функций $\{C_D^k(z, \cdot)\}_{k=1}^\infty$. Известно, что если две плюрисубгармонические функции совпадают почти всюду, то они совпадают всюду. Поэтому $C_D^\infty(z, X) = A_D(z, X)$ в $D \times \mathbb{C}^n$.

Из этого и из неравенства $A_D(z_j, X_j) \geq C_{D_j}^\infty(z_j, X_j)$ следует, что

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} A_D(z_j, X_j) \geq A_D(z, X). \quad (13)$$

Пусть последовательность областей $\{G_j\}_{j=1}^\infty$ такова, что $G_j \subset G_{j+1} \cap D_j$ и $\bigcup_{j=1}^\infty G_j = D$. Поскольку метрика Азукава полунепрерывна сверху [6], имеем

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} A_{D_j}(z_j, X_j) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} A_{G_l}(z_j, X_j) \leq A_{G_l}(z, X) \quad (14)$$

$\forall l \in \mathbb{N}$. С другой стороны, $\lim_{l \rightarrow \infty} A_{G_l}(z, X) = A_D(z, X)$ [10], что вместе с (13) и (14) дает $\lim_{j \rightarrow \infty} A_D(z_j, X_j) = A_D(z, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

В силу результатов [3], [7] модель E – область конечного типа, если только существует гладкая положительная функция a в $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$ такая, что

$$a(t^{1/m_2} z_2, \dots, t^{1/m_n} z_n) = ta(z') \quad \forall t > 0, \quad z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0'\},$$

и $P - 2a$ – строго плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0'\}$. Можно считать, что $a(0') = 0$. Для $\forall \varepsilon \in (0, 1]$ положим

$$G_{-\varepsilon} = \{z \in \mathbb{C}^n : r_{-\varepsilon}(z) := \operatorname{Re} z_1 + P(z') - \varepsilon(1 + a(z')) < 0\}. \quad (15)$$

Поскольку $F_\varepsilon = E_\varepsilon \cap S_{R(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \geq 0$) – строго гипервыпуклая область, достаточно доказать, в силу теоремы 2, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (C_{G_{-\varepsilon/2}}^\infty(z, X) - C_{F_\varepsilon}^\infty(z, X)) = 0 \quad (16)$$

равномерно на компактных подмножествах $E \times \mathbb{C}^n$.

Обозначим через $g_{-\varepsilon}$ функцию Грина $G_{-\varepsilon}$. Поскольку алгебра ограниченных голоморфных функций в $G_{-\varepsilon}$ разделяет точки $G_{-\varepsilon}$ [3], имеем

$$g_{-\varepsilon}(z, w) > -\infty, \quad z \neq w. \quad (17)$$

С другой стороны, $C_{G_{-1}}^{(1)}(z, X) > 0 \quad \forall z \in G_{-1}, X \in \mathbb{C}^n$ [5]. Из этого следует, что если f – экстремальная функция для $C_{G_{-1}}^{(1)}(z, X)$, то форма Леви $|f|^2$ положительна вблизи (z, X) . Теперь, пользуясь стандартными аргументами, для каждого компактного подмножества $K \subset G_{-1}$ можно построить гладкую ограниченную плюрисубгармоническую функцию в G_{-1} , которая строго плюрисубгармонична в K .

Пусть K – компактное подмножество E и $H_\varepsilon = E_{2\varepsilon} \cap S_{R(\varepsilon)/2}$. Для $0 < \varepsilon \ll 1$ имеем $K \Subset H_\varepsilon \Subset F_\varepsilon \Subset G_{-\varepsilon/2} \Subset G_{-\varepsilon}$. Пусть χ – гладкая функция такая, что $\chi \equiv 1$ в H_ε и $\operatorname{supp} \chi \subset F_\varepsilon$. Пусть $(z, X) \in K \times \mathbb{C}^n$, $m \in \mathbb{N}$, а f_m – экстремальная функция для $C_{F_\varepsilon}^{(m)}(z, X)$. Как мы уже установили, существует гладкая плюрисубгармоническая функция s в G_{-1} , $-1 \leq s \leq 0$, которая строго плюрисубгармонична в $\operatorname{supp} \chi$. Обозначим через c наименьшее из собственных значений формы Леви s в $\operatorname{supp} \chi$. Ввиду (17) можно решить $\bar{\partial}$ -задачу $\bar{\partial} h_m = \bar{\partial}(\chi f_m)$ в псевдовыпуклой области $G_{-\varepsilon}$ с L^2 -оценкой [9]:

$$\begin{aligned} & \int_{G_{-\varepsilon}} |h_m|^2 \exp(-2(m+n)g_{-\varepsilon}(z, w) - s) dV(w) \\ & \leq c^{-1} \int_{G_{-\varepsilon}} |\bar{\partial}(\chi f_m)|^2 \exp(-2(m+n)g_{-\varepsilon}(z, w) - s) dV(w). \end{aligned}$$

Тогда $t_m = \chi f_m - h_m$ – голоморфная функция в $G_{-\varepsilon}$. Нетрудно видеть, что $|P(z' + \delta) - P(z')| \leq C|\delta|(1 + \sigma(z')) \quad \forall \delta, |\delta| \leq 1$, из чего следует, что $\operatorname{dist}(G_{-\varepsilon/2}, \partial G_{-\varepsilon}) > 0$.

Как и в доказательстве теоремы 2, получаем

$$(t_m)_{(m)}(z)X = (f_m)_{(m)}(z)X, \\ \sup_{G_{-\varepsilon/2}} |t_m| \leq C_\varepsilon \left(1 + \sup_{w \in F_\varepsilon \setminus H_\varepsilon} \exp(-2(m+n)g_{-\varepsilon}(z, w)) \right).$$

Итак, чтобы получить (16), достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \inf_{w \in F_\varepsilon \setminus H_\varepsilon} (\exp g_{-\varepsilon}(z, w))^{-2(m+n)} = 0 \quad (18)$$

равномерно по $z \in K$.

Поскольку существует плюрисубгармоническая функция q в $G_{-1} \supset G_{-\varepsilon}$, $-1 \leq q \leq 0$, которая строго плюрисубгармонична в K , имеем [1]

$$g_{-\varepsilon}(z, w) \geq C \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(kr_{-\varepsilon}(w) + \frac{q(w)}{k} \right) \\ \forall z \in K \subset E, \quad w \in G_{-\varepsilon} \setminus H_\varepsilon \supset F_\varepsilon \setminus H_\varepsilon \ni K.$$

В силу определений E (см. раздел 2) и $G_{-\varepsilon}$ (см. (15)) получаем

$$g_{-\varepsilon}(z, w) \geq -C \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(k\varepsilon(1 + a(w')) + \frac{1}{k} \right) \quad \forall z \in K, \quad w \in F_\varepsilon \setminus H_\varepsilon. \quad (19)$$

Пусть g обозначает функцию Грина области $G = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z') - a(z') < 0\}$. Поскольку $g_{-\varepsilon}(z, w) \geq g(z - 1, w)$, равенство (18) будет следствием (19), если

$$\lim_{w \in G; w \rightarrow \infty} g(z, w) = 0 \quad (20)$$

равномерно выполнено по $z \in G \cap S(R)$ для произвольного числа $R > 0$.

Чтобы доказать (20), воспользуемся тем, что существует функция пика G в граничной точке 0 [3], т.е. голоморфная функция p в G , непрерывная в $\overline{G}$ и такая, что $p(0) = 1$ и $|p(\zeta)| < 1$ в $\overline{G} \setminus \{0\}$. Положим $\pi_t(\zeta) = (t^{-1}\zeta_1, t^{-1/m_2}\zeta_2, \dots, t^{-1/m_n}\zeta_n)$, $t > 0$, $v_w(\zeta) = p(\pi_{\sigma(w)}(\zeta))$, $u_w(\zeta) = \log |(v_w(z) - v_w(\zeta)) / (1 - \overline{v}_w(z)v_w(\zeta))|$. Поскольку π_t – автоморфизм G , а p – функция пика G в 0, то $u_w(\zeta)$ – отрицательная плюрисубгармоническая функция в G с особенностью типа $\log |\zeta - z|$ в точке z . В силу определения S_R (см. раздел 2) мы получаем, что $\lim_{w \in G; w \rightarrow \infty} u(z, w) = 0$ равномерно по $z \in G \cap S(R)$. Из этого следует (20), чем завершается доказательство теоремы 3.

Следствие 3 следует из теоремы 3, следствия 2 и того факта, что области $E \cap S_R$ строго гипервышуклые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Случай стандартной метрики Каратеодори доказан в [5].

Поскольку модельная область E – гиперболическая по отношению к стандартной метрике Каратеодори [5], из теоремы 1 следует, что метрики Каратеодори высшего порядка непрерывны в $E \times \mathbb{C}^n$. Тогда те же самые аргументы, что и в [5], дают теорему 4 для любой из этих метрик.

Из этого следует, что

$$\liminf_{\Lambda \ni z \rightarrow p} \frac{C_D^\infty(z, X_z)}{C_E^\infty(e, X(z))} \geq 1.$$

Предположим противное. Тогда найдутся векторное поле X и последовательность точек $\Lambda \ni \{z_j\}_{j=1}^\infty \rightarrow p$ такие, что $\lim_{\Lambda \ni z_j \rightarrow p} (X(z_j)/\|X(z_j)\|) = Y$ и

$$\liminf_{\Lambda \ni z_j \rightarrow p} \frac{C_D^\infty(z_j, X_{z_j})}{C_E^\infty(e, X(z_j))} < 1.$$

Поскольку C_E^∞ – непрерывная функция (следствие 3), можно заключить, что

$$\liminf_{\Lambda \ni z_j \rightarrow p} \frac{C_D^\infty(z_j, X_{z_j})}{\|X(z_j)\|} < C_E^\infty(e, Y).$$

Следовательно,

$$\liminf_{\Lambda \ni z_j \rightarrow p} \frac{C_D^{(k)}(z_j, X_{z_j})}{\|X(z_j)\|} < C_E^{(k)}(e, Y)$$

$\forall k \gg 1$, а это противоречие.

Поскольку $C_D^\infty \leq A_D$ и $C_E^\infty \equiv A_E$ (следствие 3), чтобы завершить доказательство теоремы 4, достаточно доказать неравенство

$$\limsup_{\Lambda \ni z \rightarrow p} \frac{A_D(z, X_z)}{A_E(e, X(z))} \leq 1. \quad (21)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу определения E_ε и S_δ (см. раздел 2) существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $E_\varepsilon \cap S_\delta \subset D$. Поскольку $\pi_{-r(z)}$ – автоморфизм E и $X(z) = \pi_{-r(z)}(X_z)$, имеем

$$A_D(z, X_z) \leq A_{F_{z,\varepsilon}}(e(z), X(z)), \quad (22)$$

где $e(z) = \pi_z(z)$ и $F_{z,\varepsilon} = E_\varepsilon \cap U_{-\delta/r(z)}$. Очевидно, что $\lim_{z \rightarrow p} (-\delta/r(z)) = +\infty$ и $\lim_{\Lambda \ni z \rightarrow p} e(z) = (-1, 0') = e$. Тогда теорема 3 дает

$$\lim_{\Lambda \ni z \rightarrow p} \frac{A_{F_{z,\varepsilon}}(e(z), X(z))}{A_{E_\varepsilon}(e, X(z))} = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{A_{E_\varepsilon}(e(z), X(z))}{A_E(e, X(z))} = 1. \quad (23)$$

Теперь (21) следует из (22) и (23).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jarnicki M., Pflug P. Invariant distances and metrics in complex analysis. Berlin, New York: De Gruyter, 1993.
- [2] Nivoche St. The pluricomplex Green function, capacitative notions, and approximation problems in $\mathbb{C}^n$ // Indiana Univ. Math. J. 1995. V. 44. P. 489–510.
- [3] Yu J. Peak functions on weakly pseudoconvex domains // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43. P. 1271–1295.
- [4] Zwonek W. Regularity Properties of the Azukawa Metric. Preprint.
- [5] Nikolov N. Nontangential weighted limit of the infinitesimal Caratheodory metric in an h -extendible boundary point of a smooth bounded pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^n$ // Acta Math. Hung. 1999. V. 82. P. 311–324.
- [6] Jarnicki M., Pflug P. The pluricomplex Green function // Indiana Univ. Math. J. 1995. V. 44. P. 535–543.
- [7] Diederich K., Herbort G. Pseudoconvex domains of semiregular type // Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry / ed. H. Skoda and J. M. Trepreau. Braunschweig: Aspects of Math. E26. Vieweg, 1994. P. 127–162.
- [8] Полецкий Е. А., Шабат Б. В. Инвариантные метрики // Итоги науки и техники. Современные проблем математики. Фундаментальные направления. Т. 9. М.: ВИНТИ АН СССР, 1986. С. 73–125.
- [9] Hörmander L. L^2 estimates and existence theorems for $\bar{\partial}$ operator // Acta Math. 1965. V. 113. P. 89–152.
- [10] Azukawa K. The invariant pseudo-metric related to negative plurisubharmonic functions // Kodai Math. J. 1987. V. 10. P. 83–92.

Институт математики и информатики Болгарской академии наук,
София, Болгария
E-mail: `nik@math.bas.bg`

Поступило
21.05.1999