Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирациональные автоморфизмы алгебраических многообразий с пучком двойных квадрик, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 241–249

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm832>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:50:25

УДК 512.7

БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ С ПУЧКОМ ДВОЙНЫХ КВАДРИК

А. В. Пухликов

Доказана бирациональная жесткость многомерных алгебраических многообразий с пучком двойных квадрик индекса 1, достаточно закрученным по базе.

Библиография: 7 названий.

Введение

0.1. Рассмотрим Фано-расслоение $\pi: V \rightarrow S$, где V – гладкое проективное многообразие размерности ≥ 4 , удовлетворяющее условию $\text{Pic } V = \mathbb{Z}K_V \oplus \pi^* \text{Pic } S$, S – гладкое проективное многообразие размерности ≥ 1 , и антиканонический дивизор $(-K_V)$ обильен на слоях π . Общий слой F_η (т.е. многообразие V , рассматриваемое над незамкнутым полем $\mathbb{C}(S)$) есть многообразие Фано. Подгруппу $\text{Bir } F_\eta \subset \text{Bir } V$ бирациональных автоморфизмов, сохраняющих слой π , назовем группой *собственных* бирациональных автоморфизмов Фано-расслоения V/S .

Напомним [1]–[4], что V/S называется *бirationально жестким*, если для любого бирационального отображения

$$\chi: V \dashrightarrow V'$$

на унилинейчатое многообразие V' той же размерности выполнено условие монотонности

$$c(D^*, V) \leq c(D', V').$$

Здесь $D' \in \Sigma'$, Σ' – линейная система дивизоров на V' без неподвижных компонент, $D^* \in \Sigma^*$, Σ^* – собственный прообраз Σ' на V относительно композиции

$$\chi^* \circ \chi: V \dashrightarrow V',$$

где $\chi^* \in \text{Bir } F_\eta$ – некоторый (зависящий от Σ') собственный бирациональный автоморфизм V/S , а

$$c(Y, X) = \sup \left\{ \frac{b}{a} \mid b \geq 1, a \geq 1, |aY + bK_X| \neq \emptyset \right\}$$

есть *порог канонического присоединения*. Если для любых V' , χ , Σ' можно взять $\chi^* = \text{id}$, т.е.

$$c(D, V) \leq c(D', V'),$$

то Фано-расслоение V/S называется *бirationально сверхжестким*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранта № 99-01-01132, и Фонда поддержки исследований молодых ученых, грант № 99-15-96013.

0.2. Цель настоящей работы – доказать бирациональную сверхжесткость многомерных алгебраических многообразий с пучком двойных квадрик. Пусть $S = \mathbf{P}^1$, $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ – гладкое многообразие размерности $M + 1 \geq 5$, каждый слой которого есть двойная квадрика индекса 1. Точнее, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sigma} & X \subset \mathbf{P}(\mathcal{E}^*) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}^1 & \longrightarrow & \mathbf{P}^1 \end{array},$$

где σ – двойное накрытие, $\mathbf{P}(\mathcal{E}^*)$ есть локально-тривиальное $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{M+1}$ -расслоение над $\mathbf{P}^1$, слой $X_t = \pi^{-1}(t) \subset \mathbf{P}$ есть M -мерная квадрика и дивизор ветвления σ высекается на X_t гиперповерхностью степени $2(M - 1)$ в $\mathbf{P}$ (подробнее конструкцию пучка двойных квадрик см. в п. 1). Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть V – общее многообразие, удовлетворяющее K^2 -условию: численный класс $NK_V^2 - f$ не является эффективным ни для каких $N \in \mathbf{Z}$, f – класс эффективного дивизора в слое пучка π . Тогда Фано-расслоение $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ является бирационально сверхжестким.

Для Фано-расслоения $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$, удовлетворяющего K^2 -условию, сверхжесткость влечет ряд стандартных свойств:

- i) единственная нетривиальная структура Фано-расслоения на V – это пучок слоев морфизма π , иными словами, любое бирациональное отображение

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbf{P}^1 & & S' \end{array}$$

на произвольное Фано-расслоение той же размерности является послойным, т.е. существует $\alpha: \mathbf{P}^1 \rightarrow S'$ такое, что $\pi' \circ \chi = \alpha \circ \pi$;

- ii) любой бирациональный автоморфизм многообразия V является послойным; для общего V имеет место совпадение $\text{Bir } V = \text{Aut } V = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$;
- iii) многообразие V не рационально.

Для тех Фано-расслоений $V \rightarrow \mathbf{P}^1$, для которых $X = Q \times \mathbf{P}^1$, $Q \subset \mathbf{P}$ – гладкая квадратичная гиперповерхность, наша теорема была доказана в [2]. Все рассуждения работы [2] годятся и для общего случая произвольного X , однако они не исключают наиболее трудного варианта максимальной особенности, лежащей над вершиной конуса $Q_t \subset \mathbf{P}$. Именно для того, чтобы избежать особых слоев на X , в [2] класс рассматриваемых многообразий был ограничен прямым произведением. Однако теперь усиленная техника гиперкасательных систем позволяет разобрать до конца и случай вырожденных слоев. Доказательство теоремы содержится в п. 2.

Результаты работ [2], [3], [5] и теорема 1 позволяют предположить, что импликация (K^2 -условие $\Rightarrow$ бирациональная жесткость) справедлива для всех многообразий с пучком двойных гиперповерхностей Фано.

ГИПОТЕЗА. Пусть $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ есть Фано-расслоение с неособым V , слой которого $\pi^{-1}(t)$ двулистно накрывает $Q_m \subset \mathbf{P}$ с ветвлением в $W_{2l}^* \cap Q_m$, $l + m = M + 1$.

Предположим, что V удовлетворяет K^2 -условию. Тогда $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ бирационально сверхжесткое.

Техника гиперкасательных систем позволяет продвинуть доказательство гипотезы (по традиционной схеме метода максимальных особенностей) достаточно далеко. Точнее, исключаются все возможности для максимальной особенности, кроме одной – когда ее центр на V есть особая точка слоя π , происходящая из особенности на дивизоре ветвления (если особенность происходит из двойной точки гиперповерхности $Q_t \subset \mathbf{P}^M$, то успешно работают рассуждения [2]). Для завершения доказательства необходимо дальнейшее совершенствование техники.

0.3. Настоящая работа является непосредственным продолжением [2], [3]. Двойные пространства и двойные квадрики индекса 1 имеют малую степень и потому наиболее удобны для экспериментов по изучению бирациональной геометрии методом максимальных особенностей. Именно эти многообразия дали первые примеры бирационально (сверх) жестких многообразий Фано произвольной размерности [5].

Новая техника изучения Фано-расслоений, развитая в [3], позволила сразу доказать сверхжесткость многообразий с пучком двойных пространств ([3, п. 8]). Однако степень 4 оказалась слишком велика для того, чтобы автоматически получить аналогичный результат и для двойных квадриков, хотя было очевидно, что такой результат справедлив. Методов работы [3] хватило лишь на двойные накрытия прямых произведений [2], однако исключить максимальную особенность над вершиной конуса не удалось.

Работа [2] была фактически выполнена в 1997 г. во время моего пребывания в Математическом институте им. Макса Планка в Бонне, ФРГ. Там же была разработана и техника гиперкасательных систем, модификация которой позволила доказать основную теорему настоящей статьи. Пользуясь случаем, хочу поблагодарить Институт за прекрасные условия работы.

1. Многообразие с пучком двойных квадриков

1.1. Конструкция. Мы изучаем гладкие проективные $(M+1)$ -мерные многообразия V над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, $M \geq 4$, допускающие морфизм $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$, слои которого – двойные квадрики индекса 1. Точнее, пусть

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=0}^{M+1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$$

– локально-свободный пучок ранга $M+2$ на $\mathbf{P}^1$, где для удобства предполагаем, что $0 = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{M+1}$. Его проективизация $X = \mathbf{Proj}(\mathcal{E}) = \mathbf{P}(\mathcal{E}^*)$ есть $\mathbf{P}^{M+1}$ -расслоение над прямой. Проекцию на базу обозначим тем же символом π .

Пусть G – слой морфизма π ; тогда $\mathrm{Pic} X = \mathbf{Z}L \oplus \mathbf{Z}G$, где L – класс тавтологического пучка $\mathcal{O}_{X/\mathbf{P}^1}(1)$, т.е. $\pi_*\mathcal{O}_X(L) = \mathcal{E}$. В силу сделанного выше предположения пучок $\mathcal{O}_X(L)$ порожден своими сечениями, т.е. линейная система $|L|$ свободна. Канонический класс многообразия X есть

$$K_X = -(M+2)L + \left(\sum_{i=1}^{M+1} a_i - 2 \right) G.$$

Рассмотрим на X гладкий дивизор $Q \in |2L + \mu G|$, $\mu \in \mathbf{Z}$. Его слои $Q_t = Q \cap \pi^{-1}(t)$ над точками $t \in \mathbf{P}^1$ суть квадратичные гиперповерхности. Канонический класс многообразия Q есть

$$K_Q = \left(-ML + \left(\sum_{i=1}^{M+1} a_i + \mu - 2 \right) G \right) \Big|_Q.$$

Рассмотрим теперь на X дивизор Вейля $W \in |2(M-1)L + 2\lambda G|$ такой, что $W \cap Q$ – гладкий дивизор на Q .

Пусть V – (гладкое) двойное накрытие $\sigma: V \rightarrow Q$, разветвленное над $W \cap Q$. Построенное семейство гладких многообразий V обозначим символом $\mathcal{V}(a_*, \mu, \lambda)$. Проекцию V на $\mathbf{P}^1$ обозначаем символом π , а ее слой – символом F_t , $t \in \mathbf{P}^1$. Очевидно, $\text{Pic } V = \mathbf{Z}K_V \oplus \mathbf{Z}F$ и морфизм $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$ расслаивает V на многообразия Фано индекса 1, степени 4. Канонический класс многообразия V имеет вид

$$K_V = -\sigma^*(L|_Q) + \left(\sum_{i=1}^{M+1} a_i + \mu + \lambda - 2 \right) F.$$

1.2. Условие общности положения. Мы будем предполагать, что выполнены следующие три условия общности положения.

(G1) Если $Q_t \subset \mathbf{P}^{M+1}$ – особая квадрика, то Q_t имеет ровно одну особую точку, т.е. Q_t – конус над неособой квадрикой в $\mathbf{P}^M$.

(G2) Если многообразие $W \cap Q_t$ имеет особенности (это может случиться лишь для конечного числа точек $t \in \mathbf{P}^1$), то Q_t – неособая квадрика, множество $\text{Sing } W \cap Q_t$ конечно и каждая особенность $x \in W \cap Q_t$ есть невырожденная квадратичная особенность. Более того, квадратичные касательные конуса

$$T_x(T_x Q_t \cap Q_t) \quad \text{и} \quad T_x(W \cap Q_t)$$

находятся в общем положении, т.е. пересечение их проективизаций в проективном пространстве $\mathbf{P}(T_x Q_t) \cong \mathbf{P}^{M-1}$ есть неособое многообразие размерности $M-3$ и степени 4.

(G3) Если $Q_t \subset \mathbf{P}^{M+1}$ – квадратичный конус с вершиной в точке x , то рассмотрим линейную систему координат $(z_1, \dots, z_{M+1})$ на $\mathbf{C}^{M+1} \subset \mathbf{P}^{M+1}$ с центром в точке x , и пусть $g = 0$ и $g = w_0 + w_1 + \dots + w_{2(M-1)}$ – уравнения квадрики Q_t и гиперповерхности $W_t = W \cap G_t$ соответственно. Прежде всего, $w_0 \neq 0$, т.е. $x \notin W$. В дальнейшем будем предполагать, что $w_0 = 1$.

Рассмотрим степенной ряд $(1+a)^{1/2} = 1 + \sum \gamma_i a^i = 1 + \frac{1}{2}a + \dots$, где a – формальная переменная. Положим

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= (1 + w_1 + \dots + w_{2(M-1)})^{1/2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i (w_1 + \dots + w_{2(M-1)})^i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(w_1, \dots, w_{2(M-1)}), \end{aligned}$$

где $\Phi_i(w_1(z_*), \dots, w_{2(M-1)}(z_*))$ однородны по z_* степени i . Очевидно, $\Phi_i(w_*) = w_i + \dots$ при $i \leq 2(M-1)$, где многоточие обозначает многочлен от $w_1, \dots, w_{i-1}$. Положим для $k \geq 1$

$$[\sqrt{g}]_k = 1 + \sum_{i=1}^k \Phi_i(w_*), \quad g^{(k)} = g - [\sqrt{g}]_k^2.$$

Легко видеть, что $g^{(k)}$ начинается с однородной компоненты степени $k + 1$ по z_* . Эта компонента при $k + 1 \leq 2(M - 1)$ имеет вид $w_{k+1} + \dots$, где многочтие обозначает многочлен от $w_1, \dots, w_k$.

Наше условие общности положения (G3) теперь формулируется так: для некоторой системы координат z_* набор многочленов

$$q, g^{(M-1)}, \dots, g^{(2M-3)}$$

образует регулярную последовательность в $\mathcal{O}_{x, \mathbf{P}^{M+1}} = \mathcal{O}_{x, \mathbf{C}^{M+1}}$, и, более того, в окрестности точки x система уравнений

$$q = g^{(M-1)} = \dots = g^{(2M-4)} = 0$$

задает поверхность, ни одна компонента которой не содержится в гиперплоскости, содержащей точку x . Иными словами, если $l(z)$ – произвольная линейная форма, то последовательность

$$l, q, g^{(M-1)}, \dots, g^{(2M-4)}$$

остается регулярной в $\mathcal{O}_{x, \mathbf{P}^{M+1}}$. При $M = 4$ мы дополнительно требуем, чтобы для любой линейной формы $l(z)$ схема $l = q = g^{(3)} = g = 0$ была приведена в общей точке.

2. Доказательство теоремы 1*

2.1. Метод максимальных особенностей. Основные понятия, конструкции и теоремы метода многократно публиковались, начиная с исходной работы В. А. Исковских и Ю. И. Манина о квартике [6], см. [1], [3], [7]. Поэтому нет необходимости воспроизводить здесь детали. Для Фано-расслоений над $\mathbf{P}^1$ техника метода максимальных особенностей была развита в [3] и затем использована в [2], [4]. В данной работе мы сформулируем достаточное условие сверхжесткости в терминах степеней и кратностей алгебраических циклов и проверим его для наших Фано-расслоений. Детали доказательства достаточного условия читатель найдет в [2]–[4].

Пусть $\pi: Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ – гладкое Фано-расслоение с $\mathrm{Pic} Y = \mathbf{Z}K_Y \oplus \pi^* \mathrm{Pic} \mathbf{P}^1$, удовлетворяющее K^2 -условию, т.е. численный класс $NK_Y^2 = f$, где $f \in A^2 Y$ – класс гиперплоского сечения слоя $F_t = \pi^{-1}(t)$, не представлен эффективным циклом коразмерности 2 ни для какого $N \in \mathbf{Z}$. Следуя [2], [3], мы называем неприводимый цикл $B \subset Y$ *горизонтальным*, если он накрывает базу, $\pi(B) = \mathbf{P}^1$, и *вертикальным*, если он лежит в слое π . *Степенью* вертикального цикла B назовем число

$$\deg B = (B \cdot (-K_Y)^{\dim B}) > 0.$$

Степенью горизонтального цикла B назовем число $\deg B = \deg(B \cap F_t)$, где F_t – слой общего положения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (достаточное условие бирациональной сверхжесткости). *Предположим, что для любой подвижной линейной системы $\Sigma \subset | -nK_Y + lF|$, любого неприводимого вертикального цикла $A \subset F_t$ коразмерности 2 (относительно Y), любого неприводимого горизонтального цикла $B \subset Y$ коразмерности 2, любого вертикального цикла $C \subset F_t$ коразмерности 3 (относительно Y) и любой точки $x \in F_t$ выполнены следующие условия:*

- i) $\mathrm{mult}_A \Sigma \leq n$, $\mathrm{mult}_B \Sigma \leq n$;
- ii) $\mathrm{mult}_x C \leq (4/\deg Y) \mathrm{mult}_x F_t \deg C$;

- iii) $\text{mult}_x A \leq (2 \text{mult}_x F_t / \deg Y) \deg A$, $\text{mult}_y \tilde{A} \leq (2 / \deg Y) \deg A$, где $y \in E_x \subset \tilde{F}_t$ – произвольная бесконечно близкая точка над $x \in F_t$, $\tilde{A}$ – собственный прообраз A при раздутии точки x , $\varphi: \tilde{F}_t \rightarrow F_t$, $E_x = \varphi^{-1}(x)$.

Тогда Фано-расслоение $\pi: Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ бирационально сверхжесткое.

Здесь $\deg Y = (F \cdot (-K_Y)^{\dim Y - 1})$ в соответствие с данным выше определением степени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2]–[4]. Схема рассуждений такова: если $Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ не является бирационально сверхжестким, то на Y имеется подвижная линейная система $\Sigma \subset | -nK_Y + lF |$, имеющая максимальную особенность ν . Если центр максимальной особенности имеет коразмерность 2, то получаем противоречие с условием i). Пусть $x \in F_t$ – точка, принадлежащая центру. Рассмотрим эффективный цикл $Z = (D_1 \bullet D_2)$, $D_i \in \Sigma$, и разобьем его на вертикальную и горизонтальную компоненты

$$Z = Z^h + Z^v = Z^h + \sum_{s \in \mathbf{P}^1} Z_s^v,$$

где носитель цикла Z_s^v содержится в слое F_s . Отметим, что в силу условия ii)

$$\text{mult}_x Z^h \leq 4n^2. \quad (1)$$

В самом деле, рассмотрим эффективный цикл $C = (Z^h \bullet F_t)$. Очевидно, $\text{mult}_x C \geq \text{mult}_x Z^h \text{mult}_x F_t$, в то время как $\deg Z^h = \deg C = n^2 \deg Y$. Применяя ii), получаем неравенство (1). Далее, в силу условия iii) имеем

$$\text{mult}_x Z_t^v \leq 4nl. \quad (2)$$

Считая максимальную особенность ν *сверхмаксимальной* [2], [3] и рассуждая, как в [2], [3], получаем противоречие.

Итак, для доказательства теоремы 1* достаточно проверить справедливость условий i)–iii) для Фано-расслоения $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$.

2.2. Максимальные циклы. Условие i) было фактически проверено в [2]. Поскольку линейная система на гладкой двойной квадрике размерности ≥ 4 не может иметь максимальных особенностей [5], подвижная линейная система Σ на V не может иметь максимальных особенностей, накрывающих базу, т.е. $\text{mult}_B \Sigma \leq n$ для любого горизонтального цикла $B \subset V$ коразмерности 2. Далее, для любого простого дивизора Вейля $A \subset F_t$ имеем: $\sigma(A) \subset Q_t$ – простой дивизор Вейля на квадрике Q_t . Дивизоры семейства $\sigma(\Sigma|_{F_t})$ высекаются на Q_t гиперповерхностями степени $2n$, так что если $\text{mult}_A \Sigma > n$, то $\sigma(A) = H \cap Q_t$ – гиперплоское сечение, причем морфизм $\sigma: A \rightarrow \sigma(A)$ бирационален. Значит, теоретико-схемное пересечение $H \cap Q_t \cap W$ не приведено в каждой точке. Однако такого не может быть: по лемме 3.4.2 из [7] $\dim \text{Sing } H \cap Q_t \cap W \leq 1$. Противоречие.

Этим условие i) доказано.

2.3. Проверка условия ii). Очевидно, $\deg V = 4$, так что ii) принимает вид неравенства

$$\text{mult}_x C \leq \text{mult}_x F_t \deg C,$$

которое, конечно, выполнено, так как верно более сильное неравенство $\text{mult}_x C \leq \deg C$.

2.4. Проверка условия iii). Если $z = \sigma(x)$ – гладкая точка квадраки Q_t , то дословное повторение рассуждений работы [2] доказывает iii). Схема доказательства такова. Имеются две возможности: $\sigma(A) = T_z Q_t \cap Q_t$ и $\sigma(A) \neq T_z Q_t \cap Q_t$. В первом случае iii) проверяется непосредственно с использованием (G1), (G2) и упомянутой выше леммы 3.4.2 из [7]. Во втором случае iii) получается применением уже доказанного неравенства ii) к эффективному циклу $(A \bullet \sigma^{-1}(T_z Q_y \cap Q_t))$ коразмерности 2.

Пусть $z = \sigma(x)$ – вершина конуса Q_t . Прежде всего, отметим, что первое из двух неравенств iii) в этом случае тривиально: оно утверждает, что $\text{mult}_x A \leq \deg A$. Предположим, что для простого дивизора Вейля $A \subset F_t$ не выполнено второе неравенство:

$$\text{mult}_y \tilde{A} > \frac{1}{2} \deg A,$$

где $y \in E_x = \varphi^{-1}(x) \subset \tilde{F}_t$ – бесконечно близкая точка первого порядка над x , $\varphi: \tilde{F}_t \rightarrow F_t$ – раздутие точки x . Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Сделаем это в три шага.

Шаг 1. Точка $z = \sigma(x)$ не лежит на дивизоре ветвления, так что $\sigma(y)$ – корректно определенная бесконечно близкая точка первого порядка над z , определяющая прямую $(z, \sigma(y)) \subset Q_t$. Через $T_y Q_t$ обозначим гиперплоскость в $\mathbf{P}$, которая касается Q_t вдоль этой прямой. Положим $T = \sigma^{-1}(T_y Q_t \cap Q_t) \subset F_t$. Очевидно, $\text{mult}_y \tilde{T} = 2$, $\deg T = 4$, так что условие iii) для T выполнено. В частности, $A \neq T$.

Шаг 2. Положим $B = E_x \cap \tilde{T}$ (если рассматривать $T_y Q_t \cap Q_t$ как аффинный конус с вершиной x , то B – его проективизация).

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$\text{mult}_B \tilde{A} \geq \frac{1}{4}(2 \text{mult}_y \tilde{A} - \text{mult}_x A).$$

Доказательство: см. [4], п. 3.6.

Рассмотрим теперь алгебраический цикл $(A \bullet T) = C$. Нетрудно проверить, что C удовлетворяет неравенству

$$\text{mult}_x C > \frac{3}{4} \deg C.$$

Шаг 3. Покажем, что этого не может быть. Предположим сначала, что $M \geq 5$. Очевидно, цикл C можно считать неприводимым. Пусть $H = T_y Q_t \cong \mathbf{P}^M$ – касательная гиперплоскость, $\sigma: R \rightarrow H$ – двойное накрытие, разветвленное над гиперповерхностью $W_H = W \cap H$. Многообразие R неприводимо и, вообще говоря, имеет особенности. Цикл T естественно отождествляется с дивизором в R . Поэтому и C можно отождествить с циклом коразмерности 2 в R . В силу этого отождествления мы пишем $x \in R$ и т.д.

Пусть $P \in \text{Pic } R$ – класс гиперплоского сечения, т.е. $\mathcal{O}_R(P) \cong \sigma^* \mathcal{O}_H(1)$, $H \hookrightarrow \mathbf{P}$. Определим k -ую гиперкасательную систему в точке $x \in R$ условием

$$\Lambda_k = \{D \in |kP| \mid \text{mult}_x D \geq k+1\}.$$

Лемма 2. *Гиперкасательные линейные системы Λ_k непусты при $k = M-1, \dots, 2M-3$. Более того,*

$$\text{codim}_T \text{Bs}(\Lambda_{M-2+i}|_T) \geq i$$

при $i = 1, \dots, M-2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это немедленно вытекает из условия (G3), где в качестве гиперплоскости, содержащей точку $p = \sigma(x) \in Q_t \cap H$, берется H . В самом деле, пусть $z_1, \dots, z_{M+1}$ — система линейных координат с центром в p , причем $\mathbf{P} \supset H = \{z_{M+1} = 0\}$. Пусть $U = \mathbf{C}_{(z_1, \dots, z_M)}^M$. Над аффинным множеством U многообразие R задается уравнением $y^2 = g(z_1, \dots, z_M, 0)$ в $\mathbf{C}_{(y)} \times U$. Координата y определяет сечение пучка $\mathcal{O}_R((M-1)P)$, поэтому регулярные на $\mathbf{C} \times U$ функции

$$f_k = y - [\sqrt{g}]_k$$

определяют при $k \geq M-1$ сечения пучков $\mathcal{O}_R(kP)$ соответственно. Более того, при $k \geq M-1$ положим

$$\Delta_k = \overline{\{f_i = 0\}} \subset R.$$

Легко видеть, что $\Delta_k \in \Lambda_k$. Образ дивизора Δ_k на $U = \mathbf{C}^M$ задается уравнением $g^{(k)}(z_1, \dots, z_M, 0) = 0$. Теперь применяем (G3) и получаем утверждение нашей леммы.

Пусть $D_i \in \Lambda_{M-2+i}$, $i = 1, \dots, M-1$, — общие дивизоры. Построим цепочку неприводимых циклов $C_2, C_3, \dots, C_{M-1} \subset R$, $\text{codim } C_j = j$, следующим образом. Положим $C_2 = C$. Предположим, что C_j , $j = 2, \dots, l$, уже построены и $l \leq M-2$. В силу леммы 2 общий дивизор D_l не содержит C_l . В силу определения гиперкасательной системы существует неприводимая компонента Z цикла $(C_l \bullet D_l)$, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\text{mult}_x}{\deg} Z \geq \frac{\text{mult}_x}{\deg} C_l \cdot \frac{M-1+l}{M-2+l}.$$

Положим $C_{l+1} = Z$.

Цикл $C_{M-1} \subset R$ есть неприводимая кривая. Имеем оценку

$$\begin{aligned} \frac{\text{mult}_x}{\deg} C_{M-1} &> \frac{3}{4} \cdot \frac{M+1}{M} \cdot \frac{M+2}{M+1} \cdot \dots \cdot \frac{2M-3}{2M-4} \\ &\quad \parallel \\ &\quad \frac{3(2M-3)}{4M}, \end{aligned}$$

и легко видеть, что $3(2M-3)/(4M) \geq 1$, что дает противоречие.

Предположим, что $M = 4$. Здесь линейная система Λ_3 состоит из единственного дивизора D_3 . Имеются две возможности: либо $C \subset D_3$, либо $C \not\subset D_3$. В первом случае условие iii) вытекает из условия общности положения, ибо $C = T \cap D_3$. В противном случае цикл $C_3 = (C \bullet D_3)$ эффективен. Однако он удовлетворяет неравенству $(\text{mult}_x / \deg) C_3 > 1$, что невозможно.

Этим свойство iii) и теорема 1* полностью доказаны.

3. Трехмерный случай

Большая часть проведенных рассуждений работает без каких-либо изменений и при $M = 3$. Исключение составляют два “подводных камня”. Во-первых, размерность уже не позволяет пользоваться леммой 3.4.2 из [7]. Однако дополнительные условия общности положения многообразия V заменяют эту лемму. Читатель без труда восстановит необходимые детали.

Вторая сложность более существенна: на V в размерности три могут появиться горизонтальные максимальные циклы! Это связано, конечно, с тем, что на гладкой двойной квадрике индекса 1 размерности 3 любая прямая вне дивизора ветвления может быть

максимальной особенностью [7] и, соответственно, группа бирациональных автоморфизмов этого многообразия весьма велика (она была описана В. А. Исковских в середине 70-х гг.).

Пусть $\mathcal{L}(V)$ – (квазипроективное) многообразие прямых в слоях морфизма $\pi: V \rightarrow \mathbf{P}^1$, не лежащих на дивизоре ветвления,

$$\mathcal{L}(V) = \{L \subset F_t \mid (L \cdot K_V) = -1, \sigma(L) \notin W\}.$$

Естественную проекцию $\mathcal{L}(V) \rightarrow \mathbf{P}^1$ обозначим тем же символом π . Каждое сечение (определенное, вообще говоря, вне конечного множества точек) $s: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathcal{L}(V)$, $\pi \circ s = \text{id}$, определяет послыйный бирациональный автоморфизм $\tau_s \in \text{Bir } F_\eta \subset \text{Bir } V$, где F_η – слой над общей точкой, многообразие Фано над незамкнутым полем $\mathbf{C}(\mathbf{P}^1)$. Инволюции τ_s свободно порождают в $\text{Bir } V$ нормальную подгруппу

$$B(V) = \underset{\substack{s: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathcal{L}(V) \\ \pi \circ s = \text{id}}}{*} \langle \tau_s \rangle,$$

см. [7], причем имеет место точная последовательность

$$1 \rightarrow B(V) \rightarrow \text{Bir } V \rightarrow \text{Aut } V \rightarrow 1, \quad (3)$$

где группа $\text{Aut } V$ конечна, а в общем случае изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Дословное повторение рассуждений п. 2, с учетом сделанных замечаний, приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. *Общее четырехмерное Фано-расслоение V , удовлетворяющее K^2 -условию, есть бирационально жесткое многообразие, группа бирациональных автоморфизмов которого описывается точной последовательностью (3).*

Возникает вопрос: существуют ли сечения $s: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathcal{L}(V)$ для общего Фано-расслоения V ? Ответ автору неизвестен. По-видимому, он отрицателен. Если он действительно отрицателен, то и для $M = 3$ мы получаем бирациональную сверхжесткость.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pukhlikov A. V. Essentials of the method of maximal singularities, Warwick Preprint № 31/1996.
- [2] Pukhlikov A. V. Certain examples of birationally rigid varieties with a pencil of double quadrics // J. Math. Sci. 1999. V. 94. № 1. P. 986–995.
- [3] Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей Дель Пешо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
- [4] Pukhlikov A. V. Birationally rigid Fano fibrations. MPI-preprint, 1998–113.
- [5] Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадрики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 1. С. 229–239.
- [6] Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.
- [7] Iskovskikh V. A., Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of multi-dimensional algebraic varieties // J. Math. Sci. 1996. V. 82. P. 3528–3613.