Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Рууге, О структуре квазиклассических асимптотик антисимметрических решений стационарного уравнения Шредингера, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 257–269

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm834>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:32:47

УДК 517

О СТРУКТУРЕ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ АСИМПТОТИК АНТИСИММЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

А.Э. Рууге

Рассматривается квазиклассическая асимптотика собственных функций гамильтониана квантовомеханической системы из N тождественных фермионов с d степенями свободы без спинowego взаимодействия. В одномерном случае ($d = 1$) известны примеры, в которых основное антисимметрическое состояние гамильтониана принимает при квазиклассическом предельном переходе вид произведения $N(N - 1)/2$ парных волновых функций. В настоящей работе строится нетривиальное обобщение этого свойства для случая $d > 1$.

Библиография: 6 названий.

Введение. В работе [1] было указано на следующее интересное свойство основного антисимметрического состояния оператора Шрёдингера для системы из N частиц вида

$$\hat{H}_N = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \hat{p}_j^2 + \frac{\omega^2}{2N} \sum_{j < j'} (x_j - x_{j'})^2, \quad (1)$$

где $x_j \in \mathbb{R}$ – координаты частиц, $\hat{p}_j = -i\hbar\partial/\partial x_j$ – операторы их импульсов, $\omega > 0$ – некоторая константа. Данное состояние (т.е. собственная функция $\hat{H}_N$, антисимметрическая относительно перестановок координат $x_1, x_2, \dots, x_N$ и соответствующая наименьшему среди всех таких функций собственному значению) представимо в виде

$$\Psi_N(x_1, \dots, x_N; h) = c_N(h) \prod_{1 \leq j < j' \leq N} \Phi\left(\frac{x_j - x_{j'}}{\sqrt{N}}; h\right), \quad (2)$$

где $c_N(h)$ – нормировочная постоянная, $\Phi(x; h) = -\Phi(-x; h)$ – некоторая функция. При этом оказывается, что основное антисимметрическое состояние оператора Шрёдингера $\hat{H}_2 = (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \omega^2(x_2 - x_1)^2)/2$, отвечающего системе из двух частиц, выражается с помощью этой же функции: $\Psi_2(x_1, x_2; h) = c_2(h)\Phi((x_1 - x_2)/\sqrt{2}; h)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01544, и совместного проекта фонда ИНТАС и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-0091.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы построить аналог представления (2) для случая, когда $x_j \equiv (x_{j,1}, \dots, x_{j,d}) \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Пусть задан h -псевдодифференциальный оператор $\hat{H}_N$ с достаточно гладким действительным символом,

$$\hat{H}_N = H_N \left(x_1, \frac{\hat{p}_1 + \hat{p}_1}{2}, \dots, x_N, \frac{\hat{p}_N + \hat{p}_N}{2} \right), \quad (3)$$

где индексы над операторами обозначают порядок их действия [2], $\hat{p}_j = -i\hbar \nabla_{x_j}$. Предполагается, что символ H_N симметричен относительно любых перестановок $\{(x_j, p_j)\}$ и имеет невырожденную стационарную точку Λ , устойчивую в линейном приближении относительно ассоциированного с ним гамильтонова фазового потока. Каждой такой точке соответствует набор непересекающихся непустых подмножеств $I_\nu \subset \{1, 2, \dots, N\}$, $\nu = 1, 2, \dots, \nu_0$, определяемых исходя из требований

$$\mathbf{P}_{ij}\Lambda = \Lambda, \quad \mathbf{P}_{ik}\Lambda \neq \Lambda, \quad i, j \in I_\nu, \quad k \in I_{\nu'}, \quad \nu \neq \nu',$$

где $\mathbf{P}_{ij}$ – оператор перестановки (x_i, p_i) и (x_j, p_j) (оператор перестановки частиц). Рассматривается спектральная задача

$$\hat{H}_N \Psi_N = E \Psi_N, \quad \Psi_N \in L^2(\mathbb{R}^{dN}) \quad (4)$$

с дополнительным условием на Ψ_N

$$\left(1 - \prod_{\nu=1}^{\nu_0} \mathcal{A}_{I_\nu} \right) \Psi_N(x_1, \dots, x_N; \hbar) = 0, \quad (5)$$

где $\mathcal{A}_{I_\nu}$ – проектор на подпространство функций, антисимметрических относительно перестановок $\{x_j\}$, $j \in I_\nu$. Точке Λ соответствует согласно [3] серия асимптотических по $\text{mod } O(\hbar^{3/2})$ собственных функций $\hat{H}_N$, сосредоточенных вблизи проекции Λ на конфигурационное подпространство (набор квазимод). Задача заключается в том, чтобы выделить из этой серии функцию, удовлетворяющую условиям антисимметрии (5) и соответствующую наименьшему среди всех таких функций асимптотическому собственному значению, а затем представить ее в виде, аналогичном (2). Будем называть всюду ниже такую функцию *основным $\{I_\nu\}$ -антисимметрическим состоянием* данной серии.

Что именно понимать под аналогом формулы (2), определяет теорема, формулируемая ниже. Разумеется, в случае, когда (3) имеет вид (1), соответствующая формула должна переходить в (2), так как в этом случае асимптотические собственные функции совпадают с точными.

Уравнение (4), рассматриваемое вместе с дополнительным условием (5), имеет следующую физическую интерпретацию. Пусть задана квантовомеханическая система из N фермионов без спинного взаимодействия, гамильтониан которой действует на координатные волновые функции [4] как h -псевдодифференциальный оператор $\hat{H}_N$ (3). Частицы считаются квазиклассическими ($\hbar \rightarrow 0$). Уравнение (4) – это стационарное уравнение Шрёдингера. Если решение Ψ_N , удовлетворяющее условию (5), сосредоточено вблизи проекции точки Λ на конфигурационное пространство системы, а набор точек $\bigcup_{i,j} \mathbf{P}_{ij}\Lambda$ проектируется на это пространство взаимнооднозначно, то $\mathcal{A}\Psi_N \neq 0$ – координатная волновая функция системы в состоянии с максимальным значением спина.

1. Обозначения и формулировка основного результата. Будем рассматривать гамильтониан $\hat{H}_N$ как элемент семейства гамильтонианов $\hat{H}_M^{(a)}$ с вейлевскими сим-волами

$$H_M^{(a)}(\xi_1, \dots, \xi_M) = H_N \left(\sum_{l=1}^M a_{1,l} \xi_l, \dots, \sum_{l=1}^M a_{N,l} \xi_l \right),$$

где $\xi_i \equiv (x_i, p_i)$, $a = \{a_{il}\}$ – набор действительных чисел, удовлетворяющий условиям

$$a_{il'} = 0, \quad \sum_{i \in I_\nu} a_{il} a_{is} = \delta_{ls}, \quad \sum_{i \in I_\nu} a_{il} = \sqrt{\frac{|I_\nu|}{|L_\nu|}}, \quad \sum_{l \in L_\nu} a_{il} = \sqrt{\frac{|L_\nu|}{|I_\nu|}}, \quad (6)$$

где $i \in I_\nu$, $l, s \in L_\nu$, $l' \in L_{\nu'}$, $\nu \neq \nu'$, $L_\nu \subset \{1, 2, \dots, M\}$ – некоторый набор непустых непересекающихся подмножеств, $M = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} |L_\nu|$, удовлетворяющих условиям $1 \leq |L_\nu| \leq |I_\nu|$, $|\cdot|$ – число элементов в множестве. Гамильтониану H_N соответствует набор $a_{il} = \delta_{il}$. В случае $M < N$ нелинейная система соотношений (6), на первый взгляд, вообще несовместна, так как число соотношений в ней превышает число неизвестных. Тем не менее, решение существует:

$$a_{il} = \delta_{i\nu'} \begin{cases} \delta_{rs} + \frac{1}{\sqrt{|l_\nu||I_\nu|}} - \frac{1}{|L_\nu|}, & r \leq |L_\nu|, \\ \frac{1}{\sqrt{|L_\nu||I_\nu|}}, & |L_\nu| < r \leq |I_\nu|, \end{cases}$$

где $i \in I_\nu$, $l \in L_{\nu'}$, r – число элементов в I_ν , меньше либо равных i , s – число элементов в L_ν , меньше либо равных l .

Несложно убедиться, что из условий на коэффициенты a_{il} следует, что стационарной точке Λ гамильтониана H_N с координатами $\xi_{i,\alpha} = X_{\nu,\alpha}/\sqrt{|I_\nu|}$, $i \in I_\nu$, соответствует стационарная точка Λ_a гамильтониана $H_M^{(a)}$ с координатами $\xi_{l,\alpha} = X_{\nu,\alpha}/\sqrt{|L_\nu|}$, $l \in L_\nu$. Более того, в основной части работы показывается, что из устойчивости в линейном приближении точки Λ следует устойчивость Λ_a .

Введем вспомогательное обозначение. Пусть $\omega_1 < \dots < \omega_d$ – произвольные положительные действительные числа, составляющие несоизмеримый набор. Этому набору можно поставить в соответствие бесконечную последовательность целочисленных векторов $p_s = (p_{s,1}, \dots, p_{s,d})$, однозначно определяемую требованиями

$$p_{s,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad p_{1,k} = 0, \quad \sum_{k=1}^d \omega_k p_{s+1,k} = \min, \quad p_{s+1} \neq p_1, p_2, \dots, p_s. \quad (7)$$

Пусть $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ – некоторое множество, $i_s < i_{s+1}$, $\varphi_1(x), \dots, \varphi_d(x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$) – произвольные функции. Введем обозначение

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\omega_1, \dots, \omega_d}[\varphi_1, \dots, \varphi_d](x_I) &= \prod_{k=1}^d \prod_{l_d, \dots, l_{k+1}} \prod_{l_k < l_k'} \\ &\times \prod_{j \in I_{l_d, \dots, l_{k+1}, l_k}^{(k)}} \varphi_k \left(\left(\frac{|I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}|}{|I|} \prod_{s=k+1}^d \frac{|\tilde{I}_{l_d, \dots, l_s}^{(s)}|}{|I_{l_d, \dots, l_s}^{(s)}|} \right)^{1/2} \left(x_j - \frac{1}{|I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}|} \sum_{i \in I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}} x_i \right); h \right), \end{aligned}$$

где $x_I \equiv (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r})$,

$$I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)} = \{i_s \in I : p_{s,d} = l_d, \dots, p_{s,k} = l_k\}, \quad \tilde{I}_{l_d, \dots, l_k}^{(k)} = \bigcup_{l_{k'} \geq l_k} I_{l_d, \dots, l_{k+1}, l_{k'}}^{(k)}, \quad (8)$$

индексы l_k пробегают все целые неотрицательные значения и принимается соглашение, что если множество значений, которое пробегает индекс, по которому вычисляется произведение, пусто, то соответствующее произведение равно единице.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Λ – невырожденная устойчивая в линейном приближении стационарная точка гамильтониана H_N . Тогда для всех ν , $|L_\nu| > 1$, $(2d \times 2d)$ -матрица $A^{(\nu)} = \|A_{\alpha\beta}^{(\nu)}\|$,

$$A_{\alpha\beta}^{(\nu)} = -i \sum_{\alpha'=1}^{2d} J_{\alpha\alpha'} \left\{ \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{n_\nu, \alpha'} \partial \xi_{n_\nu, \beta}} - \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{m_\nu, \alpha'} \partial \xi_{n_\nu, \beta}} \right\}, \quad (9)$$

где $J_{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha, \alpha'+d} - \delta_{\alpha+d, \alpha'}$, $n_\nu = \max L_\nu$, $m_\nu = \min L_\nu$, производные вычисляются в точке Λ , имеет d положительных собственных значений $\omega_1^{(\nu)} \leq \dots \leq \omega_d^{(\nu)}$. Если эти собственные значения составляют несоизмеримый набор величин $\omega^{(\nu)}$, то для любого набора коэффициентов $\{a_{il}\}$, удовлетворяющего условиям (6), основное $\{L_\nu\}$ -антисимметрическое состояние серии асимптотических по $\text{mod } O(h^{3/2})$, $h \rightarrow 0$, собственных функций $\hat{H}_M^{(a)}$, соответствующих Λ_a , представимо в виде

$$\Psi_M(x; h) = c(h) F(\tilde{x}; h) \prod_{\nu=1}^{\nu_0} \mathcal{A}_{L_\nu} \mathbf{R}_{\omega^{(\nu)}} [\Phi_{\nu,1}(\cdot; h), \dots, \Phi_{\nu,d}(\cdot; h)](x_{L_\nu}), \quad (10)$$

где $x \equiv (x_1, \dots, x_M)$, $\tilde{x} \equiv (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\nu_0})$, $\tilde{x}_\nu = (1/\sqrt{|L_\nu|}) \sum_{l \in L_\nu} x_l$, F и $\Phi_{\nu,k}$ – некоторые функции, $c(h)$ – нормировочная постоянная.

Формулу (10) можно рассматривать как аналог (2) в следующем смысле. Несложно видеть, что в одномерном ($d = 1$) случае, множества $I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}$, фигурирующие в определении обозначения $\mathbf{R}_{\omega_1, \dots, \omega_d}$, имеют вид $I_{l_1}^{(1)} = \{i_{l_1}\}$, если $l_1 < |I|$, и $I_{l_1}^{(1)} = \emptyset$, если $l_1 \geq |I|$. Рассмотрим гамильтониан $\hat{H}_N(\eta) = \hat{H}_N + \eta(x_1^2 + \dots + x_N^2)$, $\eta > 0$, где $\hat{H}_N$ имеет вид (1). У символа гамильтониана $\hat{H}_N(\eta)$ имеется невырожденная устойчивая в линейном приближении стационарная точка $\Lambda = \{x_j = 0, p_j = 0, j = 1, \dots, N\}$, которой соответствует набор множеств $\{L_\nu\}$, содержащий единственный элемент $I_1 = \{1, 2, \dots, N\}$, $\nu_0 = 1$. Положим $a_{il} = \delta_{il}$, $L_1 = I_1$. Тогда формула (10) определяет основное антисимметрическое состояние $\hat{H}_N(\eta)$ в виде

$$\Psi_N = c(h) F\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N x_i; h\right) \mathcal{A} \prod_{i < j} \Phi_1\left(\frac{x_j - x_i}{\sqrt{N}}; h\right).$$

Ниже будут приведены явные формулы для F и Φ_1 , из которых будет видно, что $F \rightarrow 1$, $\eta \rightarrow 0$ и $\Phi_1(-x; h) = -\Phi_1(x; h)$. В результате формула для Ψ_N принимает вид (2). Если же положить $L_1 = \{1, 2\}$ и взять любой набор коэффициентов $\{a_{il}\}$, удовлетворяющий условиям (6), то, как несложно убедиться, независимо от этого выбора гамильтониан $\hat{H}_2^{(a)}(\eta) \rightarrow \hat{H}_2$, $\eta \rightarrow 0$, а соответствующее основное антисимметрическое состояние $\Psi_2 \rightarrow c(h) \Phi_1((x_2 - x_1)/\sqrt{2}; h)$, что согласуется со сказанным во введении.

2. Редукция системы уравнений в вариациях. Задача состоит в том, чтобы выделить из асимптотической серии оператора $\hat{H}_M^{(a)}$, соответствующей Λ_a , ее основное $\{L_\nu\}$ -антисимметрическое состояние, а затем привести его к виду (10). Указанная серия может быть построена с помощью метода комплексного роста [3]. Применительно к рассматриваемому случаю этот метод означает следующее. В точке $\Lambda_a \in \mathbb{R}_{xp}^{2dM}$ необходимо построить инвариантный комплексный росток – положительную лагранжеву плоскость r_a в комплексифицированном касательном пространстве к Λ_a , инвариантную относительно гамильтоновой системы в $\mathbb{C}T\mathbb{R}_{xp}^{2dM}$, индуцированной $\text{sgrad } H_M^{(a)}$. После этого в плоскости r_a необходимо построить так называемый *канонический базис*, которому по известным формулам ставится в соответствие серия асимптотических (по $\text{mod } O(h^{3/2})$) собственных функций $\hat{H}_M^{(a)}$ (набор квазимод).

Рассмотрим сначала случай $a_{il} = \delta_{il}$. Точка Λ предполагается устойчивой в линейном приближении, относительно фазового потока, ассоциированного с H_N , что, как показано в [3], является необходимым и достаточным условием существования инвариантного комплексного роста в этой точке. Координатам в фазовом пространстве $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \xi_i \equiv (x_i, p_i) \in \mathbb{R}^{2d}$, соответствуют координаты $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N, \zeta_i \equiv (\zeta_{i,1}, \dots, \zeta_{i,2d}) \in \mathbb{C}^{2d}$, в слоях расслоения $\mathbb{C}T\mathbb{R}_{xp}^{2dN}$, в которых индуцированная гамильтонова система (система уравнений в вариациях) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\zeta_{i,\alpha} = \sum_{\alpha', \beta=1}^{2d} \sum_{j=1}^N J_{\alpha\alpha'} \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{i,\alpha'} \partial \xi_{j,\beta}} \zeta_{j,\beta}. \quad (11)$$

Условия лагранжевости и положительности r в этих координатах записываются в виде $[\zeta, \zeta'] \equiv \sum_{\alpha, \beta=1}^{2d} J_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^N \zeta_{j,\beta} \zeta'_{j,\alpha} = 0$, $\langle \zeta, \zeta \rangle \equiv (1/(2i))[\zeta, \bar{\zeta}] > 0$, $\zeta, \zeta' \in r$, где $[\cdot, \cdot]$ – кососкалярное произведение, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – эрмитова форма, индуцированная кососкалярным произведением. Инвариантность r означает, что данная плоскость сохраняется под действием системы (11).

Условия симметрии, которым удовлетворяет точка Λ , позволяют упростить систему уравнений (11). В точке Λ производные H_N в силу симметричности H_N относительно перестановок ξ_i удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{j,\alpha} \partial \xi_{j',\alpha'}} &= \delta_{\nu\nu'} \delta_{jj'} \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{n_\nu, \alpha} \partial \xi_{n_{\nu'}, \alpha'}} + \delta_{\nu\nu'} (1 - \delta_{jj'}) \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{m_\nu, \alpha} \partial \xi_{n_{\nu'}, \alpha'}} \\ &+ (1 - \delta_{\nu\nu'}) \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{n_\nu, \alpha} \partial \xi_{n_{\nu'}, \alpha'}}, \quad j \in I_\nu, \quad j' \in I_{\nu'}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $n_\nu = \max I_\nu$, $m_\nu = \min I_\nu$. Подставляя их в систему в вариациях (11) и вводя в рассмотрение новые функции $f_{\nu, \alpha} = (1/\sqrt{|I_\nu|}) \sum_{i \in I_\nu} \xi_{i, \alpha}$, $g_\alpha^{(\nu)} = \xi_{i, \alpha} - \xi_{j, \alpha}$, где $i \in I_\nu$, $j \in I_\nu \setminus \{i\}$, получим следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_{\nu, \alpha} &= \sum_{\beta=1}^{2d} J_{\alpha\beta} \sum_{\beta'=1}^{2d} \left\{ \left[\frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{n_\nu, \beta} \partial \xi_{n_{\nu'}, \beta'}} + (|I_\nu| - 1) \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{m_\nu, \beta} \partial \xi_{n_{\nu'}, \beta'}} \right] f_{\nu', \beta'} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{|I_\nu|} \sum_{\substack{\nu'=1 \\ \nu' \neq \nu}}^{\nu_0} \sqrt{|I_{\nu'}|} \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{n_\nu, \beta} \partial \xi_{n_{\nu'}, \beta'}} f_{\nu', \beta'} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt}g_{\alpha}^{(\nu)} = \sum_{\beta=1}^{2d} J_{\alpha\beta} \sum_{\beta'=1}^{2d} \left[\frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{n\nu,\beta} \partial \xi_{n\nu,\beta'}} - \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{m\nu,\beta} \partial \xi_{n\nu,\beta'}} \right] g_{\beta'}^{(\nu)}. \quad (14)$$

С другой стороны, каждому решению $f_{\nu,\alpha}$ соответствует решение системы уравнений в вариациях $\zeta_{i,\alpha} = f_{\nu,\alpha}/\sqrt{|I_{\nu}|}$, $i \in I_{\nu}$, а каждому решению $g_{\alpha}^{(\nu)}$ – набор из $|I_{\nu}| - 1$ линейно независимых решений $\zeta_{j,\alpha} = \delta_{\nu\nu'} u_{\tilde{s}\tilde{s}_{\nu}(j)}^{[I_{\nu}]} g_{\alpha}^{(\nu)}$, $j \in I_{\nu'}$, где $\tilde{s}_{\nu}(j)$ – число элементов в I_{ν} , меньше либо равных j , $u_{\tilde{s}\tilde{s}'}^{(n)}$ имеют вид

$$u_{\tilde{s}\tilde{s}'}^{(n)} = \theta_{s,n-1} \frac{\theta_{s's} - s\delta_{s',s+1}}{\sqrt{s(s+1)}} + \frac{\delta_{sn}}{\sqrt{n}}, \quad \theta_{ij} \equiv \sum_{k=1}^j \delta_{ik}. \quad (15)$$

Отметим, что матрица $\|u_{\tilde{s}\tilde{s}'}^{(n)}\| \in O(n)$. Если известны фундаментальные системы решений (13) и (14), то данные формулы позволяют построить фундаментальную систему решений (11). Тем самым, задача отыскания решений (11) редуцируется к (13), (14).

Рассмотрим теперь произвольный гамильтониан $H_M^{(a)}$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что условия (6) на коэффициенты a_{il} обеспечивают выполнение следующих соотношений для вторых производных гамильтонианов H_N и $H_M^{(a)}$, взятых в точках Λ и Λ_a соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_M^{(a)}}{\partial \xi_{l,\alpha} \partial \xi_{l',\alpha'}} &= \delta_{\nu\nu'} \delta_{ll'} \left(\frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{n\nu,\alpha} \partial \xi_{n\nu,\alpha'}} + \left(\frac{|I_{\nu}|}{|L_{\nu}|} - 1 \right) \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{m\nu,\alpha} \partial \xi_{n\nu,\alpha'}} \right) \\ &+ \delta_{\nu\nu'} (1 - \delta_{ll'}) \frac{|I_{\nu}|}{|L_{\nu}|} \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{m\nu,\alpha} \partial \xi_{n\nu,\alpha'}} + (1 - \delta_{\nu\nu'}) \sqrt{\frac{|I_{\nu}||I_{\nu'}|}{|L_{\nu}||L_{\nu'}|}} \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{n\nu,\alpha} \partial \xi_{n\nu',\alpha'}}, \end{aligned}$$

где $l \in L_{\nu}$, $l' \in L_{\nu'}$. Отсюда следует, что для гамильтониана $H_M^{(a)}$ выполняются соотношения, получающиеся из (12) с помощью замены $H_N \rightarrow H_M^{(a)}$, $I_{\nu} \rightarrow L_{\nu}$. Кроме того, несложно проверить, что для любых L_{ν} система (13) инвариантна относительно данной замены, а система уравнений (14) инвариантна, если $|L_{\nu}| \geq \min\{|I_{\nu}|, 2\}$, и исчезает, если $|L_{\nu}| = 1 < |I_{\nu}|$. Рассуждая так же, как и в случае с H_N , и, учитывая указанную инвариантность, можно выразить решения системы уравнений в вариациях с $H_M^{(a)}$ через $f_{\nu,\alpha}$ и $g_{\alpha}^{(\nu)}$. Другими словами, для любых $\{a_{il}\}$, удовлетворяющих условиям (6), система уравнений в вариациях с гамильтонианом $H_M^{(a)}$, рассматриваемая в точке Λ_a , редуцируется к набору систем (13), (14), не зависящих от $\{a_{il}\}$.

3. Канонический базис на ростке. Каноническим базисом на инвариантном комплексном ростке r_a в точке $\Lambda_a \in \mathbb{R}_{\xi}^{2dM}$ называется набор линейно независимых векторов $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \dots, \zeta^{(dM)} \in r_a$, удовлетворяющих условиям $D_a^t \zeta^{(s)} = e^{i\omega_s t} \zeta^{(s)}$, $\langle \zeta^{(s)}, \zeta^{(s')} \rangle = \delta_{ss'}$, где D_a^t – сдвиг вдоль траекторий системы уравнений в вариациях, отвечающей гамильтониану $H_M^{(a)}$, ω_s – некоторые константы, называемые *характеристическими показателями* $\zeta^{(s)}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – эрмитова форма в ${}^{\mathbb{C}}T_{\Lambda_a} \mathbb{R}_{\xi}^{2dM}$, индуцированная кососкалярным произведением. Можно показать [3], что из условия положительности плоскости r_a следует, что все характеристические показатели $\omega_s > 0$. Выше было показано, что система уравнений в вариациях, отвечающая $H_M^{(a)}$, сводится к системам уравнений (13), (14), не зависящим от a . Элементом канонического базиса при этом

соответствуют решения $f_{\nu,\alpha}(t)$ и $g_{\alpha}^{(\nu)}(t)$ с зависимостью от времени t , сводящейся к умножению на унимодулярный множитель вида $e^{i\omega t}$, где $\omega > 0$ – константа. С помощью подстановок $f_{\nu,\alpha}(t) = e^{i\omega t} f_{\nu,\alpha}$, $g_{\alpha}^{(\nu)}(t) = e^{i\omega t} g_{\alpha}^{(\nu)}$ системы (13), (14) сводятся к алгебраическим линейным системам на собственные значения

$$\sum_{\beta=1}^{2d} \sum_{\nu'=1}^{\nu_0} \tilde{A}_{\nu\alpha\nu'\beta} f_{\nu',\beta} = \omega f_{\nu,\alpha}, \quad \sum_{\beta=1}^{2d} A_{\alpha\beta}^{(\nu)} g_{\beta}^{(\nu)} = \omega g_{\alpha}^{(\nu)}, \quad (16)$$

где матрица $\|A_{\alpha\beta}^{(\nu)}\|$ имеет вид (9),

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\nu\alpha\nu'\beta} = & -i \sum_{\alpha'=1}^{2d} J_{\alpha\alpha'} \left\{ \delta_{\nu\nu'} \left(\frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{n_{\nu},\alpha'} \partial \xi_{n_{\nu},\beta}} + (|L_{\nu}| - 1) \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{m_{\nu},\alpha'} \partial \xi_{n_{\nu},\beta}} \right) \right. \\ & \left. + (1 - \delta_{\nu\nu'}) \sqrt{|I_{\nu}| |I_{\nu'}|} \frac{\partial^2 H_N}{\partial \xi_{n_{\nu},\alpha'} \partial \xi_{n_{\nu'},\beta}} \right\}. \end{aligned}$$

У систем (13), (14) существуют наборы линейно независимых собственных векторов $\{f^{(l)}\}$ ($l = \overline{1, d\nu_0}$), и $\{g^{(\nu,k)}\}$ ($k = \overline{1, d}, \nu : |L_{\nu}| > 1$), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} [f^{(l)}, f^{(l')}] & \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{2d} \sum_{\nu=1}^{\nu_0} J_{\alpha\beta} f_{\nu,\beta}^{(l)} f_{\nu,\alpha}^{(l')} = 0, & \langle f^{(l)}, f^{(l')} \rangle &= \delta_{ll'}, \\ [g^{(\nu,k)}, g^{(\nu,k')}] & \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{2d} J_{\alpha\beta} g_{\beta}^{(\nu,k)} g_{\alpha}^{(\nu,k')} = 0, & \langle g^{(\nu,k)}, g^{(\nu,k')} \rangle &= \delta_{k,k'}. \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что из этих соотношений следует, что векторы

$$\tilde{\zeta}_{j,\alpha}^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{|L_{\nu'}|}} f_{\nu',\alpha}^{(l)}, \quad \zeta_{j,\alpha}^{(\nu,k,s)} = \delta_{\nu\nu'} u_{s\tilde{s}(j)}^{(|L_{\nu}|)} g_{\alpha}^{(\nu,k)} \quad (j \in L_{\nu'}), \quad (17)$$

где $\tilde{s}_{\nu}(j)$ – число элементов L_{ν} , меньших либо равных j , числа $u_{s\tilde{s}}^{(n)}$ определяются (15), $s = 1, \dots, |L_{\nu}| - 1$, образуют канонический базис на r_a . Их характеристические показатели равны соответственно $\tilde{\omega}_l$ и $\omega_k^{(\nu)}$, где $\tilde{\omega}_l$ – собственное значение, которому соответствует вектор $f^{(l)}$, $\omega_k^{(\nu)}$ – собственное значение, соответствующее вектору $g^{(\nu,k)}$.

4. Асимптотическая серия. Каноническому базису на комплексном ростке r_a можно поставить в соответствие по известным формулам серию асимптотических по $\text{mod } O(h^{3/2})$ собственных функций $\hat{H}_M^{(a)}$. В работе [5] показано, что применительно к рассматриваемому случаю, т.е. когда элементы канонического базиса имеют вид (17), асимптотические собственные функции могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m}(x; h) = & \frac{c}{h^{dM/4}} \exp \left\{ \frac{i}{h} \left(\tilde{S}(x - x^{(a)}) + \sum_{\nu=1}^{\nu_0} S_{\nu}(x) \right) \right\} \left(\left(\prod_{l=1}^{d\nu_0} \bar{\Lambda}_l^{n_l} \right) \cdot 1 \right) \\ & \times \prod_{\nu=1}^{\nu_0} \left\{ \left[\prod_{s=1}^{|L_{\nu}|-1} \prod_{k=1}^d \left(\sum_{s'=1}^s (\tilde{\Lambda}_{\nu,s',k} - \tilde{\Lambda}_{\nu,s+1,k}) \right)^{m_{\nu,k,s}} \right] \cdot 1 \right\}, \quad (18) \end{aligned}$$

где c – константа, независящая от h , $x = (x_1, \dots, x_M)$, $x^{(a)}$ – координаты проекции Λ_a на конфигурационное подпространство, $n_l, m_{\nu, k, s} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ – целые неотрицательные числа,

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x) &= \sum_{\alpha=1}^d \sum_{j=1}^M p_{j,\alpha}^{(a)} x_{j,\alpha} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\nu, \nu'=1}^{\nu_0} \frac{1}{\sqrt{|L_\nu||L_{\nu'}|}} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^d \tilde{M}_{\nu\alpha\nu'\alpha'} \sum_{j \in L_\nu} \sum_{j' \in L_{\nu'}} x_{j,\alpha} x_{j',\alpha'}, \quad (19) \\ S_\nu(x) &= \frac{1}{2|L_\nu|} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^d M_{\alpha\alpha'}^{(\nu)} \sum_{\substack{j, j' \in L_\nu \\ j' < j}} (x_{j,\alpha} - x_{j',\alpha})(x_{j,\alpha'} - x_{j',\alpha'}), \end{aligned}$$

где $p^{(a)}$ – координаты проекции Λ_a на импульсное подпространство, наборы чисел $\{\tilde{M}_{\nu\alpha\nu'\alpha'}\}$ и $\{M_{\alpha\alpha'}^{(\nu)}\}$ определяются из условий

$$f_{\nu, \alpha+d}^{(l)} = \sum_{\nu'=1}^{\nu_0} \sum_{\alpha'=1}^d \tilde{M}_{\nu\alpha\nu'\alpha'} f_{\nu', \alpha'}^{(l)}, \quad g_{\alpha+d}^{(\nu, k)} = \sum_{\alpha'=1}^d M_{\alpha\alpha'}^{(\nu)} g_{\alpha'}^{(\nu, k)},$$

операторы $\bar{\Lambda}_l$ и $\tilde{\Lambda}_{\nu, s, k}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_l &= \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \frac{1}{\sqrt{|L_\nu|}} \sum_{\alpha=1}^d \left\{ \frac{\sqrt{h}}{i} \bar{f}_{\nu\alpha}^{(l)} \sum_{j \in L_\nu} \frac{\partial}{\partial x_{j,\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \tilde{f}_{\nu, \alpha+d}^{(l)} \sum_{j \in L_\nu} (x_{j,\alpha} - x_{j,\alpha}^{(a)}) \right\}, \\ \tilde{\Lambda}_{\nu, s, k} &= \sum_{\alpha=1}^d \left\{ \frac{\sqrt{h}}{i} \bar{g}_{\alpha}^{(\nu, k)} \frac{\partial}{\partial x_{l_s^{(\nu)}, \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \tilde{g}_{\alpha+d}^{(\nu, k)} x_{l_s^{(\nu)}, \alpha} \right\}, \end{aligned}$$

где $l_s^{(\nu)}$ – s -й по порядку элемент в L_ν , $\tilde{f}_{\nu, \alpha+d}^{(l)} = \bar{f}_{\nu, \alpha+d}^{(l)} - \sum_{\nu', \alpha'} M_{\nu\alpha\nu'\alpha'} \bar{f}_{\nu', \alpha'}^{(l)}$, $\tilde{g}_{\alpha+d}^{(\nu, k)} = \bar{g}_{\alpha+d}^{(\nu, k)} - \sum_{\alpha'} M_{\alpha\alpha'}^{(\nu)} \bar{g}_{\alpha'}^{(\nu, k)}$.

Асимптотические собственные значения, соответствующие (18), имеют вид $E_{n, m} = H_N|_\Lambda + h \left(\sum_l \tilde{\omega}_l n_l + \sum_{\nu, k} \omega_k^{(\nu)} \sum_s m_{\nu, k, s} \right)$. В случае если $\omega_k^{(\nu)}$ составляют при каждом ν , $|L_\nu| > 1$, несоизмеримый набор и занумерованы по k в порядке возрастания, основное $\{L_\nu\}$ -антисимметрическое состояние $\Psi_M(x; h)$ серии (18), как показано в [5], определено однозначно с точностью до произвольной мультипликативной константы $c \neq 0$ и представимо в виде

$$\Psi_M(x; h) = \frac{c}{h^r} \exp \left\{ \frac{iS(x)}{h} \right\} \prod_{\nu=1}^{\nu_0} \mathcal{A}_{L_\nu} \left\{ \prod_{k=1}^d \prod_{j \in L_\nu} \left(\sum_{\alpha=1}^d \tilde{g}_{\alpha+d}^{(\nu, k)} x_{j,\alpha} \right)^{\beta_{j,k}} \right\}, \quad (20)$$

где $S(x) = \tilde{S}(x - x^{(a)}) + \sum_{\nu=1}^{\nu_0} S_\nu(x)$, $r = dM/4 + (1/2) \sum_{\nu, k, s} p_{s,k}^{(\nu)}$, $\beta_{j,k} = p_{s,k}(\omega_1^{(\nu)}, \dots, \omega_d^{(\nu)})$, где s – число элементов в $L_\nu \ni j$ меньше либо равных j , $p_{s,k}$ определяются согласно (7).

5. Многомерный аналог определителя Вандермонда. Полином по переменным $x_{j,\alpha}$, стоящий в предэкспоненте формулы (20), может быть записан как $\prod_{\nu=1}^{\nu_0} \chi_\nu(y_{L_\nu})$, где $y_{j,k} = \sum_{\alpha=1}^d \tilde{g}_{\alpha+d}^{(\nu,k)} x_{j,\alpha}$, $j \in L_\nu$, $\chi_\nu(y_{L_\nu}) = \mathcal{A}_{L_\nu} \prod_{k=1}^d \prod_{j \in L_\nu} y_{j,k}^{\beta_{j,k}}$; оператор $\mathcal{A}$ действует по переменным y_j . В одномерном случае ($d = 1$) полином $\chi_\nu(y_{L_\nu})$ пропорционален определителю Вандермонда по переменным $y_{j,k}$, $j \in L_\nu$, и может быть вычислен как $\chi_\nu(y_{L_\nu}) = (1/|L_\nu|!) \prod (y_{j,1} - y_{j',1})$, где произведение берется по всем $j, j' \in L_\nu$, $j < j'$. Обобщим эту формулу на d -мерный случай.

ЛЕММА 1. Пусть $I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}$ – набор подмножеств (8), соответствующий некоторому множеству I и несочисмеримому набору $\omega = \{\omega_k\}$, $\omega_1 < \dots < \omega_d$. Проекции полиномов $F_\omega(x_I, 0)$ и $F_\omega(x_I, 1)$, где

$$F_\omega(x_I, \varepsilon) = \prod_{k=1}^d \prod_{l_d, \dots, l_{k+1}} \prod_{l_k < l'_k} \prod_{j \in I_{l_d, \dots, l_{k+1}, l'_k}^{(k)}} \left(x_{j,k} - \frac{\varepsilon}{|I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}|} \sum_{i \in I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}} x_{i,k} \right)$$

($\varepsilon = 0, 1$), на подпространство функций, антисимметрических относительно всех перестановок $\{x_i\}$, $i \in I$, совпадают с точностью до мультипликативной не равной нулю константы: $\mathcal{A}_I F_\omega(x_I, 1) = c \mathcal{A}_I F_\omega(x_I, 0)$, $c \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Факт пропорциональности антисимметрических проекций полиномов $F_\omega(x_I, 0)$ и $F_\omega(x_I, 1)$ устанавливается достаточно просто. Суть утверждения леммы состоит в том, что для любых возможных $I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}$ константа $c \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобно принять стандартное соглашение: $\sum_{i \in A} f(i) = 0$ и $\prod_{i \in A} f(i) = 1$, если $A = \emptyset$. Проведем математическую индукцию по d . В случае $d = 1$ утверждение леммы имеет место при $c = |I|!$ и принимает вид известной формулы для определителя Вандермонда. Предположим, что лемма справедлива при всех $d < d'$. Покажем, что она справедлива и при $d = d'$.

Проектор $\mathcal{A}_I$ и полином $F_\omega(x_I, \varepsilon)$ можно записать в виде

$$\mathcal{A}_I \equiv \mathcal{A}_I \prod_{l_d=0}^n \mathcal{A}_{I_{l_d}^{(d)}}, \quad F_\omega(x_I, \varepsilon) = f(x, \varepsilon) \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, \varepsilon),$$

где n – максимальное значение l_d , при котором $I_{l_d}^{(d)} \neq \emptyset$, функция $f(x, \varepsilon)$ симметрична по каждой группе переменных $\{x_j\}$, $j \in I_{l_d}^{(d)}$, а каждая из функций $\Phi_{l_d}(x, \varepsilon)$ зависит только от переменных $\{x_j\}$, $j \in I_{l_d}^{(d)}$, соответственно. Функции $f(x, \varepsilon)$ и $\Phi_{l_d}(x, \varepsilon)$ имеют вид

$$f(x, \varepsilon) = \prod_{s < l_d} \prod_{j \in I_{l_d}^{(d)}} \left(x_{j,d} - \frac{\varepsilon}{|I_s^{(d)}|} \sum_{i \in I_s^{(d)}} x_{i,d} \right),$$

$$\Phi_{l_d}(x, \varepsilon) = \prod_{k=1}^{d-1} \prod_{l_{d-1}, \dots, l_{k+1}} \prod_{s < l_k} \prod_{j \in I_{l_d, \dots, l_{k+1}, s}^{(k)}} \left(x_{j,k} - \frac{\varepsilon}{|I_{l_d, \dots, l_{k+1}, s}^{(k)}|} \sum_{i \in I_{l_d, \dots, l_{k+1}, s}^{(k)}} x_{i,k} \right).$$

Проекция полинома $F_\omega(x_I, \varepsilon)$ на антисимметрическое подпространство может быть записана в виде $\mathcal{A}_I F_\omega(x, \varepsilon) = \mathcal{A}_I \{f(x, \varepsilon) \prod_{l_d=0}^n \mathcal{A}_{I_{l_d}^{(d)}} [\Phi_{l_d}]\}$. В силу сделанного индуктивного предположения $\mathcal{A}_{I_{l_d}^{(d)}} \Phi_{l_d}(x, 1) = c'_{l_d} \mathcal{A}_{I_{l_d}^{(d)}} \Phi_{l_d}(x, 0)$, где $c'_{l_d} \neq 0$. Следовательно, $\mathcal{A}_I F_\omega(x, 1) = c' \mathcal{A}_I \{f(x, 1) \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0)\}$, где $c' = \prod_{l_d=0}^n c'_{l_d} \neq 0$. Это означает, что утверждение леммы сводится к следующему:

$$\mathcal{A}_I \left\{ f(x, 1) \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right\} = c_0 \mathcal{A}_I \left\{ f(x, 0) \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right\}, \quad c_0 \neq 0. \quad (21)$$

Докажем его с помощью математической индукции по n (число d считается теперь фиксированным). Если $n = 0$, то $f(x, \varepsilon) \equiv 1$ и (21) имеет место при $c_0 = 1$. Предположим, что (21) выполняется для всех $n < n'$. Покажем, что (21) имеет место при $n = n'$.

Проектор $\mathcal{A}_{I_\nu}$ и функцию $f(x, \varepsilon)$ можно представить в виде $\mathcal{A}_I \equiv \mathcal{A}_I \mathcal{A}_{I \setminus I_0^{(d)}}$, $f(x, \varepsilon) = f_1(x, \varepsilon) f_2(x, \varepsilon)$, где

$$f_1(x, \varepsilon) = \prod_{l_d=1}^n \prod_{j \in I_{l_d}^{(d)}} \left(x_{j,d} - \frac{\varepsilon}{|I_0^{(d)}|} \sum_{i \in I_0^{(d)}} x_{i,d} \right),$$

$$f_2(x, \varepsilon) = \prod_{1 \leq s < l_d \leq n} \prod_{j \in I_{l_d}^{(d)}} \left(x_{j,d} - \frac{\varepsilon}{|I_s^{(d)}|} \sum_{i \in I_s^{(d)}} x_{i,d} \right).$$

Учитывая, что функция $f_1(x, \varepsilon)$ симметрична по переменным x_j , $j \in I \setminus I_0^{(d)}$, получим

$$\mathcal{A}_I \left\{ f(x, 1) \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right\} = \mathcal{A}_I \left\{ f_1(x, 1) \Phi_0(x, 0) \mathcal{A}_{I \setminus I_0^{(d)}} \left[f_2(x, 1) \prod_{l_d=1}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right] \right\}.$$

В силу индуктивного предположения существует константа $c_1 \neq 0$ такая, что

$$\mathcal{A}_{I \setminus I_0^{(d)}} \left[f_2(x, 1) \prod_{l_d=1}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right] = c_1 \mathcal{A}_{I \setminus I_0^{(d)}} \left[f_2(x, 0) \prod_{l_d=1}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right].$$

Следовательно,

$$\mathcal{A}_I \left\{ f(x, 1) \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right\} = c_1 \mathcal{A}_I \left\{ f_1(x, 1) f_2(x, 0) \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right\}, \quad c_1 \neq 0.$$

Определим для каждого $j \in I$ набор чисел $\tilde{l}_d(j), \dots, \tilde{l}_1(j)$ исходя из требования $\{j\} = I_{\tilde{l}_d(j), \dots, \tilde{l}_1(j)}^{(1)}$. Поскольку непустые множества $I_{\tilde{l}_d, \dots, \tilde{l}_1}^{(1)}$ содержат всего по одному элементу, это требование определяет набор $\tilde{l}_k(j)$ однозначно. Оператор $\mathcal{A}_I$ удовлетворяет операторному тождеству $\mathcal{A}_I \equiv \mathcal{A}_I \mathcal{A}'$, где $\mathcal{A}' = \prod_{j \in I_0^{(d)}} \mathcal{A}_{K_j}$, $K_j \equiv \bigcup_{l_d=0}^n I_{l_d, \tilde{l}_{d-1}(j), \dots, \tilde{l}_1(j)}^{(1)}$. Множества $I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}$ обладают весьма важным свойством, следующим из самого их определения: $I_{l_d, \dots, l_{s+1}, \dots, l_k}^{(k)} \neq \emptyset \implies I_{l_d, \dots, l_s, \dots, l_k}^{(k)} \neq \emptyset$.

В частности, если $I_{l_d, \dots, l_1}^{(1)} \neq \emptyset$, то $I_{0, l_{d-1}, \dots, l_1}^{(1)} \neq \emptyset$. Это означает, что для любого $j \in I_{l_d}^{(d)}$ существует единственное $j' \in I_0^{(d)}$ такое, что для всех $k \leq d-1$ имеет место равенство $\tilde{l}_k(j) = \tilde{l}_k(j')$. В качестве j' следует взять элемент множества $I_{0, \tilde{l}_{d-1}(j), \dots, \tilde{l}_1(j)}^{(1)}$. Данное свойство означает, что множество I может быть записано в виде $I = \bigcup_{j' \in I_0^{(d)}} K_{j'}$, что позволяет записать функции $f_1(x, 1)$, $f_2(x, 0)$ и произведение функций $\Phi_{l_d}(x, 0)$ в виде

$$f_1(x, 1) = \prod_{j' \in I_0^{(d)}} \prod_{j \in K_{j'} \setminus \{j'\}} \left(x_{j,d} - \frac{1}{|I_0^{(d)}|} \sum_{i \in I_0^{(d)}} x_{i,d} \right),$$

$$f_2(x, 0) = \prod_{j' \in I_0^{(d)}} \prod_{j \in K_{j'} \setminus \{j'\}} x_{j,d}^{\tilde{l}_d(j)-1}, \quad \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0) = \prod_{k=1}^{d-1} \prod_{j' \in I_0^{(d)}} \prod_{j \in K_{j'}} x_{j,k}^{\tilde{l}_k(j')}.$$

Правая часть последней формулы симметрична относительно перестановок по каждой из групп переменных x_j , $j \in K_{j'}$. Учитывая эту симметрию, получим

$$\mathcal{A}_I \left\{ f_1(x, 1) f_2(x, 0) \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right\} = \mathcal{A}_I \left\{ \left(\prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right) \mathcal{A}' \left[f_1(x, 1) f_2(x, 0) \right] \right\}.$$

Пусть множество $I_0^{(d)}$ состоит из элементов $I_0^{(d)} = \{i_1, \dots, i_m\}$, $i_s < i_{s+1}$, $m = |I_0^{(d)}|$. В этих обозначениях имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'[f_1(x, 1) f_2(x, 0)] &= \mathcal{A}' \left[\prod_{j' \in I_0^{(d)}} \prod_{j \in K_{j'}} \left(x_{j,d} - \frac{1}{m} \sum_{i \in I_0^{(d)}} x_{i,d} \right) x_{j,d}^{\tilde{l}_d(j)-1} \right] \\ &= \mathcal{A}' \left[\sum_{r_1=0}^{|K_{i_1}|-1} \cdots \sum_{r_m=0}^{|K_{i_m}|-1} \frac{(r_1 + \dots + r_m)!}{r_1! \dots r_m!} \right. \\ &\quad \times \prod_{s=1}^m \left(\left(-\frac{1}{m} x_{i_s,d} \right)^{r_s} \left(\prod_{\substack{j \in K_{i_s} \setminus \{i_s\} \\ \tilde{l}_d(j)-1 < r_s}} x_{j,d}^{\tilde{l}_d(j)-1} \right) \prod_{\substack{j' \in K_{i_s} \setminus \{i_s\} \\ \tilde{l}_d(j')-1 \geq r_s}} x_{j',d}^{\tilde{l}_d(j')} \right) \Big] \\ &= c_2 \mathcal{A}' \left[\prod_{s=1}^m \prod_{j \in K_{i_s}} x_{j,d}^{\tilde{l}_d(j)} \right] = c_2 \mathcal{A}' f(x, 0), \end{aligned}$$

где

$$c_2 = \sum_{r_1=0}^{|K_{i_1}|-1} \cdots \sum_{r_m=0}^{|K_{i_m}|-1} \frac{(r_1 + \dots + r_m)!}{r_1! \dots r_m!} \frac{1}{m^{r_1 + \dots + r_m}} > 0.$$

В итоге получаем

$$\mathcal{A}_I \left\{ f_1(x, 1) f_2(x, 0) \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right\} = c_2 \mathcal{A}_I \left\{ f(x, 0) \prod_{l_d=0}^n \Phi_{l_d}(x, 0) \right\}.$$

Утверждение (21) имеет место при $c_0 = c_1 c_2$. В утверждении леммы следует положить $c = c_0 c' = c_1 c_2 \prod_{l_d=0}^n c_{l_d}' \neq 0$.

Заметим теперь, что $\chi_\nu(y_{L_\nu}) = F_{\omega^{(\nu)}}(y_{L_\nu}, 0)$, где $\omega^{(\nu)} = \{\omega_k^{(\nu)}\}$, $\omega_{k+1}^{(\nu)} > \omega_k^{(\nu)}$. Воспользовавшись доказанной леммой, получим $\chi_\nu(y_{L_\nu}) = c F_{\omega^{(\nu)}}(y_{L_\nu}, 1)$, $c \neq 0$.

6. Квадратичная форма. Вместе с представлением предэкспоненты основного $\{L_\nu\}$ -антисимметрического состояния в виде многомерного аналога определителя Вандермонда удастся построить отвечающее ему представление для квадратичных форм (19), стоящих в показателе экспоненты. Имеет место

ЛЕММА 2. В обозначениях (8) имеет место алгебраическое тождество

$$\sum_{\substack{i,j \in I \\ i < j}} (x_j - x_i)(y_j - y_i) = \sum_{k=1}^d \sum_{l_d, \dots, l_k} |I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}| \left(\prod_{s=k+1}^d \frac{|\tilde{I}_{l_d, \dots, l_s}^{(s)}|}{|I_{l_d, \dots, l_s}^{(s)}|} \right) \\ \times \sum_{j \in \tilde{I}_{l_d, \dots, l_{k+1}, l_{k+1}}^{(k)}} \left(x_j - \frac{1}{|I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}|} \sum_{i \in I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}} x_i \right) \left(y_j - \frac{1}{|I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}|} \sum_{i \in I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)}} y_i \right), \quad (22)$$

где множество значений, которое пробегают индексы l_k , задается условиями $I_{l_d, \dots, l_k}^{(k)} \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (22) является следствием более простого тождества

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in L \cup J \\ i \neq j}} (x_j - x_i)(y_j - y_i) = \frac{|L \cup J|}{2|L|} \sum_{\substack{i,j \in L \\ i \neq j}} (x_j - x_i)(y_j - y_i) \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in J \\ i \neq j}} (x_j - x_i)(y_j - y_i) + |L| \sum_{j \in J} \left(x_j - \frac{1}{|L|} \sum_{i \in L} x_i \right) \left(y_j - \frac{1}{|L|} \sum_{i \in L} y_i \right),$$

справедливого для любой пары непересекающихся множеств L и J . Применяя эту формулу сначала к паре $I_0^{(d)}$ и $\tilde{I}_1^{(d)}$, затем к $I_1^{(d)}$ и $\tilde{I}_2^{(d)}$ и т.д., получим

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in I \\ i \neq j}} (x_j - x_i)(y_j - y_i) = \sum_{s=0}^n \frac{|\tilde{I}_s^{(d)}|}{|I_s^{(d)}|} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \in I_s^{(d)} \\ i \neq j}} (x_j - x_i)(y_j - y_i) \right\} \\ + \sum_{s=0}^n |I_s^{(d)}| \sum_{j \in \tilde{I}_{s+1}^{(d)}} \left(x_j - \frac{1}{|I_s^{(d)}|} \sum_{i \in I_s^{(d)}} x_i \right) \left(y_j - \frac{1}{|I_s^{(d)}|} \sum_{i \in I_s^{(d)}} y_i \right),$$

где n – верхний предел изменения индекса l_d , определяемый условием $I_{l_d}^{(d)} \neq \emptyset$. Сумму, стоящую в правой части полученной формулы, выделенную фигурными скобками, можно преобразовать так же, как и исходную сумму, стоящую в левой части. Поступая таким образом $d-1$ раз и учитывая в конце, что $|I_{l_d, \dots, l_1}^{(1)}| = 1$, получим утверждение леммы.

7. Структура основного $\{L_\nu\}$ -антисимметрического состояния.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для того, чтобы получить формулу (10), необходимо преобразовать полином, стоящий в предэкспоненте формулы (20) с помощью леммы 1

так, как сказано выше, а квадратичные формы $S_\nu(x)$, стоящие в показателе экспоненты, преобразовать с помощью леммы 2. В итоге получится (10), где функции F и $\Phi_{\nu,k}$ имеют вид

$$F(\eta; h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} \left(\sum_{\alpha=1}^d \sum_{\nu=1}^{\nu_0} X_{\nu, \alpha+d} \eta_{\nu, \alpha}^\Lambda + \frac{1}{2} \sum_{\nu, \nu'=1}^{\nu_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^d \widetilde{M}_{\nu \alpha \nu' \alpha'} \eta_{\nu, \alpha}^\Lambda \eta_{\nu', \alpha'}^\Lambda \right) \right\},$$

$$\Phi_{\nu, k}(x; h) = \exp \left\{ \frac{i}{2h} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^d M_{\alpha \alpha'}^{(\nu)} x_\alpha x_{\alpha'} \right\} \sum_{\alpha=1}^d (\widetilde{g}_{\alpha+d}^{(\nu, k)} x_\alpha),$$

$\eta \equiv (\eta_1, \dots, \eta_{\nu_0})$, $\eta_\nu \equiv (\eta_{\nu, 1}, \dots, \eta_{\nu, d})$, $x \equiv (x_1, \dots, x_d)$, $\eta_{\nu, \alpha}^\Lambda = \eta_{\nu, \alpha} - X_{\nu, \alpha}$, $X_{\nu, \alpha} = \sqrt{|I_\nu|} \xi_{j, \alpha}^0$, $j \in I_\nu$, где $\xi_{j, \alpha}^0$ – координаты точки $\Lambda \in \mathbb{R}_\xi^{2dN}$.

8. Обсуждение. Формула (10) означает, что основное $\{I_\nu\}$ -антисимметрическое состояние квазиклассической серии собственных функций оператора $\widehat{H}_N$, соответствующей Λ , имеет вид

$$\Psi_N = c(h) F(\tilde{x}; h) \prod_{\nu, k} \mathcal{A}_\nu \prod_{\beta=1}^{\tilde{\beta}(\nu, k)} \Phi_{\nu, k} \left(\sum_j c_{\nu, k, \beta}^j x_j; h \right),$$

где $\{c_{\nu, k, \beta}^j\}$ – некоторые константы. В работе [5] подобное выражение было названо *П-структурой*. Про числа $\tilde{\beta}(\nu, k)$ можно сказать, что они характеризуют *классические* ($h = 0$) фермионы. В настоящей работе разобран случай асимптотических функций, сосредоточенных вблизи точки. Тем не менее, формула (10) отражает более общий алгебраический факт и можно построить ее аналог для некоторых случаев, когда гамильтониану H_N соответствует частично интегрируемая динамическая система. Аналогию между формулами (2) и (10) можно условно записать в виде $\Phi(x_j - x_i) \longleftrightarrow \prod_{j \in J} \Phi_k(c(x_j - (1/|I|) \sum_{i \in I} x_i))$, где I, J – непересекающиеся подмножества, c – константа, означаяшем, что в d -мерном случае возникают некоторые вектор-функции, характеризующие различные сочетания частиц. В данной работе число частиц N считалось фиксированным, независимым от h . Случай $N \rightarrow \infty$ рассматривался в [6], где было построено обобщение вариационного принципа, сформулированного в [1].

В заключение автор выражает благодарность О. Ю. Шведову за полезное обсуждение некоторых моментов данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Маслов В. П. Об одном новом вариационном принципе для фермионов // Матем. заметки. 1997. Т. 62. №4. С. 633–634.
- [2] Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [3] Маслов В. П. Комплексный ВКБ метод в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Физматлит, 1963.
- [5] Рууге А. Э. О структуре основного антисимметрического состояния квазиклассической серии оператора Шрёдингера. Препринт физического ф-та МГУ, № 4/1999. М.: МГУ, 1999.
- [6] Рууге А. Э. Вариационный принцип для квазиклассических фермионов // Матем. заметки. (в печати).