Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Сенашов, Характеризация групп с обобщенно черниковской периодической частью, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 270–275

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:18:43

УДК 512.544

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГРУПП С ОБОБЩЕННО ЧЕРНИКОВСКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

В. И. Сенашов

Получена характеристика группы с обобщенно черниковской периодической частью сначала в классе групп без элементов порядка 2, а затем и без этого ограничения. Обобщаются на смешанные группы две теоремы автора для периодических групп.

Библиография: 16 названий.

1. Одним из основных методов исследования бесконечных групп является наложение на группу условия обрыва цепочек подгрупп. К таким условиям относятся условие примарной минимальности, условие минимальности для абелевых подгрупп и, наконец, просто условие минимальности для подгрупп. К другому виду условий конечности, не связанных с обрывом цепочек подгрупп, относятся: бинарная конечность, бипримитивная конечность, сопряженно бипримитивная конечность. Эти условия касаются конечности тех или иных двупорожденных подгрупп в группе или ее сечениях.

Напомним, что группа G называется *сопряженно бипримитивно конечной*, если для любого простого p и для каждой конечной подгруппы H из G любые два сопряженных элемента порядка p из $N_G(H)/H$ порождают конечную подгруппу (определение введено В. П. Шунковым).

Связь между условиями конечности этих двух типов исследовалась С. Н. Черниковым, В. П. Шунковым, М. И. Каргаполовым и другими авторами.

2. В данной работе также удастся связать условия указанных типов, а именно, доказать распространимость условия первого типа с системы подгрупп на всю группу (см. теоремы 1, 2) при наложении на группу условия второго типа. При этом показывается, что условие второго типа существенно для формулировок теорем и его отбрасывание нарушает справедливость их утверждений.

В теореме 1 получают характеристику группы с обобщенно черниковской периодической частью в классе групп без элементов порядка 2, а затем, в теореме 2 они охарактеризованы в классе всех групп на основе результата автора из [1].

Теоремы 1, 2 обобщают на смешанные группы теоремы 1, 3 из [2].

Группа G удовлетворяет *условию примарной минимальности*, если для любого простого p каждая цепь

$$G_1 > G_2 > \dots > G_n > \dots$$

подгрупп из G такая, что в любой разности $G_n \setminus G_{n+1}$ содержится элемент g_n с условием $g_n^{p^{k_n}} \in G_{n+1}$ для некоторого k_n , обрывается через конечное число шагов (определение принадлежит С. Н. Черникову).

Периодическая почти локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию примарной минимальности, называется *обобщенно черниковской группой*.

Термин “обобщенно черниковские группы” впервые появился в [3]. Его использование можно обосновать тем, что по теореме Я. Д. Половицкого [4] обобщенно черниковская группа G является расширением прямого произведения A квазициклических p -групп с конечным числом множителей для каждого простого числа p при помощи локально нормальной группы B , причем каждый элемент из G поэлементно не перестановочен лишь с конечным числом силовских примарных подгрупп из A . Для сравнения черниковская группа является конечным расширением прямого произведения квазициклических групп, взятых в конечном числе.

Здесь будут доказаны две теоремы, характеризующие обобщенно черниковские группы сначала в классе групп без элементов порядка два (теорема 1), а затем без этого ограничения (теорема 2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – группа без элементов второго порядка. Группа G тогда и только тогда обладает обобщенно черниковской периодической частью, когда она сопряженно бипримитивно конечна и нормализатор любой ее конечной нетривиальной подгруппы обладает обобщенно черниковской периодической частью.

ТЕОРЕМА 2. Группа тогда и только тогда обладает обобщенно черниковской периодической частью, когда она сопряженно бипримитивно конечна и нормализатор любой ее конечной нетривиальной подгруппы обладает обобщенно черниковской периодической частью.

Под *периодической частью* группы мы понимаем множество ее элементов конечного порядка, если последнее является группой.

Примеры групп С. П. Новикова, С. И. Адяна [5] и А. Ю. Ольшевского [6] показывают, что условие сопряженно бипримитивной конечности в теоремах 1, 2 существенно и его отбрасывание приводит к потере справедливости утверждений теорем.

3. Перед доказательством теорем докажем несколько вспомогательных лемм. В них изучается сопряженно бипримитивно конечная группа G без элементов порядка два, в которой нормализатор $N_G(X)$ каждой нетривиальной конечной подгруппы X из G обладает обобщенно черниковской периодической частью.

Напомним некоторые необходимые определения.

Группа G обладает *полной частью* $\tilde{G}$, если $\tilde{G}$ – абелева группа, порожденная всеми полными абелевыми подгруппами из G , и $G/\tilde{G}$ не обладает полными абелевыми подгруппами.

Элемент второго порядка называется *инволюцией*.

ЛЕММА 1. Силовские примарные подгруппы из G черниковские.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что все примарные абелевы подгруппы из G удовлетворяют условию минимальности для подгрупп. Тогда каждая силовская подгруппа из G удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп и поэтому является черниковской группой по теореме Остыловского из [7]. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Любая локально конечная подгруппа B из G обобщенно черниковская.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подгруппа B локально разрешима по знаменитой теореме Файта–Томпсона. Так как силовские подгруппы из G черниковские по лемме 1, по теореме Каргаполова [8] в этом случае периодическая локально разрешимая группа B обладает полной частью A . Если $A \neq 1$, то ясно, что A обладает конечной нетривиальной характеристической подгруппой, и тогда B – обобщенно черниковская группа по предположению.

Предположим теперь, что $A = 1$. Из теоремы из [4] следует, что каждая обобщенно черниковская подгруппа из B слойно конечна. В частности, нормализатор каждой конечной нетривиальной подгруппы из B слойно конечен, и поэтому по теореме 2 из [9] B сама слойно конечна. Таким образом, B содержится в нормализаторе некоторой конечной нетривиальной подгруппы и поэтому является обобщенно черниковской группой. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если локально конечный радикал группы G неединичен, то группа G обладает обобщенно черниковской периодической частью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что локально конечный радикал L группы G неединичен. Тогда L – обобщенно черниковская группа по лемме 2. Из слойной конечности локально нормальной подгруппы с черниковскими силовскими подгруппами (теорема Черникова, см., например, [10]) и по теореме из [4] следует, что либо L обладает нетривиальной полной частью или она слойно конечна. В обоих случаях L содержит конечную нетривиальную характеристическую подгруппу и, следовательно, по предположению G обладает обобщенно черниковской периодической частью. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Любая обобщенно черниковская подгруппа C из G содержится в максимальной обобщенно черниковской подгруппе из G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В виду упомянутой в п. 1 теоремы Половицкого обобщенно черниковская подгруппа C локально конечна. По лемме Цорна она содержится в максимальной локально конечной подгруппе V из G . Подгруппа V является обобщенно черниковской по лемме 2. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Пересечение двух различных максимальных обобщенно черниковских подгрупп из G конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что A и B – различные максимальные обобщенно черниковские подгруппы из G такие, что пересечение $D = A \cap B$ бесконечно.

Предположим сначала, что полная часть $\tilde{D}$ группы D нетривиальна. Тогда по предположению $N_G(\tilde{D})$ обладает обобщенно черниковской периодической частью H (обобщенно черниковская группа $\tilde{D}$ обладает конечной характеристической подгруппой). Так как $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ абелевы и $\tilde{D} \leq \tilde{A} \cap \tilde{B}$, то $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ содержатся в H ; следовательно, они содержатся в $\tilde{H}$. Так как обобщенно черниковская группа $\tilde{A}$ обладает конечной характеристической подгруппой, по предположению $N_G(\tilde{A})$ обладает обобщенно черниковской периодической частью A (A – максимальная обобщенно черниковская подгруппа); значит, $\tilde{B} \leq \tilde{H} \leq \tilde{A}$. Точно так же мы получаем, что $\tilde{A}$ содержится в $\tilde{B}$, а значит, $\tilde{A} = \tilde{B}$ и, следовательно, A совпадает с периодической частью B группы (группа $N_G(\tilde{B})$ обладает обобщенно черниковской периодической частью по той же причине, что и группа $N_G(\tilde{A})$). Это противоречие показывает, что $\tilde{D} = 1$ и, в частности, то, что группа D слойно конечна.

Предположим теперь, что A и B обе обладают неединичными полными частями, и пусть P и Q – неединичные силовские p - и q -подгруппы из $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ по некоторым простым p и q соответственно. Так как P – черниковская абелева нормальная подгруппа из A , фактор-группа $A/C_A(P)$ конечна по теореме Черникова как подгруппа периодической группы автоморфизмов полной абелевой черниковской группы; значит, в частности, $C_D(P)$ имеет конечный индекс в D . Аналогично, подгруппа $C_D(Q)$ имеет конечный индекс в D и, следовательно, группа $M = C_D(P) \cap C_D(Q)$ бесконечна. Более того, M слойно конечна, а значит, она обладает конечной нетривиальной характеристической подгруппой и $N_G(M)$ обладает обобщенно черниковской периодической частью N . Ясно, что P содержится в $A \cap N$ и N содержится в максимальной обобщенно черниковской подгруппе из G по лемме 4; следовательно, как и в первой части доказательства, получаем $N \leq A$. Таким образом, $Q \leq N \leq A$. Это противоречие показывает, что A и B не могут одновременно иметь нетривиальные полные части.

Предположим теперь, что $\tilde{A} \neq 1$ и, значит, $\tilde{B} = 1$ и B слойно конечна. Пусть P – нетривиальная силовская подгруппа из $\tilde{A}$ и пусть b – элемент из $B \setminus A$. Ясно, что индекс $|B : C_B(b)|$ конечен; значит, пересечение $M = C_D(P) \cap C_D(b)$ бесконечно и $N_G(M)$ обладает обобщенно черниковской периодической частью N . Как и выше, мы получим, что N содержится в A ; следовательно, $b \in N \leq A$. Противоречие. Таким образом, $\tilde{A} = \tilde{B} = 1$ и группы A и B обе слойно конечны.

Пусть $a \in A \setminus B$ и $b \in B \setminus A$. Тогда $C_D(\langle a, b \rangle)$ имеет конечный индекс в D и поэтому бесконечен. Пусть $d \neq 1$ – элемент из $C_D(\langle a, b \rangle)$. Обозначим через C периодическую часть группы $C_G(d)$. Ясно, что C содержится в $N_G(\langle d \rangle)$ и, следовательно, является обобщенно черниковской группой. Более того, $E = A \cap C$ имеет конечный индекс в A ; значит, пересечение E бесконечно. Так как C не лежит в A , то, как следует из первой части доказательства, $\tilde{C} = 1$, и поэтому группа C слойно конечна. В частности, $(b)^C$ – конечная группа и E имеет конечный индекс в $C_1 = E(b)^C$. Используя предложение 8 из [11] видим, что E содержит подгруппу конечного индекса U , которая нормализуется подгруппами A и C_1 . С другой стороны, U слойно конечна; значит, она содержит конечную нетривиальную характеристическую подгруппу и $N_G(U)$ обладает обобщенно черниковской периодической частью. Так как $A < \langle A, b \rangle \leq N_G(U)$, мы получили противоречие. Лемма доказана.

По теореме из [12] группа G содержит элемент $a \neq 1$ такой, что $C_G(a)$ не обладает черниковской периодической частью. Ясно, что периодическая часть N группы $N_G(\langle a \rangle)$ является обобщенно черниковской группой, и по лемме 4 мы можем рассмотреть максимальную обобщенно черниковскую подгруппу H из G , содержащую N . Зафиксируем за этой подгруппой обозначение H до конца доказательства теоремы 1.

Заметим, что ввиду выбора элемента a группа H не является черниковской.

ЛЕММА 6. Пусть b – неединичный элемент из H такой, что $C_H(b)$ бесконечен. Тогда периодическая часть централизатора $C_G(b)$ содержится в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – максимальная обобщенно черниковская подгруппа из G , содержащая периодическую часть группы $C_G(b)$. Тогда пересечение $H \cap M$ бесконечно по условию леммы и $H = M$ по лемме 5. Таким образом, периодическая часть централизатора $C_G(b)$ содержится в H . Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Все элементы простых порядков из H имеют бесконечные централизаторы в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что подгруппа H содержит такой элемент b простого порядка, что $C_H(b)$ конечен. Тогда централизатор нормального замыкания $\langle b^H \rangle$ в группе H элемента b также конечен. Ввиду следствия 2 Половицкого из [13] фактор-группа $H/C_H(\langle b^H \rangle)$ черниковская. Таким образом, группа H должна быть черниковской как расширение конечной группы при помощи черниковской группы. Противоречие. Лемма доказана.

4. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Необходимость условий теоремы очевидна. Докажем их достаточность. Предположим, что G – сопряженно би-примитивно конечная группа без инволюций, не обладающая обобщенно черниковской периодической частью, и для каждой нетривиальной конечной подгруппы X из G ее нормализатор $N_G(X)$ обладает обобщенно черниковской периодической частью.

По лемме 7 все элементы простых порядков из H имеют бесконечные централизаторы в H . Обозначим через M нормализатор подгруппы H в группе G . Из строения обобщенно черниковских групп и условий теоремы вытекает, что группа M обладает обобщенно черниковской периодической частью (ввиду максимальной H эта периодическая часть совпадает с H).

Пусть g – элемент из $G \setminus M$, и предположим, что $H \cap g^{-1}Hg \neq 1$. Если b – элемент простого порядка из $H \cap g^{-1}Hg$, то централизатор $C_H(b)$ бесконечен, и поэтому его периодическая часть содержится в H по лемме 6. С другой стороны, b имеет бесконечный централизатор еще и в $g^{-1}Hg$; следовательно, периодическая часть $C_G(b)$ содержится также и в $g^{-1}Hg$. Тогда пересечение $H \cap g^{-1}Hg$ бесконечно и, поэтому $g^{-1}Hg = H$ по лемме 5. Но это противоречит выбору элемента g из $G \setminus M$. Следовательно, $H \cap g^{-1}Hg = 1$ и пересечение $M \cap g^{-1}Mg$ не содержит неединичных элементов конечного порядка для любого элемента $g \in G \setminus M$. Тогда в конечной группе $\langle a, a^g \rangle$ (она конечна ввиду сопряженно би-примитивной конечности группы G) собственная подгруппа $\langle a, a^g \rangle \cap H$ составляет с H пару Фробениуса и сама $\langle a, a^g \rangle$ является группой Фробениуса по известной теореме Фробениуса. По теореме из [14] либо $G = F\lambda N_G(\langle a \rangle)$ и $G = F\lambda(a)$ – группа Фробениуса, либо элемент a содержится в конечном нормальном делителе группы G . Вторая альтернатива невозможна ввиду предположения. Значит, $G = F\lambda(a)$ – группа Фробениуса. Применяя теорему из [15], получаем, что F – периодическая группа. Теперь при помощи леммы 4.6 из [16] приходим к противоречию с единичностью локально конечного радикала группы G (он должен быть единичным при сделанных предположениях по лемме 3). Это последнее противоречие завершает доказательство теоремы 1.

Теперь чтобы доказать теорему 2, нам достаточно сослаться на следующую теорему.

ТЕОРЕМА. (Сенашов В. И. [1]) *Пусть G – группа с инволюциями, удовлетворяющая условиям:*

- 1) *любые две инволюции из G порождают конечную подгруппу;*
- 2) *нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы, содержащий инволюции, обладает обобщенно черниковской периодической частью.*

Тогда либо G обладает обобщенно черниковской периодической частью, либо G – T -группа.

Действительно, необходимость условий теоремы 2 очевидна. Докажем их достаточность. Предположим, что G – сопряженно би-примитивно конечная группа, не обладающая обобщенно черниковской периодической частью, и для каждой нетривиальной ко-

нечной подгруппы X из G ее нормализатор $N_G(X)$ обладает обобщенно черниковской периодической частью.

Ввиду теоремы 1 группа G обладает инволюциями. В то же время T -группа по определению (см., например, [1]) не может быть сопряженно бипримитивно конечной. Теперь, сославшись на приведенную выше теорему, получаем справедливость утверждения теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сенашов В. И. Характеризация обобщенно черниковских групп в группах с инволюциями // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 4. С. 577–587.
- [2] Сенашов В. И. Характеризация обобщенно черниковских групп // Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 3. С. 309–310.
- [3] Шунков В. П., Шафиро А. А. Об одной характеристике обобщенно черниковских групп // Материалы 15 Всесоюз. алгебраич. конф. Красноярск: Красноярский государственный университет, 1979. С. 185.
- [4] Половицкий Я. Д. Слоино-экстремальные группы // Матем. сб. 1962. Т. 56. № 1. С. 95–106.
- [5] Алян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
- [6] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группе. М.: Наука, 1989.
- [7] Остыловский А. Н. Локальная конечность некоторых групп с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. № 12. С. 63–73.
- [8] Каргаполов М. И. Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами // Сиб. матем. ж. 1961. Т. 2. № 6. С. 853–873.
- [9] Ivko M. N., Senashov V. I. On a new class of infinite groups // Укр. матем. ж. 1995. Т. 46. № 6. С. 760–770.
- [10] Сенашов В. И. Слоино конечные группы. Новосибирск: Наука, 1993.
- [11] Шунков В. П. О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. № 12. С. 199–225.
- [12] Сучкова Н. Г. О существовании периодической части в некоторых бесконечных группах // Тезисы докладов Междун. конф. (Санкт-Петербург, Россия, 24–30 июня 1997 г.). С. 288.
- [13] Половицкий Я. Д. О локально экстремальных и слоино-экстремальных группах // Матем. сб. 1962. Т. 58. № 2. С. 685–694.
- [14] Созутов А. И., Шунков В. П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб. 1976. Т. 100. № 4. С. 495–508.
- [15] Созутов А. И., Шунков В. П. О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами. 2 // Алгебра и логика. 1979. Т. 18. № 2. С. 206–223.
- [16] Шунков В. П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992.

Институт вычислительной математики СО РАН,
г. Красноярск

Поступило
17.02.1999
Исправленный вариант
15.09.1999