Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, Гладкость и эйлерова характеристика многообразия полных пар X_{23} нульмерных подсхем длины 2 и 3 алгебраической поверхности, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 276–287

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 08:40:28

УДК 517.2

ГЛАДКОСТЬ И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА МНОГООБРАЗИЯ ПОЛНЫХ ПАР X_{23} НУЛЬМЕРНЫХ ПОДСХЕМ ДЛИНЫ 2 И 3 АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Н. В. Тимофеева

В работе проверяется справедливость гипотезы А. С. Тихомирова о гладкости многообразий полных пар X_{23} нульмерных подсхем гладкой неприводимой проективной алгебраической поверхности и вычисляется его топологическая эйлерова характеристика в случае $\mathcal{S} = \mathbf{P}^2$.

Библиография: 5 названий.

0. Введение. Целью настоящей заметки является проверка в случае $d_1 = 2, d_2 = 3$ справедливости гипотезы А. С. Тихомирова [1] о гладкости многообразий полных пар $X_{d_1 d_2}$ нульмерных подсхем гладкой неприводимой проективной алгебраической поверхности, а также вычисление его топологической эйлеровой характеристики для $\mathcal{S} = \mathbf{P}^2$.

Пусть $\mathcal{S}$ – гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики, и H_d – схема Гильберта нульмерных подсхем длины d в $\mathcal{S}$, где длина нульмерной подсхемы Z определяется как $l(Z) = \chi(\mathcal{O}_Z)$. Образует произведение $H_{d_1} \times H_{d_2}$ и рассмотрим в нем график инцидентности

$$\Gamma_{d_1 d_2} = \{(z_1, z_2) \in H_{d_1} \times H_{d_2} \mid Z_{d_1} \cap Z_{d_2} \neq \emptyset\}$$

со структурой приведенной подсхемы. Здесь z_d означает точку в схеме Гильберта H_d , $d = d_1, d_2$, соответствующую подсхеме Z_d длины d в $\mathcal{S}$.

Следуя [1], назовем *многообразием полных пар* $X_{d_1 d_2}$ раздутие $H_{d_1} \times H_{d_2}$ с центром $\Gamma_{d_1 d_2}$, и пусть $\sigma: X_{d_1 d_2} \rightarrow H_{d_1} \times H_{d_2}$ – соответствующий морфизм раздутия.

Так как $\text{codim } \Gamma_{d_1 d_2} = 2$, то

$$D := \{(z_{d_1}, z_{d_2}) \in H_{d_1} \times H_{d_2} \mid \text{Supp } Z_{d_1} \cap \text{Supp } Z_{d_2} = \emptyset\}$$

– плотное открытое множество в $X_{d_1 d_2}$, и $\dim T_{(z_{d_1}, z_{d_2}, z)} X_{d_1 d_2} = 2(d_1 + d_2)$ для $(z_{d_1}, z_{d_2}) \in D$. Имеет место следующая естественная стратификация многообразия $X_{d_1 d_2}$:

$$S^{(0)} := X_{d_1 d_2},$$

$$S^{(1)} := \sigma^{-1}(\Gamma_{d_1 d_2}) \subset S^{(0)},$$

$$S^{(2)} := \{(z_{d_1}, z_{d_2}) \in H_{d_1} \times H_{d_2} \mid \text{Supp } Z_{d_1} = \text{Supp } Z_{d_2} = \{\text{точка}\}\} \subset S^{(1)}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант INTAS-OPEN № 97-2072.

Случай $x = (z_{d_1}, z_{d_2}, z) \in S^{(1)} - S^{(2)}$ сводится к добавлению точки, если $\text{Supp } Z_{d_1} \cap \text{Supp } Z_{d_2} = \{\text{точка}\}$ (ситуация, изученная А. С. Тихомировым [1], Г. Эллингсрудом, Дж. Чи [2]), либо к случаю меньших длин; в частности, если $d_1 = 2, d_2 = 3$, то происходит редукция к X_{22} , рассмотренному в [1]. Представляет интерес случай $x \in S^{(2)}$; $S^{(2)}$ – это многообразие бифлагов $\Gamma_{d_1 d_2 d}$ подсхем $Z_{d_1} \subset Z_{d_1+d_2} \supset Z_{d_2}$ с носителем в точке. В настоящей заметке получен следующий результат.

ТЕОРЕМА. *Многообразие полных пар X_{23} нульмерных подсхем гладкой проективной алгебраической поверхности гладко. В случае $\mathcal{S} = \mathbf{P}^2$ его топологическая эйлерова характеристика равна $\chi_{\text{top}}(X_{23}) = 393$.*

1. Касательное пространство к многообразию в точках $S^{(2)}$. Пусть Z_{d_1} задается в окрестности $U \subset \mathcal{S}$ носителя $\text{Supp } Z_{d_1}$ идеалом I_{d_1} , Z_{d_2} – идеалом I_{d_2} , $Z_{d_1+d_2}$ – идеалом I . Имеют место следующие отношения включения:

$$I_{d_1} I_{d_2} \subset I \subset I_{d_1} \cap I_{d_2}.$$

Искомое касательное пространство является подпространством в касательном пространстве к произведению $T_x(H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}) = T_{z_{d_1}} H_{d_1} \oplus T_{z_{d_2}} H_{d_2} \oplus T_{z_{d_1+d_2}} H_{d_1+d_2}$. Касательное пространство к схеме Гильберта $T_{z_d} H_d$ суть $\text{Hom}(I_d, R/I_d)$. Так как вопрос о гладкости по существу локален, можно заменить $\mathcal{S}$ на аффинную окрестность $U \simeq \mathbb{A}^2$ носителя подсхем Z_{d_1} и Z_{d_2} на $\mathcal{S}$ и положить $R = k[x, y]$, где x, y – локальные координаты в U .

Для получения уравнений искомого касательного пространства рассмотрим, например, включение $I \subset I_{d_1}$. Оно индуцирует сюръекцию $R/I \rightarrow R/I_{d_1}$ и отображения групп гомоморфизмов

$$\begin{aligned} \varphi_{d_1} &: \text{Hom}(I, R/I) \rightarrow \text{Hom}(I, R/I_{d_1}), \\ \psi_{d_1} &: \text{Hom}(I_{d_1}, R/I_{d_1}) \rightarrow \text{Hom}(I, R/I_{d_1}), \\ \theta_{d_1} = \varphi_{d_1} - \psi_{d_1} &: \text{Hom}(I, R/I) \oplus \text{Hom}(I_{d_1}, R/I_{d_1}) \rightarrow \text{Hom}(I, R/I_{d_1}). \end{aligned}$$

Условие принадлежности элемента $f \in I$ идеалу I_{d_1} дает

$$\eta(f) - \eta_{d_1}(f) \equiv 0 \pmod{I_{d_1}} \quad \forall \eta \in \text{Hom}(I, R/I), \quad \forall \eta_{d_1} \in \text{Hom}(I_{d_1}, R/I_{d_1}). \quad (1)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \varphi_{d_2} &: \text{Hom}(I, R/I) \rightarrow \text{Hom}(I, R/I_{d_2}), \\ \psi_{d_2} &: \text{Hom}(I_{d_2}, R/I_{d_2}) \rightarrow \text{Hom}(I, R/I_{d_2}), \\ \theta_{d_2} = \varphi_{d_2} - \psi_{d_2} &: \text{Hom}(I, R/I) \oplus \text{Hom}(I_{d_2}, R/I_{d_2}) \rightarrow \text{Hom}(I, R/I_{d_2}), \\ \eta(f) - \eta_{d_2}(f) &\equiv 0 \pmod{I_{d_2}} \quad \forall \eta \in \text{Hom}(I, R/I), \quad \forall \eta_{d_2} \in \text{Hom}(I_{d_2}, R/I_{d_2}). \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, имеется включение $I_{d_1} I_{d_2} \subset I$. Оно дает замкнутое условие на $X_{d_1 d_2}$.

Обозначим посредством X произведение $H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$ и рассмотрим проекции

$$\mathcal{S} \xleftarrow{q} \mathcal{S} \times X \xrightarrow{p} X.$$

Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ – универсальные циклы в $\mathcal{S} \times X$ с пучками идеалов $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}$, соответствующие подсхемам Z_{d_1}, Z_{d_2}, Z . Согласно теоремам А и В Серра (относительный вариант) существует обильный пучок $\mathcal{L}$ на $\mathcal{S}$ такой, что $R^i p_*(\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \otimes q^* \mathcal{L}) = 0$ при $i > 0$ и морфизм вычисления $p^* p_*(\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \otimes q^* \mathcal{L}) \xrightarrow{ev} \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \otimes q^* \mathcal{L}$ сюръективен. Заметим, что пучок $F := p_*(\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \otimes q^* \mathcal{L})$ локально свободен как $\mathcal{O}_X$ -модуль. Пусть ψ – сквозное отображение

$$p^* F \xrightarrow{ev} \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \otimes q^* \mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_\Gamma \otimes q^* \mathcal{S}.$$

Применяя к нему функтор p_* , получим $p_* \psi: F \rightarrow p_*(\mathcal{O}_\Gamma \otimes q^* \mathcal{L})$. Здесь пучок $E := p_*(\mathcal{O}_\Gamma \otimes q^* \mathcal{L})$ локально свободен ранга $d_1 + d_2$.

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения: $\psi_x := \psi|_{\mathcal{S} \times \{x\}}$, $F(x) := F \otimes k(x)$, $Z_x := \Gamma|_{\mathcal{S} \times \{x\}}$.

Надо проверить замкнутость множества

$$\begin{aligned} M := & \{x \in X \mid \psi_x: F(x) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_x} \otimes \mathcal{L} \text{ – нулевой морфизм}\} \\ & = \{x \in X \mid \varphi|_{\mathcal{S} \times \{x\}}: \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2|_{\mathcal{S} \times \{x\}} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_x} \text{ – нулевой морфизм}\}; \end{aligned}$$

ψ_x включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F(x) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\bar{\psi}_x} & H^0(\mathcal{O}_{Z_x} \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \\ & \searrow \psi_x & \downarrow ev \\ & & \mathcal{O}_{Z_x} \otimes \mathcal{L} \end{array}.$$

При этом $\psi_x = 0$ эквивалентно $\bar{\psi}_x = 0$. Применяя к $H^0(\mathcal{O}_{Z_x} \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ изоморфизм замены базы, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F(x) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\bar{\psi}_x} & H^0(\mathcal{O}_{Z_x} \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \\ \parallel & & \uparrow bch \simeq \\ F|_{\mathcal{S} \times \{x\}} & \xrightarrow{p^*(p_* \psi|_{\{x\}})} & p^* E|_{\mathcal{S} \times \{x\}} \end{array}.$$

Отсюда следует, что $\bar{\psi}_x = 0$ эквивалентно $p_* \psi|_{\{x\}} = 0$. Морфизм $p_* \psi|_{\{x\}}$ представляет собой морфизм локально свободных пучков, множество нулей которого M замкнуто.

Итак, существует гомоморфизм

$$\theta: \text{Hom}(I, R/I) \oplus \text{Hom}(I_{d_1}, R/I_{d_1}) \oplus \text{Hom}(I_{d_2}, R/I_{d_2}) \rightarrow \text{Hom}(I_{d_1} I_{d_2}, R/I).$$

Пусть f_{d_1}, f_{d_2} – образующие идеалов I_{d_1} и I_{d_2} , взятые по одной из каждого. Условие принадлежности элемента $f_{d_1} f_{d_2}$ идеалу I дает

$$\eta_{d_1}(f_{d_1}) f_{d_2} + f_{d_1} \eta_{d_2}(f_{d_2}) - \eta(f_{d_1} f_{d_2}) \equiv 0 \pmod{I}. \quad (3)$$

В дальнейшем для краткости будем обозначать

$$T := \text{Hom}(I, R/I), \quad T_{d_1} := \text{Hom}(I_{d_1}, R/I_{d_1}), \quad T_{d_2} := \text{Hom}(I_{d_2}, R/I_{d_2}).$$

2. Алгоритм для базисов. Для вычисления локальных уравнений касательно пространства к многообразию полных пар в точках, соответствующих подсхемам с носителем в точке, требуется знать базисы T, T_2, T_{d_2} . Алгоритм для их получения дан в [2]. Приведем здесь некоторые результаты из [2], необходимые для дальнейшего. Чтобы описать R -гомоморфизм $f: I \rightarrow R/I$, надо указать класс, в который переходит каждая образующая I . В дальнейшем ограничимся $k = \mathbb{C}$; согласно принципу Лефшеца, все результаты, полученные для $\mathbb{C}$, верны и для любого поля k нулевой характеристики. Как и в [2], будут рассматриваться только мономиальные идеалы. Это не ограничивает общности, так как верна следующая

ЛЕММА 1. Пусть $I_1, I_2, \dots, I_l$ – набор идеалов, задающих подсхемы длины $d_1, d_2, \dots, d_l$ на проективной алгебраической поверхности $\mathcal{S}$. Тогда существует (локально) действие одномерной диагональной подгруппы $T \simeq \mathbb{C}^*$ группы тора $\mathbb{C}^{*2} \subset \mathrm{GL}(3)$ на $\mathcal{S}$ такое, что при индуцированном его действии на открытом подмножестве $H_{d_1} \times H_{d_2} \times \dots \times H_{d_l}$ предельная (неподвижная) точка соответствует набору подсхем, задаваемых мономиальными идеалами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду локальности ситуации будем считать аффинную окрестность $U \subset \mathcal{S}$ вложенной как аффинную плоскость в $\mathbf{P}^2$ и рассматривать действия

$$(m, n): \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_0 \\ t^{-m} x_1 \\ t^{-n} x_2 \end{bmatrix} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

В аффинной карте $U = \{x_0 \neq 0, x = x_1/x_0, y = x_2/x_0\}$ это действие дает

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} t^{-m} x_1 \\ t^{-n} x_2 \end{bmatrix}.$$

Результат действия тора (m, n) на образующую $f^{(k)}(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$ идеала I_k суть $(m, n)f^{(k)}(x, y) = \sum a_{ij} t^{im+jn} x^i y^j$. При $t = 0$ эта образующая переходит в сумму членов $\sum a_{ij} x^i y^j$, удовлетворяющих условию минимальности $im + jn = \min$. Покажем, что существует действие (m, n) такое, что $im + jn$ минимизируется при единственных i и j для каждой образующей $f^{(k)}$ каждого идеала I_k . Каждый моном $x^i y^j$ изображается точкой в плоскости переменных i, j . Проведем прямые через все пары таких точек, соответствующих мономам каждой образующей. Вычисляем угловые коэффициенты $\kappa = -n/m$. В качестве параметров искомого действия можно взять любые n', m' такие, что $n'/m' \in \mathbb{Q} - \{n/m \mid -n/m = \kappa - \text{угловой коэффициент некоторой прямой}\}$.

В работе Бриансона [3] приведена классификация подсхем с носителем в точке с точностью до аналитического преобразования. При этом аналитические типы подсхем длины 2, 3 задаются мономиальными идеалами. Вместе с тем, существуют немономиальные аналитические типы идеалов кодлинны 5, но они специализируются подходящими диагональными действиями (m, n) одномерного тора в мономиальные идеалы, а именно:

$$(m, n): (y^2 + x^3, xy) \mapsto \begin{cases} (x^3, xy, y^3) & \text{при } 3m < 2n, \\ (x^4, xy, y^2) & \text{при } 3m > 2n, \end{cases}$$

$$(m, n): (y^2 + x^2, x^2 y, x^3) \mapsto \begin{cases} (x^3, x^2 y, y^2) & \text{при } m > n, \\ (x^2, xy^2, y^3) & \text{при } m < n. \end{cases}$$

Действие тора сохраняет отношение инцидентности, поэтому включения $I_2 I_3 \subset I \subset I_2 \cap I_3$ сохраняются вдоль орбиты действия тора. Указанные действия не меняют длин подсхем, задающих классы аналитической эквивалентности. Поэтому любая схема длины 5 может быть приведена к схеме, задаваемой мономиальным идеалом, с помощью аналитического автоморфизма кольца формальных степенных рядов $k[[x, y]]$ и подходящего действия тора. При этом преобразования обоих типов индуцируют изоморфизмы касательных пространств в точках порождаемых ими семейств. Таким образом, для доказательства гладкости многообразия X_{23} достаточно проверить его гладкость в точках, задаваемых наборами мономиальных идеалов.

Далее, пусть S – подмножество таких элементов в $\text{Hom}(I, R/I)$, которые переводят канонические образующие I либо в 0, либо в классы мономов по модулю I . Если A означает множество канонических образующих I , а B – множество мономов, не лежащих в I , то каждый элемент $f \in S$ определяется как отображение $f: A \rightarrow B$. Если $\alpha \in A, \beta \in B$, то положим $S_{\alpha\beta} := \{f \in S \mid f(\alpha) = \beta\}$. Пусть $f_{\alpha\beta}$ – единственный гомоморфизм в $S_{\alpha\beta}$, переводящий максимальное число канонических образующих в 0. Будем строить базис $\text{Hom}_R(I, R/I)$, состоящий из элементов вида $f_{\alpha\beta}$.

Мономиальные идеалы удобно изображать диаграммами Юнга; на такой диаграмме образующие $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ лежат в углах дополнения, а представители классов R/I – внутри диаграммы.

Пусть p_j означает расстояние по вертикали между α_j и α_{j+1} , а q_i – расстояние по горизонтали между α_j и α_{j-1} . Для любого $\alpha = \alpha_t \in A$ пусть P_α – подмножество в B , состоящее из элементов $b \in B$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) b находится слева от α ;
- 2) $y^{p_i} b \in I$.

Также пусть Q_α – подмножество в B , состоящее из элементов $b \in B$, удовлетворяющих условиям:

- 1) b находится выше α ;
- 2) $x^{q_i} b \in I$.

Определяющее значение имеют следующие две леммы.

ЛЕММА 2 [2, лемма 5.1]. *Если $\beta \in P_\alpha$ или $\beta \in Q_\alpha$, то $S_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.*

ЛЕММА 3 [2, предложение 5.4]. *Множество $\{f_{\alpha\beta} \mid \alpha \in A, \beta \in P_\alpha \cup Q_\alpha\}$ образует базис касательного пространства $\text{Hom}(I, R/I)$.*

3. Вычисления. Все возможные случаи выбора идеалов I_2, I_3, I естественно подразделить на три группы.

$$1. I_2 = (x^2, y), I_3 = (x^3, y), I_2 I_3 = (x^5, x^2 y, y^2).$$

Возможны три вида идеалов кодлины 5:

$$1.1. I = (x^3, x^2 y, y^2); 1.2. I = (x^4, xy, y^2); 1.3. I = (x^5, y).$$

$$2. I_2 = (x^2, y), I_3 = (x^2, xy, y^2), I_2 I_3 = (x^4, x^2 y, xy^2, y^3).$$

Возможны четыре вида идеалов кодлины 5:

$$2.1. I = (x^2, xy^2, y^3); 2.2. I = (x^3, x^2 y, y^2); 2.3. I = (x^4, xy, y^2); 2.4. I = (x^3, xy, y^3).$$

$$3. I_2 = (x, y^2), I_3 = (x^3, y), I_2 I_3 = (x^4, xy, y^3).$$

Возможны два вида идеалов кодлины 5:

$$3.1. I = (x^3, xy, y^3); 3.2. I = (x^4, xy, y^2).$$

Как будет показано в разделе 4, достаточно проверить гладкость многообразия X_{23} в точке, соответствующей случаю 2.1.

Базис пространства T_2 образован следующими гомоморфизмами:

$$\begin{aligned} f_1: \begin{bmatrix} x^2 \\ y \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, & f_2: \begin{bmatrix} x^2 \\ y \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \\ f_3: \begin{bmatrix} x^2 \\ y \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix}, & f_4: \begin{bmatrix} x^2 \\ y \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{x} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Произвольный вектор $\eta_2 \in T_2$ суть линейная комбинация

$$T_2 \ni \eta_2 = \sum_{i=1, \dots, 4} z_i f_i, \quad z_i \in k.$$

Для T_3 имеем $P_{x^2} \cup Q_{x^2} = P_{xy} \cup Q_{xy} = P_{y^2} \cup Q_{y^2} = \{x, y\}$ и базис

$$\begin{aligned} f_{11}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, & f_{12}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, & f_{13}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \\ f_{21}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{y} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, & f_{22}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{x} \end{bmatrix}, & f_{23}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Произвольный вектор $\eta_3 \in T_3$ – это линейная комбинация

$$T_3 \ni \eta_3 = \sum_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}} y_{ij} f_{ij}, \quad y_{ij} \in k.$$

Для пространства T в случае 2.1 имеем

$$P_{x^2} \cup Q_{x^2} = \{x, y, xy, y^2\}, \quad P_{xy^2} \cup Q_{xy^2} = P_{y^3} \cup Q_{y^3} = \{x, xy, y^2\}$$

и базис

$$\begin{aligned} e_{11}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, & e_{12}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, & e_{13}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{x}\bar{y} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \\ e_{14}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{y}^2 \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, & e_{15}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \\ e_{21}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{x}\bar{y} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, & e_{22}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{y}^2 \\ \bar{0} \end{bmatrix}, & e_{23}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{x} \end{bmatrix}, \\ e_{24}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{x}\bar{y} \end{bmatrix}, & e_{25}: \begin{bmatrix} x^2 \\ xy^2 \\ y^3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{y}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Произвольный вектор $\eta \in T$ суть линейная комбинация

$$T \ni \eta = \sum_{\substack{i=1,2 \\ j=1,\dots,5}} x_{ij} e_{ij}, \quad x_{ij} \in k.$$

Согласно (1) имеем

$$z_1 = 0, \quad x_{11} - z_2 = 0, \quad x_{15} = 0, \quad x_{23} = 0,$$

согласно (2)

$$x_{11} - y_{11} = 0, \quad x_{12} - y_{12} = 0, \quad x_{15} = 0, \quad x_{23} = 0$$

и согласно (3)

$$\begin{aligned} x_{11} - y_{11} &= 0, & x_{12} - y_{12} &= 0, & z_1 &= 0, & x_{15} &= 0, \\ x_{21} - y_{23} - z_3 &= 0, & x_{22} - y_{21} &= 0, & z_1 &= 0, & x_{15} &= 0, \\ x_{24} - y_{22} &= 0, & x_{25} - y_{23} - z_3 &= 0, & x_{15} &= 0, & x_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Всего десять независимых уравнений; исследуемое многообразие в этой точке неособо.

4. Специализации. Здесь доказывается гладкость более общих точек многообразия X_{23} , соответствующих наборам мономиальных идеалов. Если некоторая точка имеет своей специализацией неособую точку, то она неособа. Иначе особенности составляли бы открытое множество, чего быть не может. Рассмотрим семейство идеалов $I_t = (x^3, (x - ty)^2, x^2(x - ty))$. При $t \in (0, \infty)$ все идеалы этого семейства имеют тип (x^3, x^2y, y^2) . Теперь определим, какого типа идеал $I_0 = I_t|_{t=0}$:

$$x^2 - 2txy + t^2y^2 \equiv 0 \pmod{I_t} \implies xy^2 \equiv 0 \pmod{I_t}, \quad y^3 \equiv 0 \pmod{I_t}, \quad x^2y \equiv 0 \pmod{I_t}$$

при $t \neq 0$. Далее, по универсальному свойству схемы Гильберта всякая пунктированная кривая в H_d может быть компактифицирована. Соответственно, $I_0 = (x^2, xy^2, y^3)$.

Поэтому точка в H_5 , соответствующая идеалу типа (x^2, xy^2, y^3) , является специализацией точки, заданной идеалом (x^3, x^2y, y^2) . Будем обозначать это $(x^3, x^2y, y^2) \rightarrow (x^2, xy^2, y^3)$. Таким образом, в X_{23} имеем

$$((x^2, y), (x^2, xy, y^2), (x^3, x^2y, y^2)) \rightarrow ((x^2, y), (x^2, xy, y^2), (x^3, xy^2, y^3)).$$

Для этого рассмотрим семейство

$$\mathcal{J}_t = ((x^2, x - ty), (x^2, x(x - ty), (x - ty)^2), (x^3, x^2(x - ty), (x - ty)^2)).$$

Очевидно, требуемые включения $I_{2t}I_{3t} \subset I_t \subset I_{2t} \cap I_{3t}$ соблюдены при всяком t .

Согласно проделанным вычислениям точка, отвечающая 2.2, имеет точку, отвечающую 2.1, своей специализацией и, следовательно, является гладкой. Известно также, что в H_3 $(x^3, y) \rightarrow (x^2, xy, y^2)$. Поэтому

$$((x^2, y), (x^3, y), (x^4, xy, y^2)) \rightarrow ((x^2, y), (x^2, xy, y^2), (x^2, xy^2, y^3)).$$

В самом деле, в семействе

$$\mathcal{J}_t = ((x^2, ty - x^2), (x^3, ty - x^2), (x^4, x(ty - x^2), (ty - x^2)^2))$$

получаем при $t = 0$

$$\mathcal{J}_0 = ((x^2, y), (x^2, xy, y^2), (y^3, xy^2, x^2)).$$

Точка, соответствующая 1.2, неособа, так как специализируется в неособую точку, отвечающую 2.1.

Не прибегая к прямым вычислениям, можно показать, что точки, отвечающие 1.1, 1.3, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2, неособы. В самом деле, для проверки 1.1 рассмотрим семейство

$$\mathcal{J}_t = ((x^2, y), (x^3, ty - x^2), (x^3, x^2(ty - x^2), (ty - x^2)^2)).$$

Полагая $t = 0$, получим $\mathcal{J}_0 = ((x^2, y), (x^2, xy, y^2), (x^3, x^2y, y^2))$, т.е. 1.1 специализируется в 2.2.

Специализация 1.3 в гладкую точку из 2.1 также имеет место:

$$((x^2, y), (x^3, y), (x^5, y)) \rightarrow ((x^2, y), (x^2, xy, y^2), (x^2, xy^2, y^3))$$

в семействе $\mathcal{J}_t = ((x^2, ty - x^2), (x^3, ty - x^2), (x^5, ty - x^2))$. В самом деле, $\mathcal{J}_0 = ((x^2, y), (x^2, xy, y^2), (x^2, xy^2, y^3))$, потому что $xy^2 \equiv 0 \pmod{I_t}$, $y^3 \equiv 0 \pmod{I_t}$. Требуемые включения выполнены.

В случае 2.3 возьмем семейство

$$\mathcal{J}_t = ((x^2, y), (x^2, xy, y^2), (x^4, x(ty - x^2), (ty - x^2)^2)).$$

При $t \rightarrow 0$ оно переходит в $\mathcal{J}_0 = ((x^2, y), (x^2, xy, y^2), (x^3, x^2y, y^2))$, т.е. 2.3 специализируется в 2.2.

Для анализа 2.4 рассмотрим семейство

$$\mathcal{J}_t = (((tx - y)^2, y), ((tx - y)^2, (tx - y)y, y^2), ((tx - y)^3, (tx - y)y, y^3)).$$

При $t \rightarrow 0$ оно переходит в $\mathcal{J}_0 = ((x^2, y), (x^2, xy, y^2), (x^3, x^2y, y^2))$. Действительно, для идеалов кодлыны 2 и 3 это тривиально. При $I_t = ((tx - y)^3, (tx - y)y, y^3)$ имеем

$$\begin{aligned} txy &\equiv y^2 \pmod{I_t}, & t^2x^2y &\equiv txy^2 \equiv y^3 \equiv 0 \pmod{I_t}, \\ t^3x^3 &\equiv 3t^2x^2y - 3txy^2 + y^3 \equiv 0 \pmod{I_t}. \end{aligned}$$

Следовательно, 2.4 специализируется в 2.2.

Далее

$$((x, y^2), (x^3, y), (x^3, xy, y^3)) \rightarrow ((x, y^2), (x^2, xy, y^2), (x^2, xy^2, y^3)),$$

т.е. 3.1 специализируется в 2.2. Действительно, рассмотрим семейство

$$\mathcal{J}_t = ((x, y^2), (x^3, ty - x^2), (x^3, x(ty - x^2), (ty - x^2)^3)).$$

Отсюда следует, что $\mathcal{J}_0 = ((x, y^2), (x^2, xy, y^2), (x^3, xy, y^3))$. Тем самым, 3.1 специализируется в точку 2.4.

Для специализации $((x, y^2), (x^3, y), (x^4, xy, y^2)) \rightarrow ((x, y^2), (x^2, xy, y^2), (x^2, xy^2, y^3))$ рассмотрим семейство

$$\mathcal{J}_t = ((x, y^2), (x^3, ty - x^2), (x^4, x(ty - x^2), (ty - x^2)^2)).$$

При $t = 0$ $\mathcal{J}_0 = ((x, y^2), (x^2, xy, y^2), (x^3, x^2y, y^2))$. Это дает специализацию 3.2 в 2.1. Теперь гладкость X_{23} полностью доказана.

5. X_{23} и действия тора. Пусть $\mathcal{S} = \mathbf{P}^2$. На $\mathbf{P}^2$ определено действие одномерной диагональной подгруппы T полной группы тора, задаваемое для всякого $\tau \in T$ как

$$\tau * \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & t^{-m} & \\ & & t^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad 1 < m < n.$$

Тогда T действует на мономах как $\tau * x_0^i x_1^j x_2^k = t^{mj+nk} x_0^i x_1^j x_2^k$, и это действие продолжается по линейности на кольцо многочленов $k[x_0 : x_1 : x_2]$. Таким образом, имеется действие T на множестве идеалов кодлины d кольца $k[x_0 : x_1 : x_2]$ и, тем самым, индуцированное действие на H_d и на произведении $X = H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_d$, $d = d_1 + d_2$. Многообразие полных пар $X_{d_1 d_2}$ вложено как подмногообразие в X , инвариантное относительно действий тора. В самом деле, действие всякой алгебраической группы G на многообразии V суть морфизм $\alpha_T: G \times V \rightarrow V$. Надо показать, что образ при α_T многообразия $X_{d_1 d_2}$ $\alpha_T(X_{d_1 d_2}) \subset X_{d_1 d_2}$. Пусть $\tau \in T^*$, где T^* – подмножество элементов T , отвечающих ненулевым значениям параметра t . Тогда, очевидно, $\forall p \in X_{d_1 d_2} \tau * p \in X_{d_1 d_2}$. Образ морфизма $\alpha_T|_{t \neq 0, X_{d_1 d_2}}: T^* \times X_{d_1 d_2} \rightarrow X$ содержит открытое подмножество, плотное в замыкании $\alpha_T(T^* \times X_{d_1 d_2})$. Следовательно, $\alpha_T(T \times X_{d_1 d_2}) \subset X_{d_1 d_2}$. Таким образом, на многообразии полных пар $X_{d_1 d_2}$ определено индуцированное действие T .

Согласно [4] и [5, гл. 19] топологическая эйлерова характеристика $\chi_{\text{top}}(X_{d_1 d_2})$ определяется числом неподвижных точек при действии тора на $X_{d_1 d_2}$. Неподвижные точки изолированы, и их несложно перечислить в силу следующей леммы.

ЛЕММА 4. *Существует действие тора на $\mathbf{P}^2$ с параметрами m, n такое, что точка (z_{d_1}, z_{d_2}, z_d) неподвижна тогда и только тогда, когда подсистемы Z_{d_1}, Z_{d_2}, Z_d задаются мономиальными идеалами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, образующая идеала всякой подсистемы длины d имеет степень не выше d . Следовательно, под действием тора с $m = 1, n \geq d + 1$ всякая точка с немономиальным набором идеалов перемещается.

Таким образом, взяв $m = 1, n \geq 6$ для $d_1 = 2, d_2 = 3$, получим, что все неподвижные точки многообразия X_{23} при таком действии тора задаются наборами идеалов с мономиальными образующими. Поэтому все неподвижные точки характеризуются наборами диаграмм Юнга подсхем с носителями в трех неподвижных точках $\mathbf{P}^2$ с координатами $p_0 = (1 : 0 : 0), p_1 = (0 : 1 : 0), p_2 = (0 : 0 : 1)$.

Имеют место следующие типы неподвижных точек.

1. $Z_2 = \{p_i, p_j\}$, $Z_3 = \{p_0, p_1, p_2\}$, $Z_5 = Z_2 \cup Z_3$, двоеточия ориентированы вдоль инвариантной прямой $(p_i p_j)$.
2. Аналогично 1, но двоеточия ориентированы вдоль прямых $(p_k p_i)$ и $(p_k p_j)$.
3. Аналогично 1, но двоеточия ориентированы вдоль прямых $(p_k p_i)$ и $(p_i p_j)$.
4. Z_2 – двоеточие в точке p_i , ориентированное вдоль $(p_i p_j)$, $Z_3 = \{p_0, p_1, p_2\}$, $Z_5 = Z_2 \cup Z_3$ и содержит первую инфинитезимальную окрестность точки p_i .
5. Аналогично 4, но Z_5 содержит подсхему типа (x^3, y) с носителем в точке p_i .
6. $Z_2 = \{p_i, p_j\}$, $Z_3 = \{p_i\} \cup Z'_2$, Z'_2 – двоеточие, ориентированное вдоль $(p_i p_k)$ и $\text{Supp } Z'_2 = \{p_k\}$, $Z_5 \supset Z'_2$, Z'_2 – двоеточие, ориентированное вдоль $(p_i p_j)$, и $\text{Supp } Z'_2 = \{p_i\}$.

7. Аналогично 6, но Z_2'' ориентировано вдоль $(p_i p_k)$.
8. $Z_2 = \{p_i p_j\}$, $Z_3 = \{p_k\} \cup Z_2'$, Z_2' ориентирована вдоль $(p_i p_k)$ и $\text{Supp } Z_2' = \{p_i\}$, $Z_5 = \{p_j\} \cup \{p_k\} \cup Z_3'$, Z_3' задана идеалом (x^3, y) и $\text{Supp } Z_3' = \{p_i\}$.
9. Аналогично 8, но Z_3' – первая инфинитезимальная окрестность точки p_i .
10. $Z_2 = \{p_i, p_k\}$, Z_3 аналогично 8, $Z_5 = Z_2'' \cup Z_3''$, где Z_2'' ориентирована вдоль $(p_j p_k)$, $\text{Supp } Z_2'' = \{p_k\}$, $\text{Supp } Z_3'' = \{p_i\}$ и Z_3'' задана идеалом (x^3, y) .
11. Аналогично 10, но Z_2'' ориентирована вдоль $(p_i p_k)$.
12. Аналогично 10, но Z_3'' – первая инфинитезимальная окрестность точки p_i .
13. Аналогично 11, но Z_3'' – первая инфинитезимальная окрестность точки p_i .
14. Z_2 – двоеточие в точке p_j , ориентированное вдоль $(p_i p_j)$, Z_3 – аналогично 8, $Z_5 = Z_2 \cup Z_3$.
15. Аналогично 14, но Z_2 ориентировано вдоль $(p_j p_k)$.
16. Z_2 – двоеточие в точке p_k , Z_3 аналогично 8, $Z_5 = Z_2' \cup Z_3'$, где Z_3' с носителем в p_k задана идеалом типа (x^3, y) и ориентирована вдоль $(p_j p_k)$.
17. Аналогично 16, но Z_3' ориентирована вдоль $(p_i p_k)$.
18. Z_2, Z_3, Z_2' аналогично 16, но Z_3' – первая инфинитезимальная окрестность точки p_k .
19. Z_2, Z_3, Z_2' аналогично 17, но Z_3' – первая инфинитезимальная окрестность точки p_k .
20. Z_3 аналогично 8, $Z_2 = Z_2'$, $Z_5 = \{p_k\} \cup Z_4'$, где Z_4' задана идеалом (x^2, y^2) .
21. Z_3 аналогично 20, Z_2 – двоеточие с носителем в p_i , ориентированное вдоль $(p_i p_j)$, $Z_5 = \{p_k\} \cup Z_4'$, где Z_4' задана идеалом типа (x^3, xy, y^2) и имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_k)$.
22. Аналогично 21, но Z_4' имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_j)$.
23. Аналогично 20, но Z_4' задана идеалом (x^4, y) .
24. Аналогично 20, но Z_4' задана идеалом (x^3, xy, y^2) .
25. $Z_2 = \{p_j, p_k\}$, $Z_3 = \{p_j\} \cup Z_2'$, Z_2' – двоеточие с носителем в точке p_i , ориентированное вдоль $(p_i p_k)$, $Z_5 = \{p_k\} \cup Z_2' \cup Z_2''$, где Z_2'' – двоеточие с носителем в точке p_j , ориентированное вдоль $(p_j p_k)$.
26. Аналогично 25, но Z_2'' ориентировано вдоль $(p_i p_j)$.
27. $Z_2 = \{p_i, p_k\}$, Z_3 аналогично 25, $Z_5 = \{p_j, p_k\} \cup Z_3'$, где Z_3' – подсхема с носителем в p_i , ориентированная вдоль $(p_i p_k)$ и заданная идеалом (x^3, y) .
28. Аналогично 27, но Z_3' – первая инфинитезимальная окрестность точки p_i .
29. $Z_2 = \{p_i, p_j\}$, Z_3 аналогично 25, $Z_5 = Z_2' \cup Z_3'$, Z_2' – двоеточие с носителем в точке p_j , ориентированное вдоль $(p_j p_k)$, Z_3' – подсхема с носителем в p_i , ориентированная вдоль $(p_i p_k)$ и заданная идеалом (x^3, y) .
30. Аналогично 29, но Z_2' ориентировано вдоль $(p_i p_j)$.
31. Аналогично 29, но Z_3' – первая инфинитезимальная окрестность точки p_i .
32. Аналогично 30, но Z_3' – первая инфинитезимальная окрестность точки p_i .
33. Z_2 – двоеточие с носителем в точке p_k , ориентированное вдоль $(p_i p_k)$, Z_3 – аналогично 25, $Z_5 = Z_2 \cup Z_3$.
34. Аналогично 33, но Z_2 ориентировано вдоль $(p_j p_k)$.
35. Z_2 – двоеточие с носителем в точке p_j , ориентированное вдоль $(p_j p_k)$, Z_3 аналогично предыдущему, $Z_5 = Z_2' \cup Z_3''$, Z_3'' – подсхема с носителем в точке p_j , заданная идеалом (x^3, y) и ориентированная вдоль $(p_j p_k)$.
36. Аналогично 35, но Z_2 и Z_3'' ориентированы вдоль $(p_i p_j)$.

37. Аналогично 35, но Z_3'' – первая инфинитезимальная окрестность p_j .
38. Аналогично 36, но Z_3'' – первая инфинитезимальная окрестность точки p_j .
39. Z_2 – двоеточие с носителем в точке p_i , ориентированное вдоль $(p_i p_k)$, Z_3 аналогично 37, $Z_5 = \{p_j\} \cup Z_4'$, где Z_4' – подсхема с носителем в точке p_i и заданная идеалом (x^2, y^2) .
40. Z_2 – двоеточие с носителем в точке p_i , ориентированное вдоль $(p_i p_j)$, Z_3 аналогично предыдущему, $Z_5 = \{p_j\} \cup Z_4'$, Z_4' – подсхема с носителем в точке p_i , заданная идеалом (x^3, xy, y^2) , с выделенным направлением вдоль $(p_i p_k)$.
41. Аналогично 39, но Z_4' задана идеалом (x^4, y) и ориентирована вдоль $(p_i p_k)$.
42. Аналогично 40, но Z_4' имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_j)$.
43. Аналогично 39, но Z_4' – подсхема с носителем в точке p_i , заданная идеалом (x^3, xy, y^2) , с выделенным направлением вдоль $(p_i p_k)$.
44. $Z_2 = \{p_j, p_k\}$, Z_3 – подсхема с носителем в точке p_i , заданная идеалом (x^3, y) и ориентированная вдоль $(p_i p_j)$, $Z_5 = Z_2 \cup Z_3$.
45. Z_2 – двоеточие с носителем в точке p_k , ориентированное вдоль $(p_j p_k)$, Z_3 аналогично 44, $Z_5 = Z_2 \cup Z_3$.
46. Аналогично 45, но Z_2 ориентировано вдоль $(p_i p_k)$.
47. Z_2 – двоеточие с носителем p_j , ориентированное вдоль $(p_j p_k)$, Z_3 аналогично предыдущему, $Z_5 = Z_2 \cup Z_3$.
48. Аналогично 47, но Z_2 ориентировано вдоль $(p_i p_j)$.
49. $Z_2 = \{p_i, p_k\}$, Z_3 аналогично предыдущему, $Z_5 = \{p_k\} \cup Z_4'$, Z_4' – подсхема с носителем в точке p_i , заданная идеалом (x^4, y) и ориентированная вдоль $(p_i p_j)$.
50. Аналогично 49, но Z_4' задана идеалом (x^3, xy, y^2) и имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_j)$.
51. $Z_2 = \{p_i, p_j\}$, Z_3 аналогично предыдущему, $Z_5 = \{p_j\} \cup Z_4'$, Z_4' – подсхема с носителем в p_i , заданная идеалом (x^4, y) и ориентированная вдоль $(p_i p_j)$.
52. Аналогично 51, но Z_4' задана идеалом (x^3, xy, y^2) и имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_j)$.
53. Z_2 – двоеточие с носителем в точке p_i , ориентированное вдоль $(p_i p_k)$, Z_3 аналогично предыдущему, Z_5 задана идеалом (x^4, xy, y^2) и имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_j)$.
54. Аналогично 53, но Z_5 задана идеалом (x^3, xy, y^3) .
55. Z_2 – двоеточие с носителем в точке p_i , ориентированное вдоль $(p_i p_j)$, Z_3 аналогично 44–53, Z_5 задана идеалом (x^5, y) и ориентирована вдоль $(p_i p_j)$.
56. Аналогично 55, но Z_5 задана идеалом (x^4, xy, y^2) и имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_j)$.
57. Аналогично 55, но Z_5 задана идеалом $(x^3, x^2 y, y^2)$ и имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_j)$.
58. $Z_2 = \{p_j, p_k\}$, Z_3 – первая инфинитезимальная окрестность p_i , $Z_5 = Z_2 \cup Z_3$.
59. Z_2 – двоеточие с носителем в точке p_k , ориентированное вдоль $(p_j p_k)$, Z_3 аналогично 58, $Z_5 = Z_2 \cup Z_3$.
60. Аналогично 59, но Z_2 ориентировано вдоль $(p_i p_k)$.
61. Z_2 – двоеточие с носителем в p_i , ориентированное вдоль $(p_i p_j)$, Z_3 аналогично 58, Z_5 задана идеалом (x^4, xy, y^2) и имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_j)$.
62. Аналогично 61, но Z_5 задана идеалом (x^3, xy, y^3) .

63. Z_2 – двоеточие с носителем в p_i , ориентированное вдоль $(p_i p_j)$, Z_3 аналогично 58, Z_5 задана идеалом $(x^3, x^2 y, y^2)$ и имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_k)$.

64. Аналогично 63, но Z_5 имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_j)$.

65. $Z_2 = \{p_i, p_j\}$, Z_3 аналогично 58, $Z_5 = \{p_j\} \cup Z'_4$, где Z'_4 задана идеалом (x^3, xy, y^2) и имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_j)$.

66. Аналогично 65, но Z'_4 имеет выделенное направление вдоль $(p_i p_k)$.

67. Аналогично 65, но Z'_4 задана идеалом (x^2, y^2) .

При этом в каждом из случаев 1, 2 неподвижных точек $n_i = 3$, $i = 1, 2, 58$, в каждом из остальных случаев неподвижных точек $n_i = 6$. Таким образом, топологическая эйлерова характеристика равна $\sum n_i = 393$.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность А.С. Тихомирову и В.Г. Шендеровскому за советы и плодотворные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихомиров А.С. Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 153–180.
- [2] Chean J. The Cohomology of Smooth Nested Hilbert Schemes of Points. Thesis. Univ. of Chicago, 1994.
- [3] Briangon J. Description de $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ // Invent. Math. 1977. V. 41. P. 45–89.
- [4] Bialyncki-Birula A. Some theorems on actions of algebraic groups // Ann. of Math. 1973. V. 98. P. 480–497.
- [5] Фултон У. Теория пересечений. М.: Мир, 1989.

Ярославский государственный педагогический университет
им. К. Д. Ушинского
E-mail: tikhomir@yps.u.yar.ru

Поступило
17.03.1999