Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Демидов, Редукция к системе обыкновенных дифференциальных уравнений нестационарного гидродинамического уравнения Эйлера в плоской задаче кавитационного обтекания с граничным управлением, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 37–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 05:50:06

УДК 517.57

Редукция к системе обыкновенных дифференциальных уравнений нестационарного гидродинамического уравнения Эйлера в плоской задаче кавитационного обтекания с граничным управлением

А. С. Демидов

Рассматривается плоская задача кавитационного нестационарного обтекания препятствия при наличии управляющих параметров, задающих изменение как скорости набегающего потока, так и формы препятствия. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой позволяет представить силу лобового сопротивления в виде интегрального функционала от управляющих параметров.

Библиография: 7 названий.

1. Пусть $\Gamma = \Gamma(t)$ – варьируемая в заданных пределах кусочно-гладкая кривая, а $\vec{V}$ и p – это соответственно искомые скорость и давление плоского нестационарного потенциального потока несжимаемой жидкости единичной плотности, которые подчинены нестационарному уравнению Эйлера

$$\frac{d\vec{V}(t, z(t))}{dt} = -\nabla_{x,y} p(t, z)|_{z=z(t)}, \quad \vec{V}(t, z(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} z(t), \quad (1)$$

в области течения $\Omega(t)$ с искомой границей $\gamma(t) = \partial\Omega(t) \setminus \Gamma(t)$. Здесь и ниже через $z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$ обозначен тот центр элементарного объема (иначе говоря, частицы) жидкости, который при $t = 0$ находился в точке $z(0) = x(0) + iy(0)$. Что касается свободы выбора кривой $\gamma = \gamma(t)$, то она компенсируется условием равновесия

$$p|_{\gamma} = p|_{\mathbb{C}}, \quad (2)$$

где $p|_{\gamma}$ – давление на γ со стороны потока, а $p|_{\mathbb{C}}$ – давление со стороны так называемой каверны¹ (полости) в потоке жидкости, т.е. искомой области $\mathbb{C} = \mathbb{C}(t)$, примыкающей к кормовой части препятствия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-22001, 07-01-00500).

¹Каверна возникает там, где давление понижается до некоторого значения $p|_{\mathbb{C}}$, зависящего от физико-химических и термодинамических характеристик жидкости, при котором жидкость, освобожденная от сжимающих ее сил давления, разрывается, нарушая сплошность течения. Образую-

Рис. 1

В рассматриваемой ниже задаче фигурирует еще один параметр управления. Им является функция $\mathbf{V}: t \mapsto \mathbf{V}(t)$, равная модулю скорости на бесконечности (или, в эквивалентной интерпретации, скорости движения препятствия в стоячей воде). Эта величина подчинена условиям

$$0 < V_0 \leq \mathbf{V}(t) \leq V_1, \quad \int_0^T \mathbf{V}(t) dt = 1, \quad (\mathbf{V}(t), 0) \stackrel{(5)}{=} \lim_{z=x+iy \rightarrow \infty} \vec{V}(t; x+iy), \quad (3)$$

в которых последнее равенство разъяснено в (5). Предполагается, что в каждой точке (x, y) области течения $\Omega(t) = \mathbb{R}^2 \setminus \{C(t) \cup \Gamma(t) \cup \gamma(t)\}$ скорость $\vec{V}$ непрерывна, нигде не обращается в нуль, имеет потенциал $u = u(t; x, y)$ и, как уже было сказано, жидкость несжимаема, т.е.

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (4)$$

Относительно предельного перехода в (3) требуется, чтобы было справедливо следующее свойство:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial t}(t; x, y) = \dot{\mathbf{V}}(t)x. \quad (5)$$

Предполагается также, что известно давление на бесконечности

$$p|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x+iy \rightarrow \infty} p(t, x+iy). \quad (6)$$

Кроме того, предполагается (и это отражено на рисунке), что поток разделен некоторой априори не заданной кривой $\gamma_0 = \gamma_0(t)$. При этом частицы жидкости, составляющие эту кривую γ_0 , достигают препятствия в какой-то (заранее неизвестной) точке $P_0 = P_0(t) \in \Gamma(t)$. В ней вектор $\vec{V}$ обращается в нуль. В точке P_0 происходит

появление полости, заполняемой насыщенным паром и может достигать больших размеров. Поэтому ниже наряду со случаем конечной каверны рассматривается также идеализированная ситуация с бесконечной каверной, простирающейся до $+\infty$.

разделение потока подошедших частиц: все они продолжают движение вдоль препятствия, но одни к концевой точке $P^- = P^-(t)$, а другие к концевой точке $P^+ = P^+(t)$. Достигнув этих концевых точек, частицы срываются с них и в каждый момент времени t множество этих частиц образует две ветви $\gamma^- = \gamma^-(t)$ и $\gamma^+ = \gamma^+(t)$ искомого контура $\gamma = \gamma(t)$, который отделяет набегающий на препятствие поток от каверны.

Управляющие параметры, характеризующие как выбор динамики формы препятствия $\Gamma(t)$ в рамках тех или иных заданных ограничений, так и относительную скорость $\mathbf{V}(t) \in [V_0, V_1]$ продвижения кривой $\Gamma(t)$ в потоке, – все эти величины влияют на скорость $\vec{V}$ и давление p , а тем самым, на целевую функцию в той или иной задаче оптимального управления. Нас будут интересовать те задачи оптимального управления, которые связаны лишь с частицами жидкости $z_0(t) = x_0(t) + iy_0(t)$, удовлетворяющими следующему условию: в момент $t = 0$ частица $z_0(0)$ совпадает с точкой $P_0 \in \Gamma$, определенной выше.

Вот два примера таких задач.

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ. Требуется минимизировать время $T > 0$ при условии, что

$$x_0(-T) - x_0(0) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{-T}^0 \operatorname{Re} \vec{V}(t, x_0(t)) dt = 1.$$

ЗАДАЧА О МИНИМИЗАЦИИ ЛОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ. Требуется при заданном $T > 0$ минимизировать интеграл

$$\int_0^T \left(\int_{\Gamma(t)} [p(t, s) - p|_C] ds \right) dt.$$

Эти задачи отнюдь не тривиальны даже для случая симметричного относительно оси x обтекания уголка $\Gamma_{\mathbf{a}}(t) = \{y = \pm k(t, \mathbf{a})x/\mathbf{a}, x \in [0, \mathbf{a}]\}$, где $k^{\pm}(t, 0) = \pm 1$ и $\pm \partial_x k^{\pm}(t, x) > 0$. Здесь параметр-управление $\mathbf{a} \in (0, 1]$ позволяет изменять положения концевых точек $P^{\pm} = (\mathbf{a}, \pm k(t, \mathbf{a}))$ уголка на заданных кривых $l^{\pm}(t) = \{y = k^{\pm}(t, x), 0 \leq x \leq 1\}$.

Основная трудность в изучении такого рода задач, т.е. задач следующего вида:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_{\mathcal{L}_f(t)} f(t, s, p(t, s), \vec{V}(t, s)) ds \right) dt &\rightarrow \inf, \\ \int_0^T \left(\int_{\mathcal{L}_g(t)} g(t, s, p(t, s), \vec{V}(t, s)) ds \right) dt &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathcal{L}_f(t)$ и $\mathcal{L}_g(t)$ – соответствующие части кривой $\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_0 \cup \Gamma$, связана с тем, что величины ds , $p(t, s)$ и $\vec{V}(t, s)$, фигурирующие в функционалах задачи (7), зависят от управляющих параметров $\Gamma(t)$ и $\mathbf{V}(t)$ очень опосредовано, а именно, через решение задачи со свободной границей для нестационарного гидродинамического уравнения Эйлера (1) и уравнения неразрывности (4).

Поставим следующий

ВОПРОС. Возможно ли выразить зависимость величин ds , $p(t, s)$ и $\vec{V}(t, s)$ от управляющих параметров более явно, не прибегая к решению сложной задачи со

свободной границей для нестационарной нелинейной системы уравнений с частными производными?

При поиске ответа на этот вопрос будем учитывать следующие три фактора.

1) Экстремальная задача (7) является аппроксимативной для реальных задач. Поэтому есть резон ограничиться ее приближенным решением.

2) Результаты расчетов (в реальном диапазоне изменения так называемого числа кавитации) показывают (см. [1; с. 11]) слабое влияние формы каверны на распределение давления и скорость вблизи препятствия. Точные оценки, подтверждающие этот факт численных экспериментов, доказаны в [2]. Предположительно методы работы [2] могут быть использованы для доказательства интуитивно достоверного утверждения о том, что решение задачи (7) может быть как угодно точно аппроксимировано, если поиск кривой $\gamma(t)$, отделяющей каверну от потока, будет осуществляться в классе самонепересекающихся ломаных, составленных из конечного числа сегментов.

3) Поиск приближенного решения оправдывает также поиск и кривой-препятствия Γ в классе полигональных кривых.

Аппроксимация (в силу перечисленных факторов) задаваемой кривой Γ и искомой кривой γ ломаными из конечного числа сегментов позволяет охарактеризовать эти кривые конечномерными векторами, задающими соотношения между длинами указанных сегментов, а также углы их наклона к оси x . Таким образом, управляющие параметры (т.е. Γ и $\mathbf{V}$) могут быть заданы некоторой конечномерной вектор-функцией переменной t . Это позволяет, как показано в данной работе, редуцировать задачу (1)–(6) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно величин, которые аппроксимируют участвующие в (7) скорость $\vec{V}(t, s)$ и давление $p(t, s)$. При этом в редуцированной системе уравнений явно фигурируют управляющие параметры. Тем самым, задача (7) сводится к классической задаче оптимального управления в форме Понтрягина.

2. В случае бесконечной каверны односвязную область $\Omega(t)$ будем обозначать также и через Ω_t . В случае конечной каверны, когда охватывающие ее ветви γ^- и γ^+ смыкаются в некоторой точке $P_C(t)$, будем тем же символом Ω_t обозначать односвязную область $\Omega(t) \setminus \gamma_C(t)$, т.е. в случае конечной каверны Ω_t – это есть область $\Omega(t)$ с разрезом вдоль кривой $\gamma_C(t)$, протянувшейся от каверны в бесконечность. Кривая $\gamma_C(t)$ состоит из слившихся в единый поток частиц, составлявших кривые γ^- и γ^+ .

Как уже было сказано, потенциал течения считается дифференцируемым в (открытой) области течения $\Omega(t) \subset \mathbb{C}$, а $\nabla u \neq 0$ в $\Omega(t)$. Кроме того, предполагается, что при каждом t функция

$$\partial\Omega_t = \Gamma(t) \cup \gamma(t) \cup \gamma_C(t) \ni x + iy \mapsto u(t; x, y) \quad (8)$$

кусочно-непрерывно дифференцируема и обратима.

В односвязной области Ω_t введем функцию $v: \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$, гармонически сопряженную к функции u , зафиксировав равенством

$$w(t, P_0) = 0 \quad (9)$$

аддитивную константу аналитического отображения

$$w(t, \cdot): \Omega_t \ni z = x + iy \mapsto w(t, z) = u(t; x, y) + iv(t; x, y). \quad (10)$$

Образ $Q(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(\Omega_t)$ области течения при отображении (10) является, вообще говоря, римановой поверхностью, состоящей из двух листов $Q^+(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(\Omega_t^+)$ и $Q^-(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(\Omega_t^-)$, склеенных вдоль линии $w(\gamma_0(t))$ – образа кривой $\gamma_0(t)$ (см. рис. 1). Через $\Omega_t^\pm$ обозначена та часть области Ω_t , границей которой является $\gamma_0(t) \cup \Gamma^\pm(t) \cup \gamma^\pm(t) \cup \gamma_C(t)$, где $\Gamma^\pm(t)$ – это та часть кривой-препятствия $\Gamma(t)$, которая соединяет точки $P_0(t)$ и $P^\pm(t)$.

Пусть $(x_c, y_c) \in \Omega_t$. Обозначим через $a + ib$ число $u(t; x_c, y_c) + iv(t; x_c, y_c)$. Согласно сделанному предположению $\nabla u \neq 0$. Поэтому множества

$$\lambda_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \Omega_t \mid u(t; x, y) = a\}, \quad \mu_b(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \Omega_t \mid v(t; x, y) = b\}$$

являются в Ω_t аналитическими кривыми. В точке (x_c, y_c) они взаимно ортогональны, как линии уровня гармонически сопряженных функций u и v . В силу сделанного выше предположения о функции (8) и условия $\nabla u \neq 0$ отображение

$$w(t, \cdot): \Omega_t^\pm \ni z = x + iy \mapsto w(t, z) = u(t; x, y) + iv(t; x, y) \in Q^\pm(t)$$

однолистно и непрерывно вплоть до $\partial\Omega_t^\pm$. В частности, линия уровня $\lambda_u(t)$ и ее замыкание $\hat{\lambda}_u(t)$ однозначно определяются параметром $u \in \mathbb{R}$, а

$$Q^\pm(t) = \{u + iv \in \mathbb{C} \mid \operatorname{sgn}(v - v_u^\pm(t)) = \pm 1\}, \quad \text{где} \quad v_u^\pm(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(\partial\Omega_t^\pm \cap \hat{\lambda}_u(t)). \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Свойства объектов, относящихся к областям $Q^\pm(t) = w(\Omega_t^\pm)$ абсолютно аналогичны. Поэтому в дальнейшем в ряде случаев будем опускать символ $\pm$ при обозначении этих объектов, подразумевая, что речь идет как о объектах области $Q^+(t) = w(\Omega_t^+)$, так и о соответствующих им объектах области $Q^-(t) = w(\Omega_t^-)$.

Заметим теперь, что для функции $z: t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$, задающей траекторию центра элементарного объема жидкости и его скорость $\vec{V}(t, x(t) + iy(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (d/dt)z(t)$, справедлива формула

$$z(t) = P_0 + \int_0^{w(t)} E(\xi, \eta) d\zeta, \quad \text{где} \quad E(u, v) = e^{A(u, v) + iB(u, v)}, \quad \zeta = \xi + i\eta \in Q(t). \quad (12)$$

Здесь

$$w(t) = u(t) + iv(t) \stackrel{\text{def}}{=} w(t, z(t)) = u(t, x(t), y(t)) + iv(t, x(t), y(t)), \quad (13)$$

а

$$A + iB: Q(t) \ni w = u + iv \mapsto A(u, v) + iB(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \frac{dz}{dw}$$

– так называемая функция Гельмгольца–Кирхгофа. Она определена ввиду односвязности $Q = Q(t)$. В самом деле, при отображении $\zeta: Q \ni w \mapsto \zeta(w) \stackrel{\text{def}}{=} dz/dw$ образ $\zeta(C)$ любой кривой $C \subset Q$, гомеоморфной окружности, не охватывает нуль,

так как иначе, стягивая C в точку, приходим к противоречию с конформностью отображения $z: Q(t) \rightarrow \Omega_t$, согласно которой $0 \notin \zeta(w) = dz/dw$. Поэтому определена однозначная ветвь логарифма $\ln(dz/dw)$, которая и принимается за функцию $A+iB$.

Отметим, что отображение $Q(t) \ni w \mapsto \int_0^w \exp\{A(\xi, \eta) + iB(\xi, \eta)\} d\zeta$, будучи голоморфным в $Q(t)$, является [3], [4] абсолютно непрерывным вплоть до границы $Q(t)$. Заметим также, что свободная граница $\gamma(t) = \gamma^+(t) \cup \gamma^-(t)$ есть объединение точек

$$z(u, v_u^\pm) = \int_0^{u+iv_u^\pm} e^{A+iB}|_{\zeta \in Q(t)} d\zeta, \quad u \in [\sigma_L^\pm(t), \sigma_J(t)], \quad (14)$$

где

$$\sigma_L^\pm(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t, P^\pm(t)), \quad \sigma_J(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t, P_C(t)),$$

а $P_C(t)$ – это либо точка, в которой в случае конечной каверны смыкаются ветви γ^- и γ^+ , переходя в кривую $\gamma_C(t)$, или же $P_C(t) = \infty$, если каверна бесконечна. Отметим, что

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{(9)}{=} u(t, P_0) < u(t, P^\pm(t)) = \sigma_L^\pm(t) < \sigma_J(t) &< \infty, & \text{если каверна конечна,} \\ &= \infty, & \text{если каверна бесконечна,} \end{aligned}$$

при этом, если $\xi \in [\sigma_L^+(t), \sigma_J(t)]$, а $\eta \in [\sigma_L^-(t), \sigma_J(t)]$, то в случае конечной каверны

$$|z(\xi, v_\xi^+) - z(\eta, v_\eta^-)| \stackrel{(14)}{=} 0 \iff \xi = \eta = \sigma_J(t). \quad (15)$$

ЛЕММА 1. Для $u(t) \stackrel{(13)}{=} \operatorname{Re} w(t)$ и $v(t) \stackrel{(13)}{=} \operatorname{Im} w(t)$ справедливо равенство

$$\frac{du(t)}{dt} = \dot{u}(t) + e^{-2A(u(t), v(t))}, \quad \text{где } \dot{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial u(t; x, y)}{\partial t} \right|_{x=x(t), y=y(t)}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \dot{u}(t) + \left(\frac{\partial u(t; x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial u(t; x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt} \right) \Big|_{x=x(t), y=y(t)}, \\ \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right) &\stackrel{(1)}{=} \vec{V}(t, z(t)) = \left(\frac{\partial u(t; x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(t; x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{x=x(t), y=y(t)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Поэтому

$$\frac{du(t)}{dt} = \dot{u}(t) + |\vec{V}(t, z(t))|^2. \quad (18)$$

Остается заметить, обозначая, как обычно, $f - ig$ через $\overline{f + ig}$, что

$$\vec{V} \stackrel{(17)}{=} \nabla u \stackrel{(10)}{=} \overline{\frac{dw}{dz}} = \overline{\frac{1}{dz/dw}} \stackrel{(12)}{=} e^{-A} e^{iB}. \quad (19)$$

Отметим, что формула (19) влечет соотношение

$$A(u, v) \rightarrow -\ln |\vec{V}(t, \infty)| = -\ln \mathbf{V}(t) \quad \text{при } u \rightarrow \infty. \quad (20)$$

ЛЕММА 2. Условие $p|_\gamma \stackrel{(2)}{=} p|_C$, компенсирующее свободу выбора искомой кривой $\gamma = \gamma(t)$, эквивалентно тому, что для любого $z_0(t) = x_0(t) + iy_0(t) \in \gamma(t)$ выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt} u(t; x_0(t), y_0(t)) = \frac{\mathbf{V}^2(t)}{2} + \dot{\mathbf{V}}(t)x_0(t) + (p|_\infty - p|_C) + \frac{1}{2} e^{-2A(u,v)} \Big|_{u+iv \stackrel{(13)}{=} w(t, z_0(t))}, \quad (21)$$

где $p|_\infty = \lim_{x+iy \rightarrow \infty} p(t, x+iy) = \lim_{y \rightarrow \infty} p(t, x(t) + iy)$. При этом, $p|_\infty = p|_C$, если каверна бесконечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение Эйлера (1) имеет интеграл Коши–Лагранжа [5]

$$p(t, x+iy) + \frac{1}{2} |\vec{V}(t, x+iy)|^2 + \frac{\partial u}{\partial t}(t; x, y) = p_0(t), \quad (22)$$

поэтому

$$p_0(t) \stackrel{(5)-(6)}{=} p|_\infty + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2(t) + \dot{\mathbf{V}}(t)x(t). \quad (23)$$

Тем самым, в силу (18) и (22),

$$p|_\infty + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2(t) + \dot{\mathbf{V}}(t)x(t) = p(t, x(t) + iy(t)) - \frac{1}{2} |\vec{V}(t, x(t) + iy(t))|^2 + \frac{du(t)}{dt}.$$

Следовательно, для $(x, y) = (x_0, y_0) \in \gamma$ условие $p|_\gamma = p|_C$ эквивалентно следующему:

$$p|_\infty + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2(t) + \dot{\mathbf{V}}(t)x_0(t) = p|_C - \left[\frac{1}{2} |\vec{V}(t, x_0(t) + iy_0(t))|^2 - \frac{du(t; x_0(t), y_0(t))}{dt} \right]. \quad (24)$$

Остается заметить, что в случае бесконечной каверны

$$p|_\infty \stackrel{(3)}{=} \lim_{x+iy \rightarrow \infty} p(t, x+iy) = p|_C.$$

Поэтому соотношение (24) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} u(t; x_0(t), y_0(t)) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{V}^2(t) + \dot{\mathbf{V}}(t)x_0(t) + (p|_\infty - p|_C) + \frac{1}{2} |\vec{V}(t, x_0(t) + iy_0(t))|^2 \stackrel{(19)}{\iff} \end{aligned} \quad (21).$$

ЛЕММА 3. Давление $p(t, \cdot)$ в точке $z(t) = x(t) + iy(t) \in \Omega(t)$ может быть вычислено по формуле

$$p(t, z(t)) = p|_\infty + \frac{|\vec{V}(t, z(t))|^2 + \mathbf{V}^2(t)}{2} + \dot{\mathbf{V}}(t)x(t) - \frac{du(t; x(t), y(t))}{dt}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$p \stackrel{(22)}{=} p_0 - \frac{1}{2} |\vec{V}|^2 - \dot{u} \stackrel{(18)-(23)}{=} p|_\infty + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2(t) + \dot{\mathbf{V}}(t)x(t) - \frac{|\vec{V}|^2}{2} + |\vec{V}|^2 - \frac{du}{dt}.$$

3. Для входящей в формулу (25) производной du/dt ниже устанавливается явное ее представление через функцию $A + iB$. Согласно (19) $\vec{V} = \exp(-A + iB)$. Поэтому для представления интегралов задачи (7) в виде функционалов классического вариационного исчисления достаточно в силу соотношения $ds = e^{A(u, v_u)} du$ выписать формулы, которые бы позволили выразить функции A , B и $u \xrightarrow{(11)} v_u$ через введенную выше относительную скорость $\mathbf{V}(t)$, определяемые ниже параметры $\sigma(t)$ и $\beta(t)$, задающие геометрию кривой Γ и протяженность каверны, а также через их производные $\dot{\mathbf{V}}(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ и $\dot{\beta}(t)$.

Имеются существенные трудности на пути построения таких формул. В частности, неизвестна функция $u \xrightarrow{(11)} v_u = (v_u^+, v_u^-)$, а именно она задает риманову поверхность

$$Q(t) \stackrel{(11)}{=} \{\operatorname{Re}(u + iv) < 0\} \cup \{\operatorname{Re}(u + iv) \geq 0, v > v_u^+(t)\} \cup \{\operatorname{Re}(u + iv) \geq 0, v < v_u^-(t)\},$$

на которой определена функция $A + iB$.

Что касается граничных значений функции B , то они известны лишь частично. Искомой является зависимость

$$(\sigma_L(t), \sigma_J(t)) \ni u \mapsto \beta_u(t) \stackrel{\text{def}}{=} B(u, v_u(t)), \quad (26)$$

которая относится к свободной границе γ . В отношении кривой-препятствия Γ известно лишь, что

$$B(u, v_u(t)) = \mathcal{T} \left(\int_0^u e^{A(\xi, v_\xi(t))} d\xi \right) \quad \text{при} \quad 0 < u < \sigma_L(t),$$

где $\mathcal{T}: \Gamma \ni P_s \mapsto \mathcal{T}(s)$ – это угол наклона к оси x ориентированной касательной к Γ в точке P_s ; при этом касательная направлена в сторону движения частицы жидкости, попавшей в точку P_s .

Согласно сказанному выше в качестве кривой-препятствия Γ берется ломаная. Поэтому для некоторого натурального L имеем следующее:

$$B(u, v_u(t)) = \beta_l(t) \quad \text{при} \quad 0 = \sigma_0 \leq \sigma_l(t) < u < \sigma_{l+1}(t), \quad 0 \leq l \leq L-1.$$

Здесь $\beta_l(t)$ – угол наклона к оси x отрезка $s_l s_{l+1}$ ломаной Γ , где $s_l = \int_0^{\sigma_l} e^{A(\xi, v_\xi)} d\xi$. Длина всей кривой Γ есть

$$|\Gamma| \stackrel{(12)}{=} \int_0^{\sigma_L^+(t)} e^{A(\xi, v_\xi^+(t))} d\xi + \int_0^{\sigma_L^-(t)} e^{A(\xi, v_\xi^-(t))} d\xi.$$

В эту формулу входят (опосредованно через функцию A) все компоненты управляющих параметров σ , β и $\mathbf{V}$, а не только L -я компонента вектора $\sigma = (\sigma_1^\pm, \dots, \sigma_J^\pm)$. Отметим еще, что функция A характеризует также точку $P_0(t) \in \Gamma(t)$ разветвления потока на препятствии Γ , а именно:

$$\vec{V}(P_0) = 0 \quad \stackrel{(19)}{\Longleftrightarrow} \quad A(0, 0) = \infty.$$

Так как функция $A + iB$ параметрически зависит от вектор-функции

$$(u, t) \mapsto (v_u(t), \beta_u(t)), \quad \text{где} \quad u \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (27)$$

нам для достижения поставленной цели нужно выразить компоненты этой вектор-функции через

$$(\sigma, \beta, \mathbf{V}) \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_1, \dots, \sigma_J, \beta_0, \dots, \beta_{L-1}, \mathbf{V}) \quad \text{и} \quad (\dot{\sigma}, \dot{\beta}, \dot{\mathbf{V}}). \quad (28)$$

Так как свободная граница γ ищется в виде ломаной, функция $(u, \cdot) \stackrel{(26)}{\mapsto} \beta_u(\cdot)$ кусочно-постоянна. Учитывая это, будем для каждого t строить конечномерные аппроксимации вектор-функции (27) посредством подходящих трех векторов

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_1, \dots, \sigma_{J-1}, \sigma_J), & \vec{v} &= (v_1, \dots, v_{L-1}, v_L, v_{L+1}, \dots, v_{J-1}, v_J), \\ \vec{\beta} &= (\beta_L, \beta_{L+1}, \dots, \beta_{J-1}), \end{aligned} \quad (29)$$

где $1 \leq L < L+1 \leq J$. Выбор натуральных чисел L и J определяется вычислительными ресурсами и желаемой точностью аппроксимации. Как уже было сказано, в нижеприведенной конструкции эти числа характеризуют число звеньев ломаных кривых Γ и γ . Длины звеньев Γ задаются с помощью первых L -компонент $(\sigma_1, \dots, \sigma_L)$ вектора-управления σ , а звенья γ – с помощью остальных компонент этого вектора. При этом выполнено условие $0 < \sigma_1^\pm < \dots < \sigma_{J-1}^\pm < \sigma_J \leq \infty$.

Вектор $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{J-1}, \sigma_J)$ целесообразно задавать, учитывая слабое влияние на функционалы задачи (7) тех очертаний каверны, которые отдалены от препятствия. Поэтому представляется разумным для выбранного числа $K = J - L$ сегментов ломаной свободной границы $\gamma^\pm$ положить

$$\sigma_{L+1}^\pm = \sigma_L^\pm + \delta, \quad \sigma_{L+k}^\pm = \sigma_{L+k-1}^\pm + k\delta \quad \text{при} \quad 2 \leq k \leq K,$$

где $\delta = (\sigma_L^+ + \sigma_L^-)/2L$ в случае бесконечной каверны, а в случае конечной каверны число δ определяется из условия (15) на $\sigma_J = \sigma_J^\pm$ и формулы $2\sigma_J = (\sigma_L^+ + \sigma_L^-) + K(K+1)\delta$.

В качестве функции $u \stackrel{(11)}{\mapsto} v_u$ берется функция, график которой есть ломаная, соединяющая начало координат $(u, v) = (0, 0)$ с точками

$$(\sigma_1^\pm, v_1^\pm), \quad \dots, \quad (\sigma_{J-1}^\pm, v_{J-1}^\pm), \quad (\sigma_J, v_J^\pm), \quad (\infty, v_J^\pm),$$

ординаты которых определяются согласно приведенной ниже теореме 1.

Функция $(u, \cdot) \stackrel{(26)}{\mapsto} \beta_u(\cdot)$ задается формулой

$$\beta_u = \begin{cases} \beta_l & \text{при } \sigma_l < u < \sigma_{l+1}, \quad 0 \leq l \leq L-1, \quad \sigma_0 = 0, \\ \beta_j & \text{при } \sigma_j < u < \sigma_{j+1}, \quad L \leq j \leq J-1, \end{cases}$$

где β_l – углы-управление наклона сегментов ломаной кривой Γ , а β_j – углы наклона сегментов свободной границы γ , которые определяются ниже согласно теореме 1.

Функция A и ее гармонически-сопряженная функция B вычисляются по формуле

$$Q(t) \ni w = u + iv \mapsto A(u, v) + iB(u, v) = \hat{A}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) + i\hat{B}(\varphi(u, v), \psi(u, v)),$$

где конформное отображение

$$\chi: Q(t) \ni w = u + iv \mapsto \chi(w) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v) \in \mathbb{C}_+$$

подчинено условиям $\chi(0) = 0$, $\chi(\sigma_L^+(t)) = 1$, $\chi(\infty) = \infty$, а

$$\begin{aligned} \widehat{B}(\varphi, \psi) = & \sum_{l=0}^{L-1} \frac{\beta_l^\pm}{\pi} \left(\arctan \frac{\varphi - \lambda_l^\pm}{\psi} - \arctan \frac{\varphi - \lambda_{l+1}^\pm}{\psi} \right) \\ & + \sum_{j=L}^{J-1} \frac{\beta_j^\pm}{\pi} \left(\arctan \frac{\varphi - \lambda_j^\pm}{\psi} - \arctan \frac{\varphi - \lambda_{j+1}^\pm}{\psi} \right) \end{aligned}$$

и (с учетом (20))

$$\widehat{A}(\varphi, \psi) = -\ln \mathbf{V} + \sum_{l=0}^{L-1} \frac{\beta_j^\pm}{2\pi} \ln \left[\frac{(\varphi - \lambda_{l+1}^\pm)^2 + \psi^2}{(\varphi - \lambda_l^\pm)^2 + \psi^2} \right] + \sum_{j=L}^{J-1} \frac{\beta_j^\pm}{2\pi} \ln \left[\frac{(\varphi - \lambda_{j+1}^\pm)^2 + \psi^2}{(\varphi - \lambda_j^\pm)^2 + \psi^2} \right],$$

где $\lambda_k^\pm = \chi(\sigma_k^\pm)$.

ТЕОРЕМА 1. Искомые вектор-функции $\vec{v} = (v_1, \dots, v_J)$ и $\vec{\beta} = (\beta_L, \dots, \beta_{J-1})$ (оставшиеся не заданными среди представленных векторов в формуле (29)), а также функция $w(t) = u(t) + iv(t)$, определенная формулой (13), удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (квазилинейно зависящей от управляющих параметров $\sigma, \beta, \mathbf{V}$):

$$\frac{dv_l}{dt} = \frac{dv_{l-1}}{dt} + \left(e^{-A(\sigma_{l-1}, v_{l-1})} \int_{\sigma_{l-1}}^{\sigma_l} \exp\{A(\xi, v_\xi)\} d\xi \right) \dot{\beta}_{l-1}, \quad v_0 \equiv 0, \quad 1 \leq l \leq L, \quad (30)$$

$$\frac{dv_j}{dt} = \frac{dv_{j-1}}{dt} + \left(e^{-A(\sigma_{j-1}, v_{j-1})} \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \exp\{A(\xi, v_\xi)\} d\xi \right) \frac{d\beta_{j-1}}{dt}, \quad L+1 \leq j \leq J, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=L+1}^J \left(F_{kj}^{1\vec{v}} \frac{dv_k}{dt} + F_{kj}^{1\sigma} \dot{\sigma}_k + F_{kj}^{1\vec{\beta}} \frac{d\beta_{k-1}}{dt} \right) \\ j \in \underline{(L, J)} \quad \frac{e^{-2A(\sigma_j, v_j)} - \mathbf{V}^2}{2} - \dot{\mathbf{V}}(t) \int_0^{\sigma_j} e^{A(\xi, v_\xi)} \cos B(\xi, v_\xi) d\xi + p|c - p|_\infty, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + \sum_{k=1}^J \left(F_{k(u,v)}^{1\vec{v}} \frac{dv_k}{dt} + F_{k(u,v)}^{1\sigma} \dot{\sigma}_k \right) \\ + \sum_{k=L+1}^J F_{k(u,v)}^{1\vec{\beta}\sigma} \frac{d\beta_{k-1}}{dt} + \sum_{k=1}^L F_{k(u,v)}^{1\vec{\beta}\sigma} \dot{\beta}_{k-1} + F_{(u,v)}^{1\mathbf{V}} \dot{\mathbf{V}} = H_{(u,v)}^1, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} + \sum_{k=1}^J \left(F_{k(u,v)}^{2\vec{v}} \frac{dv_k}{dt} + F_{k(u,v)}^{2\sigma} \dot{\sigma}_k \right) \\ + \sum_{k=L+1}^J F_{k(u,v)}^{2\vec{\beta}\sigma} \frac{d\beta_{k-1}}{dt} + \sum_{k=1}^L F_{k(u,v)}^{2\vec{\beta}\sigma} \dot{\beta}_{k-1} + F_{(u,v)}^{2\mathbf{V}} \dot{\mathbf{V}} = H_{(u,v)}^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь для $m = 1$ и для $m = 2$

$$(F_{kj}^{m\sigma}, F_{kj}^{m\vec{v}}, F_{kj}^{m\vec{\beta}}, F^{m\mathbf{V}}) = (F_{k(\sigma_j, v_j)}^{m\sigma}, F_{k(\sigma_j, v_j)}^{m\vec{v}}, F_{k(\sigma_j, v_j)}^{m\vec{\beta}}, F_{(u,v)}^{m\mathbf{V}}),$$

а отображение

$$(F_k^m \sigma, F_k^m \vec{v}, F_k^m \vec{\beta}, F^m \mathbf{V}) : (u, v) \mapsto (F_{k(u,v)}^m \sigma, F_{k(u,v)}^m \vec{v}, F_{k(u,v)}^m \vec{\beta}, F_{(u,v)}^m \mathbf{V})$$

задается формулами

$$F_k^{1\rho} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f_k^{1\rho} & e^{12} \\ f_k^{2\rho} & e^{22} \end{vmatrix}, \quad F_k^{2\rho} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} e^{11} & f_k^{1\rho} \\ e^{21} & f_k^{2\rho} \end{vmatrix},$$

в которых буква ρ обозначает любую (см. (28), (29)) из четырех величин σ , $\vec{v}$, $\vec{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (\beta, \vec{\beta})$ и $\mathbf{V}$. Соответствующая компонента этих векторов ниже обозначается символом ρ_k (индекс k отсутствует, если $\rho = \mathbf{V}$), а через Φ_q обозначается градиент той или иной функции Φ , зависящей от переменной q . Далее,

$$D \stackrel{\text{def}}{=} e^{11} e^{22} - e^{21} e^{12} \neq 0, \quad (35)$$

$$e^{11} = \{[e^A \cos B]^{u(t), v(t)}\}, \quad e^{12} = \left\{ \int_0^{u(t)} [e^A \{AB\}_v^-]^{\xi, v(t)} d\xi - [e^A \sin B]^{0, v(t)} \right\}, \quad (36)$$

$$e^{21} = \{[e^A \sin B]^{u(t), v(t)}\}, \quad e^{22} = \left\{ \int_0^{u(t)} [e^A \{AB\}_v^+]^{\xi, v(t)} d\xi + [e^A \cos B]^{0, v(t)} \right\}, \quad (37)$$

$$f_k^{1\rho} = \left\{ \int_0^{u(t)} [e^A \{AB\}_{\rho_k}^-]^{\xi, v(t)} d\xi - \int_0^{v(t)} [e^A \{AB\}_{\rho_k}^+]^{0, \eta} d\eta \right\}, \quad (38)$$

$$f_k^{2\rho} = \left\{ \int_0^{u(t)} [e^A \{AB\}_{\rho_k}^+]^{\xi, v(t)} d\xi + \int_0^{v(t)} [e^A \{AB\}_{\rho_k}^-]^{0, \eta} d\eta \right\}, \quad (39)$$

где

$$\{AB\}_q^- \stackrel{\text{def}}{=} (A_q \cos B - B_q \sin B), \quad \{AB\}_q^+ \stackrel{\text{def}}{=} (A_q \sin B + B_q \cos B), \quad (40)$$

а

$$[F]^{u,v} \stackrel{\text{def}}{=} F(u, v). \quad (41)$$

Наконец,

$$H_{(u,v)}^1 = e^{-2A(u,v)}, \quad H_{(u,v)}^2 = \frac{1}{D} \{e^{11} [e^{-A} \sin B]^{(u,v)} - e^{21} [e^{-A} \cos B]^{(u,v)}\}. \quad (42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (30) и (31) – это рекуррентная запись очевидного геометрического соотношения

$$\frac{dv_k}{dt} = \frac{dv_{k-1}}{dt} + \frac{r_k \dot{\beta}_k}{e^{A(\sigma_{k-1}, v_{k-1})}}, \quad 1 \leq k \leq J,$$

где r_k – расстояние от точки $z(w_{k-1})$ до точки $z(w_k)$, а β_k – аргумент $w_k = \sigma_k + iv_k \in \mathbb{C}$. При этом график функции v_ξ – это ломаная, соединяющая точки с координатами $(\sigma_k, v_k) = (\sigma_k, v_{\sigma_k})$ для $0 \leq k \leq L$. В силу (16) и (33) соотношение (32) эквивалентно равенству (21). Остается установить справедливость уравнений (33), (34).

С этой целью, пользуясь введенным выше обозначением (41), сопоставим две формулы

$$\vec{V}(t, z(t)) \stackrel{(19)}{=} [e^{-A}(\cos B + i \sin B)]^{u(t), v(t)} \quad \text{и} \quad \vec{V}(t, z(t)) \stackrel{(1)}{=} \frac{d}{dt} z(t), \quad (43)$$

обратив внимание на то, что $z(t)$ согласно (12) выражается через функцию $A + iB$. Запишем интеграл в формуле (12) в виде суммы интегралов

$$\int_{0+iv(t)}^{0+iv(t)} + \int_{0+iv(t)}^{w(t)=u(t)+iv(t)}$$

и продифференцируем $z(t)$ по t . Имеем

$$\begin{aligned} \vec{V}(t, x(t), y(t)) \stackrel{(41)}{=} & \left\{ \int_0^{u(t)} \frac{d}{dt} [E]^{\xi, v(t)} d\xi + \frac{du}{dt} [E]^{u(t), v(t)} \right\} \\ & + i \left\{ \int_0^{v(t)} \frac{d}{dt} [E]^{0, \eta} d\eta + \frac{dv}{dt} [E]^{0, v(t)} \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Как уже было сказано, буквой ρ обозначается любая из величин σ , $\vec{v}$, $\vec{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (\beta, \vec{\beta})$, $\mathbf{V}$. Если Φ – та или иная функция переменной q , то градиент Φ будем обозначать через Φ_q . Используя эти обозначения, перепишем правую часть соотношения (44) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dt} \{ [E]^{u(t), v(t)} \} + \frac{dv}{dt} \left\{ \int_0^{u(t)} [E_v]^{\xi, v(t)} d\xi + i [E]^{0, v(t)} \right\} \\ & + \frac{d\rho}{dt} \left\{ \int_0^{u(t)} [E_\rho]^{\xi, v(t)} d\xi + i \int_0^{v(t)} [E_\rho]^{0, \eta} d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Преобразуем это выражение, учитывая, что $E = e^A \cos B + ie^A \sin B$,

$$E_v = e^{A+iB} \left(\frac{\partial A}{\partial v} + i \frac{\partial B}{\partial v} \right) \stackrel{(40)}{=} e^A \{AB\}_v^- + ie^A \{AB\}_v^+,$$

а также то, что аналогичная формула верна для E_ρ . Тогда оно примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dt} \{ [e^A \cos B + ie^A \sin B]^{u(t), v(t)} \} \\ & + \frac{dv}{dt} \left\{ \int_0^{u(t)} [e^A \{AB\}_v^- + ie^A \{AB\}_v^+]^{\xi, v(t)} d\xi + i [e^A \cos B + ie^A \sin B]^{0, v(t)} \right\} \\ & + \frac{d\rho}{dt} \left\{ \int_0^{u(t)} [e^A \{AB\}_\rho^- + ie^A \{AB\}_\rho^+]^{\xi, v(t)} d\xi \right. \\ & \quad \left. + i \int_0^{v(t)} [e^A \{AB\}_\rho^- + ie^A \{AB\}_\rho^+]^{0, \eta} d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Так преобразованную правую часть равенства (44) сопоставим с ее левой частью

$$\vec{V}(t, z(t)) \stackrel{(43)}{=} [e^{-A}(\cos B + i \sin B)]^{u(t), v(t)}$$

и распишем отдельно вещественную и мнимую компоненты равенства (44). Тогда получим

$$\begin{cases} h_1 = e^{11} \frac{du}{dt} + e^{12} \frac{dv}{dt} + f^{1\rho} \frac{d\rho}{dt}, \\ h_2 = e^{21} \frac{du}{dt} + e^{22} \frac{dv}{dt} + f^{2\rho} \frac{d\rho}{dt}, \end{cases} \quad (45)$$

где e^{ij} определены в формулах (36), (37), k -е компоненты векторов $f^{1\rho}$, $f^{2\rho}$ определены в формулах (38), (39), а

$$h_1 = [e^{-A} \cos B]^{u(t),v(t)}, \quad h_2 = [e^{-A} \sin B]^{u(t),v(t)}. \quad (46)$$

Учитывая, что в каждый момент времени однозначно определен потенциал $u(t) = u(t, x(t), y(t))$ скорости движения $t \mapsto (x(t), y(t))$ элементарного объема жидкости, заключаем, что однозначно определена и скорость du/dt изменения этого потенциала. Поэтому детерминант D системы (45) относительно du/dt и dv/dt отличен от нуля, что выражено формулой (35). Тем самым, система уравнений (45) может быть переписана в виде (33), (34). При этом H^1 и H^2 , фигурирующие в (42), задаются формулами

$$H^1 = \{e^{22}h_1 - e^{12}h_2\}/D, \quad H^2 = \{e^{11}h_2 - e^{21}h_1\}/D.$$

Остается проверить представленную в (42) формулу для H^1 . Для этого заметим, что в силу (36), (37) и (46) $h_j = e^{j1}[e^{-2A}]^{u(t),v(t)}$. Поэтому $H_1 = [e^{-2A}]^{u(t),v(t)}$.

Конечно, полученная в теореме 1 система обыкновенных дифференциальных уравнений, дающая принципиальную возможность представить задачу (7) в виде классической задачи оптимального управления в форме Понтрягина, достаточно сложна даже для численного ее исследования. Но эта сложность отражает природу исходной задачи со свободной границей для нелинейной нестационарной системы уравнений в частных производных (уравнения движения Эйлера и уравнения неразрывности). Было бы наивно ожидать, что еще не предстоит серьезная вычислительная работа. Она ожидает специалистов вычислительной математики.

В заключение отметим, что рассматриваемые в этой статье вопросы относятся к проблематике, частично затронутой в книгах [6], [7], где приведена достаточно подробная библиография.

Ряд полезных критических замечаний по предварительным версиям этой статьи сделали В. П. Карликов, А. Г. Куликовский, С. Л. Толоконников и А. И. Шафаревич. Автор чрезвычайно им благодарен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. В. Гогиш, Г. Ю. Степанов, *Отрывные и кавитационные течения*, Наука, М., 1990.
- [2] В. И. Власов, "Вариация конформного отображения при сингулярном деформировании области и ее приложение к теории струй", *Аналитические и численные методы решения задач математической физики*, Изд-во ВЦ АН СССР, М., 1989, 41–48.
- [3] A. S. Demidov, "Configurations du plasma stationnaire équilibré", *Free Boundary Problems*, Vol. I (Pavia, 1979), Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Rome, 1980, 467–485.

- [4] А. Баджади, А. С. Демидов, “Теоремы существования, несуществования и регулярности в одной задаче со свободной границей”, *Матем. сб.*, **122**:1 (1983), 64–81.
- [5] Г. Биркгоф, Э. Сарантонелло, *Струи, следы и каверны*, Мир, М., 1964.
- [6] М. И. Гуревич, *Теория струй идеальной жидкости*, Наука, М., 1979.
- [7] Д. В. Маклаков, *Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами*, Янус-К, М., 1997.

А. С. Демидов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: alexandre.demidov@mtu-net.ru

Поступило

04.03.2008