Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Гаврилюк, Классификация графов Райзера, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 14–21

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:38:25

Классификация графов Райзера

А. Л. Гаврилюк

Изучаются $(2, r_1, r_2)$ -регулярные графы, в которых объединение окрестностей двух различных вершин u, w содержит r_1 или r_2 вершин в зависимости от смежности u, w . Доказано, что такие графы являются либо сильно регулярными, либо прямой суммой полного многодольного графа и клики. Ранее другими авторами изучался случай $r_1 = r_2$.

Библиография: 4 названия.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Далее, подграф из Γ будет означать индуцированный подграф. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* . Пусть $a^\perp$ – шар радиуса 1 с центром a . Для подграфа Σ графа Γ через $\Sigma^\perp$ обозначим $\bigcap_{a \in \Sigma} a^\perp$.

Через $k(a)$ обозначим *степень вершины a* , т.е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если $k(a) = k$ для любой вершины a из Γ . Для ребра $\{a, c\}$ графа Γ через $\lambda(a, c)$ обозначим число вершин в подграфе $[a] \cap [c]$. Для различных несмежных вершин a, b через $\mu(a, b)$ обозначим число вершин в подграфе $[a] \cap [b]$. Регулярный степени k граф Γ называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ) , если $|\Gamma| = v$, и для любой пары вершин a, b подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно λ вершин, если a, b смежны, и точно μ вершин, если a, b не смежны. Таким образом, в сильно регулярном графе мощность *пересечения* окрестностей любых двух различных вершин принимает точно два значения, в зависимости от того, смежны эти вершины или нет.

Графом Деца с параметрами (v, k, a, b) называется регулярный степени k граф на v вершинах, в котором пересечение окрестностей любой пары различных его вершин содержит точно a или точно b вершин. Таким образом, класс графов Деца включает в себя сильно регулярные графы.

Через $K_{m_1, \dots, m_n}$ будем обозначать полный многодольный граф с долями порядков $m_1, \dots, m_n$. Если $m_1 = \dots = m_n$, то такой граф будем обозначать через $K_{n \times m}$. *Кликой K_l* размера l называется полный граф на l вершинах.

Для натуральных чисел r_1 и r_2 рассмотрим класс графов $\mathcal{R}(r_1, r_2)$ со следующим свойством: для любого графа Γ из этого класса и для любой пары различных вершин u, w графа Γ число вершин в *объединении* их окрестностей $[u] \cup [w]$ равно r_1 , если вершины u, w смежны, и r_2 , в противном случае.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00009).

В работе [1] было показано, что нетривиальный (не являющийся кликой) граф из класса $\mathcal{R}(r, r)$ является регулярным и, как следствие, даже сильно регулярным. В той же статье ставится задача описания класса графов $\mathcal{R}(r_1, r_2)$ при $r_1 \neq r_2$.

Заметим, что в своем доказательстве авторы [1] существенно использовали теорему Райзера [2] о решении матричного уравнения вида $\mathbf{A}^2 = \mathbf{D} + \lambda \mathbf{J}$, где $\mathbf{A}$ – матрица некоторой схемы, ассоциированной с графом, $\mathbf{D}$ – диагональная матрица с диагональными элементами, связанными со степенями вершин в графе, $\mathbf{J}$ – матрица, все элементы которой равны 1. Из теоремы Райзера следует, что $\mathbf{D}$ – скалярная матрица (за конечным числом исключений). Простым следствием этого факта является сильная регулярность $(2, r, r)$ -регулярных графов. Поэтому в дальнейшем графы класса $\mathcal{R}(r_1, r_2)$ будем называть *графами Райзера* с параметрами (r_1, r_2) .

Очевидно, что любой сильно регулярный граф является графом Райзера для подходящих значений r_1, r_2 , и, наоборот, регулярный граф Райзера будет сильно регулярным. Поэтому упомянутая задача из [1] естественно сводится к вопросу о существовании графов Райзера, содержащих вершины различной степени. Для начала укажем, что найти пример такого графа очень просто – достаточно убедиться, что граф $K_{1,m}$ является графом Райзера с параметрами $(m+1, 1)$. В этой работе мы покажем, что все другие нетривиальные исключения (т.е. графы Райзера, не являющиеся сильно регулярными) получаются аналогичным образом.

Для графов X, Y через $X \otimes Y$ обозначим граф, называемый *прямой суммой* X и Y , полученный объединением X и Y , причем каждая вершина X смежна со всеми вершинами Y .

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – граф Райзера с параметрами (r_1, r_2) . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) Γ – сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , причем $r_1 = 2k - \lambda$, $r_2 = 2k - \mu$;
- 2) $\Gamma = K_{n \times m} \oplus K_l$ для подходящих значений n, m, l , $n \geq 1$, таких, что $r_1 = n \cdot m + l$, $r_2 = (n - 1) \cdot m + l$;
- 3) Γ является объединением изолированных клик одинакового размера l и $r_1 = l$, $r_2 = 2 \cdot (l - 1)$.

В связи с доказанной теоремой 1 представляет интерес следующая проблема. Слабым графом Райзера с параметрами (r_1, r_2) назовем граф Γ , в котором для любой пары различных его вершин u, w число вершин в объединении их окрестностей $[u] \cup [w]$ равно r_1 или r_2 (независимо от смежности u и w). Класс слабых графов Райзера включает в себя графы Райзера и графы Деза. Верно ли, что любой слабый граф Райзера является графом Райзера или графом Деза?

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть Γ_1 и Γ_2 – сильно регулярные графы с параметрами $(v_1, k_1, \lambda_1, \mu_1)$ и $(v_2, k_2, \lambda_2, \mu_2)$ соответственно. Обозначим через Γ граф, являющийся прямой суммой Γ_1 и Γ_2 . Тогда объединение окрестностей любой пары вершин, одна из которых принадлежит Γ_1 , а другая Γ_2 , содержит $v_1 + v_2$ вершин. Далее, если $a, b \in \Gamma_i$, то $||a|| \cup ||b||$ содержит $r_i(a, b) = v_i + 2k_i - \lambda_i$, если a, b смежны, и $v_i + 2k_i - \mu_i$, в противном случае, $\{i, \bar{i}\} = \{1, 2\}$.

Легко показать, что $r_i(a, b) = r$ для всех $i \in \{1, 2\}$ и любой пары вершин $a, b \in \Gamma_i$, если только $\lambda_i = \mu_i$ и $2k_1 - \lambda_1 + k_1(k_1 - 1)/\lambda_1 = 2k_2 - \lambda_2 + k_2(k_2 - 1)/\lambda_2$. В этом случае Γ является слабым графом Райзера. В частности, если и $\lambda_1 = \lambda_2$ (но графы Γ_1 и Γ_2 не обязательно изоморфны), то Γ является графом Деза. Примеры графов Γ_1 и Γ_2 , для параметров которых выполняется указанное соотношение, но $\lambda_1 \neq \lambda_2$, автору не

известны. Заметим, что можно также рассматривать прямую сумму произвольного числа сильно регулярных графов. Соотношения для параметров графов выводятся аналогичным образом.

Рассмотрим еще одно обобщение класса графов Райзера.

Пусть Γ – граф. Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $\Gamma(w)$.

Скажем, что вершина $x \in \Gamma$ допускает *локальный массив пересечений* $B(x)$,

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c_2(x) & \dots & c_d(x) \\ 0 & a_1(x) & a_2(x) & \dots & a_d(x) \\ b_0(x) & b_1(x) & b_2(x) & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

если для любой вершины $y \in \Gamma_i(x)$ верны равенства $b_i(x) = b_i(x, y)$, $c_i(x) = c_i(x, y)$, $a_i(x) = |[y]| - b_i(x) - c_i(x)$.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$, т.е. $B(x) = B(y)$ для любых вершин $x, y \in \Gamma$. Для любых двух вершин u, w дистанционно регулярного графа Γ , находящихся на расстоянии l , числа $p_{ij}^l = |\Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(w)|$, $i, j, l \in \{0, \dots, d\}$, называются *числами пересечения* и не зависят от выбора вершин на расстоянии l .

Если каждая вершина x графа Γ допускает локальный массив пересечений $B(x)$, то по теореме Годсила и Шейв-Тейлора Γ (см. [3], [4]) является либо дистанционно регулярным графом, либо дистанционно брегулярным, т.е. имеется точно два локальных массива пересечений.

Рассмотрим обобщение результата работы по аналогии с обобщением сильно регулярного графа до дистанционно регулярного графа. А именно, пусть Γ – связный граф диаметра $d \geq 3$, и существуют числа r_{ij}^l , $i, j, l \in \{1, \dots, d\}$ такие, что для любой пары вершин $u, w \in \Gamma$, на расстоянии l в Γ , число вершин в подграфе $\Gamma_i(u) \cup \Gamma_j(w)$ равно $r_{ij}^l = r_{ji}^l$. Такой граф будем называть *графом Райзера с массивом объединений* $\{r_{ij}^l\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ – граф Райзера диаметра d с массивом, объединений $\{r_{ij}^l\}$. Тогда Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ и числами пересечений p_{ij}^l , $k_i = |\Gamma_i(u)|$ для любой вершины u графа Γ , и $r_{ij}^l = k_i + k_j - p_{ij}^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть граф Γ удовлетворяет условию теоремы. Тогда для любой пары несмежных различных вершин $a, b \in \Gamma$ имеем равенства $k_i + k_j - \mu_{ij} = r_2$, если степени вершин a, b равны k_i, k_j , соответственно, и $\mu_{ij} = |[a] \cap [b]|$, $\mu_{ij} = \mu_{ji}$. Аналогично, для любой пары смежных вершин со степенями k_i, k_j имеем $k_i + k_j - \lambda_{ij} = r_1$, $\lambda_{ij} = |[a] \cap [b]|$ и $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$.

Обозначим через $s_j(x)$ число вершин степени k_j в окрестности вершины $x \in \Gamma$. Положим $v = |\Gamma|$ – число вершин в графе Γ , e – число ребер в Γ .

ЛЕММА 1. Для любых двух вершин $a, b \in \Gamma$ равных степеней k_i справедливы следующие равенства:

- (1) $\sum_j s_j(a) = \sum_j s_j(b) = k_i$;
- (2) $\sum_j s_j(a)k_j = \sum_j s_j(b)k_j$;
- (3) $\sum_j s_j(a)k_j = (k_i - r_2)(v - k_i - 1) + 2e - k_i - k_i(r_1 - k_i - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем вершину $a \in \Gamma$ степени k_i . Первое утверждение леммы очевидно. Подсчитав число ребер между подграфами $[a]$ и $\Gamma - a^\perp$ двумя способами, получим

$$\sum_{u \in \Gamma_1(a)} (k(u) - \lambda(a, u) - 1) = \sum_{w \in \Gamma - a^\perp} \mu(a, w).$$

Заметим, что $k(u) + k_i - \lambda(a, u) = r_1$ для вершины $u \in \Gamma(a)$, $k(w) + k_i - \mu(a, w) = r_2$ для вершины $w \in \Gamma - a^\perp$, поэтому

$$k_i(r_1 - k_i - 1) = \sum_{w \in \Gamma - a^\perp} (k(w) + k_i - r_2).$$

Далее, число слагаемых в последней сумме точно $v - k_i - 1$, поэтому мы можем записать

$$\sum_{w \in \Gamma - a^\perp} (k(w) + k_i - r_2) = (k_i - r_2)(v - k_i - 1) + \sum_{w \in \Gamma - a^\perp} k(w).$$

Для любой вершины $a \in \Gamma$ имеем очевидное равенство

$$2e = k(a) + \sum_{u \in \Gamma_1(a)} k(u) + \sum_{w \in \Gamma - a^\perp} k(w).$$

Поэтому

$$k_i(r_1 - k_i - 1) = (k_i - r_2)(v - k_i - 1) + 2e - k_i - \sum_{u \in \Gamma_1(a)} k(u).$$

Теперь,

$$\sum_{u \in \Gamma_1(a)} k(u) = \sum_j s_j(a) k_j = (k_i - r_2)(v - k_i - 1) + 2e - k_i - k_i(r_1 - k_i - 1),$$

и правая часть этого соотношения зависит только от степени вершины a , т.е. не зависит от выбора вершины степени k_i . Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть вершины u, w графа Γ имеют различные степени, для определенности, k_i и k_j , соответственно, и находятся на расстоянии d в Γ , $d \in \{1, 2\}$. Положим $\delta = 2 - d$. Тогда имеет место равенство

$$(k_i - k_j)(r_2 - \delta) = \sum_l s_l(u) k_l - \sum_l s_l(w) k_l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем пару вершин $u, w \in \Gamma$, удовлетворяющих условиям леммы. Обозначим через f_l число вершин степени k_l в подграфе $[u] \cap [w]$.

Через A, B и C соответственно обозначим следующие подграфы: $[u] - w^\perp$, $[u] \cap [w]$, $[w] - u^\perp$. Тогда подграф A содержит $s_l(u) - f_l$ вершин степени k_l , если $l \neq j$, и $s_j(u) - f_j - \delta$ вершин степени k_j . Аналогичное утверждение можно выписать для подграфа C .

Через $e(X, Y)$ обозначим число ребер между подграфами X и Y ; в частности, для вершины x через $e(x, Y)$ обозначим число вершин из подграфа Y , смежных

с вершиной x , а для подграфа X число $e(X, X)$ есть число ребер в X . Тогда для вершины $b \in B$ имеем $e(b, A) = \lambda(u, b) - \delta - e(b, B)$,

$$e(A, B) = \sum_{b \in B} e(b, A) = \sum_l f_l \lambda_{il} - \delta |B| - 2 \cdot e(B, B).$$

Аналогично получим

$$e(C, B) = \sum_l f_l \lambda_{jl} - \delta |B| - 2 \cdot e(B, B).$$

Далее, если u, w смежны, то для вершины $a \in A$ подграф $[a] \cap [w]$ содержит $e(a, B)$ вершин из $[u] \cap [w]$, вершину u и $e(a, C) = \mu(w, a) - e(a, B) - 1$ вершин из C . Если же вершины u, w несмежны, то $e(a, C) = \mu(w, a) - e(a, B)$. Таким образом, $e(a, C) = \mu(w, a) - e(a, B) - \delta$.

Далее,

$$e(A, C) = \sum_{l \neq j} (s_l(u) - f_l)(\mu_{lj} - \delta) + (s_j(u) - f_j - \delta)(\mu_{jj} - \delta) - e(A, B).$$

С другой стороны, это же число равно

$$\sum_{l \neq i} (s_l(w) - f_l)(\mu_{li} - \delta) + (s_i(w) - f_i - \delta)(\mu_{ii} - \delta) - e(C, B).$$

Отсюда,

$$e(A, C) = \sum_l (s_l(u) - \delta \delta_{jl})(\mu_{jl} - \delta) - \sum_l f_l(\mu_{jl} + \lambda_{il} - \delta) + \delta |B| + 2 \cdot e(B, B),$$

$$e(A, C) = \sum_l (s_l(w) - \delta \delta_{il})(\mu_{il} - \delta) - \sum_l f_l(\mu_{il} + \lambda_{jl} - \delta) + \delta |B| + 2 \cdot e(B, B).$$

Далее, в обоих уравнениях коэффициент при f_l равен $\mu_{il} + \lambda_{jl} - \delta = \mu_{jl} + \lambda_{il} - \delta$. Поэтому

$$\sum_l (s_l(u) - \delta \delta_{jl})(\mu_{jl} - \delta) = \sum_l (s_l(w) - \delta \delta_{il})(\mu_{il} - \delta).$$

Теперь, $\mu_{il} = k_i + k_l - r_2$; следовательно,

$$\begin{aligned} & k_i(k_j - r_2 - \delta) + \sum_l s_l(u)k_l - \delta(2k_j - r_2 - \delta) \\ &= k_j(k_i - r_2 - \delta) + \sum_l s_l(w)k_l - \delta(2k_i - r_2 - \delta), \\ & (k_i - k_j)(\delta - r_2) + \sum_l s_l(u)k_l - \sum_l s_l(w)k_l = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Из утверждения (3) леммы 1 имеем (в обозначениях леммы 2)

$$\sum_l s_l(u)k_l = (k_i - r_2)(v - k_i - 1) + 2e - k_i - k_i(r_1 - k_i - 1),$$

$$\sum_l s_l(w)k_l = (k_j - r_2)(v - k_j - 1) + 2e - k_j - k_j(r_1 - k_j - 1),$$

$$\sum_l s_l(u)k_l - \sum_l s_l(w)k_l = (k_i - k_j)(v - 1 + r_2 - r_1).$$

С другой стороны, из утверждения леммы 2 следует, что

$$(k_i - k_j)(\delta - r_2) + \sum_l s_l(u)k_l - \sum_l s_l(w)k_l = 0.$$

Отсюда либо $k_i = k_j$, что противоречит исходному предположению $k_i \neq k_j$, либо $r_2 - \delta = v - 1 + r_2 - r_1$ и $v = r_1 + 1 - \delta$.

Если все вершины различных степеней попарно несмежны, то Γ – объединение изолированных регулярных графов; противоречие с тем, что тогда $v = r_1 + 1$.

Значит, можно считать, что вершины u, w различных степеней смежны, и $v = r_1$. Предположим, что подграфы A, C не пусты. Тогда для любой вершины $x \in A$ имеем $C \subset [x]$, и для любой вершины $y \in B$ имеем $A \cup C \subset [y]$ и $B \subseteq \Gamma^\perp$. Поэтому, в частности, все вершины из A имеют одинаковую степень $k(x)$ (так как A является коккликой; в противном случае для пары смежных вершин из A вершина w не попадает в объединение их окрестностей). Тогда $\mu(x, w) = k_j = k_j + k(x) - r_2$ и $k(x) = r_2$. Симметрично, для вершины $y \in C$ имеем $k(y) = r_2$. Так как A, C – кокклики, вершины u, w имеют равные степени; противоречие. Итак, подграф A пуст. Тогда $w \in \Gamma^\perp$, и снова, если C содержит ребро $\{a, b\}$, то $u \notin [a] \cup [b]$, поэтому C – коклика.

Допустим, что подграф B не является кликой. Так как объединение окрестностей вершины u и любой вершины из C содержит в точности $|B| + 1$ вершину, объединение окрестностей любых несмежных вершин из B содержит в точности $|B| + 1 - m$ вершин из $B \cup \{w\}$, где m – число вершин в $\{u\} \cup C$. Далее, объединение окрестностей концевых вершин любого ребра из $B^0 = B \cup \{w\}$ содержит все вершины из B^0 , поэтому подграф B^0 является $(2, r_1 - m, r_2 - m)$ -регулярным графом, и к нему применима вся последовательность рассуждений, приведенная выше. А именно, положим $B^i = [u_i] \cap w^\perp$, где вершина $u_i \in B^{i-1}$, $B^0 = B \cup \{w\}$, и степени вершин u_i и b в графе B^{i-1} различны. Если для некоторого i такой вершины u_i не найдется, то, очевидно, что B^{i-1} – клика. Пусть I – такое значение i , что B^i является кликой. Далее, по построению для всех возможных $1 \leq i \leq I$ подграф $B^{i-1} - B^i$ является m -коккликой. Действительно, так как подграф B^0 содержит $|B| + 1$ вершин, пара несмежных вершин из B^0 несмежна точно с $|B| + 1 - (|B| + 1 - m) - 2 = m - 2$ вершинами из B^0 . Таким образом, максимальная коклика в B^0 имеет порядок m . По построению B^{i-1} это утверждение верно для любого $1 \leq i \leq I$.

Теперь B^I – клика порядка l для подходящего l ; объединение подграфов $B^{i-1} - B^i$ для $1 \leq i \leq I$ и $\Gamma - B^0$ составляет доли полного многодольного графа $K_{(I+1) \times m}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть граф Γ удовлетворяет условиям теоремы 2, и вершины $u, w \in \Gamma$ смежны. Имеем

$$r_{12}^1 = |\Gamma_1(u)| + |\Gamma_2(w)| - |\Gamma_1(u) \cap \Gamma_2(w)|.$$

Далее,

$$|\Gamma_1(u) \cap \Gamma_2(w)| = |\Gamma_1(u)| - \lambda(u, w) - 1;$$

отсюда

$$r_{12}^1 = |\Gamma_2(w)| + \lambda(u, w) + 1 \quad \text{и} \quad |\Gamma_2(w)| = |\Gamma_2(u)|.$$

Теперь,

$$\lambda(u, w) = |\Gamma_1(u)| + |\Gamma_1(w)| - r_{11}^1 \quad \text{и} \quad r_{12}^1 = |\Gamma_2(u)| + |\Gamma_1(u)| + |\Gamma_1(w)| - r_{11}^1 + 1.$$

Отсюда следует, что все вершины из окрестности u имеют одинаковую степень. В частности, степени любых смежных вершин u, w таких, что подграф $[u] \cap [w]$ не пуст, равны.

Если граф Γ регулярен, то

$$r_{1j}^1 = |\Gamma_1(u)| + |\Gamma_j(w)| = |\Gamma_j(u)| + |\Gamma_1(w)|$$

для всех $j \geq 3$, поэтому $|\Gamma_j(u)| = |\Gamma_j(w)|$ для любых вершин u, w графа Γ . Теперь для любых вершин x, y на расстоянии l по определению параметров r_{ij}^l имеем

$$r_{ij}^l = |\Gamma_i(x)| + |\Gamma_j(y)| - |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)| = |\Gamma_j(x)| + |\Gamma_i(y)| - |\Gamma_j(x) \cap \Gamma_i(y)|.$$

Отсюда

$$|\Gamma_j(x) \cap \Gamma_i(y)| = |\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)| = p_{ij}^l$$

для подходящих натуральных чисел и $p_{ij}^l = p_{ji}^l$, причем числа p_{ij}^l при фиксированных индексах i, j, l не зависят от выбора вершин x, y . По определению Γ является дистанционно регулярным графом.

Предположим теперь, что вершины u, w смежны, $|[u] \cap [w]| = 0$, и степени вершин u, w не равны. Положим $C = \{c_0 = u, c_1 = w, c_2, \dots, c_r \neq u\}$ – некоторый путь длины $r + 1$, содержащий вершины u, w , и c_i смежна с c_{i+1} для $i \in \{0, \dots, r-1\}$, вершина c_r смежна с $c_0 = u$. Через x_i обозначим степень вершины c_i этого цикла. Тогда все x_i с четными индексами равны степени вершины u , а все x_i с нечетными индексами равны степени вершины w . Поэтому число r нечетно. Более того, все вершины c_i с индексами одной четности попарно не смежны (если, скажем, c_i смежна с $c_{i+2 \cdot k}$ для некоторого k , то можно построить путь C' , в котором вершины c_i и $c_{i+2 \cdot k}$ смежны, нечетной длины $r - 2 \cdot k$). Так как граф Γ связен, путь C можно выбрать так, чтобы он включал в себя все вершины графа Γ , по необходимости включая в него вершины несколько раз. Поэтому Γ является двудольным графом, и вершины u, w попадают в разные доли. Обозначим через $k_i, i \in \{1, 2\}$, степени вершин из разных долей Γ . Пусть для определенности, вершина u имеет степень k_1 .

Заметим, что подграфы $\Gamma_i(x)$ для вершины x любой степени являются кокликами. Поэтому $\Gamma_2(u) = k_1(k_2 - 1)/\mu_1$, где $\mu_1 = 2k_1 - r_{11}^2$ – число вершин в подграфе $[x] \cap [u]$ для любой вершины $x \in \Gamma_2(u)$. Аналогично, $\Gamma_2(w) = k_2(k_1 - 1)/\mu_2$, где $\mu_2 = 2k_2 - r_{11}^2$. По доказанному выше $|\Gamma_2(u)| = |\Gamma_2(w)|$. Отсюда получаем $r_{11}^2 = 2k_1k_2$; противоречие с тем, что $r_{11}^2 < 2k_1$.

Итак, для любого графа Γ диаметра, большего 2, условие

$$|\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)| = |\Gamma_i(y) \cap \Gamma_j(x)| = p_{ij}^l$$

для любых вершин x, y на расстоянии l и некоторых констант $p_{ij}^l, i, j, l \in \{0, \dots, d\}$ эквивалентно условию

$$|\Gamma_i(x) \cup \Gamma_j(y)| = |\Gamma_i(y) \cup \Gamma_j(x)| = r_{ij}^l$$

для любых вершин x, y на расстоянии l и некоторых констант $r_{ij}^l, i, j, l \in \{1, \dots, d\}$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Khodkar, D. Leach, D. Robinson, “Every $(2, r)$ -regular graph is regular”, *Util. Math.*, **73** (2007), 169–172.
- [2] H. J. Ryser, “A generalization of the Matrix equation $A^2 = J$ ”, *Linear Algebra and Appl.*, **3**:4 (1970), 451–460.
- [3] Э. Баннаи, Т. Ито, *Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений*, Мир, М., 1987.
- [4] C. D. Godsil, J. Shawe-Taylor, “Distance-regularised graphs are distance-regular or distance-biregular”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **43**:1 (1987), 14–24.

А. Л. Гаврилюк

Институт математики и механики УрО РАН

E-mail: ax-g@mail.ru

Поступило

19.06.2008