Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Самойлов, Аналог теоремы Левицкого для бесконечно порожденных ассоциативных алгебр, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 151–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 11:22:49

Аналог теоремы Левицкого для бесконечно порожденных ассоциативных алгебр

Л. М. Самойлов

Все рассматриваемые в работе алгебры являются ассоциативными алгебрами над полем.

Из теоремы Левицкого о положительном решении проблемы Куроша–Левицкого для PI-алгебр вытекает, что если PI-алгебра A порождается множеством $\{a_1, \dots, a_k\}$ и любое слово от множества образующих $\{a_i\}$ является нильпотентным степени не выше m , то сама алгебра A является нильалгеброй ограниченного индекса N . Число N зависит от степени тождества, m и k . Доказательство этого утверждения и его обобщений, содержится, например, в [1] или [2].

В рассмотренном выше утверждении над полями нулевой характеристики убрать условие конечной порожденности нельзя, что показывает следующий простой пример.

ПРИМЕР. Пусть F – поле нулевой характеристики. Рассмотрим свободную ассоциативно-коммутативную алгебру $F[x_1, x_2, \dots]$ над F без единицы, порожденную счетным множеством $\{x_1, x_2, \dots\}$. Пусть $A = F[x_1, x_2, \dots]/I$, где идеал I порожден всеми соотношениями $x_i^2 = 0$. Тогда в алгебре A любое слово от образующих $a_i = x_i + I$ нильпотентно степени 2. Однако

$$(a_1 + \dots + a_n)^n = n! a_1 a_2 \dots a_n \neq 0.$$

Таким образом, A не является нильалгеброй ограниченного индекса.

Заметим, что если в примере поле F имеет характеристику $p > 0$, то A – нильалгебра индекса p . Ниже мы докажем теорему 1, которая показывает, что и в общем случае над полями положительной характеристики условие конечной порожденности в классической формулировке проблемы Куроша–Левицкого является лишним.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – ассоциативная алгебра над полем характеристики $p > 0$, удовлетворяющая тождеству $f = 0$. Тогда если A порождается множеством $\{a_i, i \in I\}$, и любое слово от элементов a_i нильпотентно степени не выше m , то A является нильалгеброй ограниченного индекса N . При этом N зависит от характеристики p , тождества f и числа m (и не зависит от мощности множества I).

Доказательство теоремы 1 основывается на положительном решении проблемы Кемера о нильиндексе радикала относительно свободной ассоциативной алгебры [3], которое было получено автором в [4] для многообразий сложности $< p$ и в [5] в общем случае.

ТЕОРЕМА 2 [5]. Радикал относительно свободной ассоциативной алгебры счетного ранга над бесконечным полем положительной характеристики является нильидеалом ограниченного индекса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Ясно, что достаточно доказать теорему 1 только для алгебр над бесконечными полями характеристики $p > 0$. Поэтому будем считать, что A – алгебра над F , F – бесконечное поле характеристики $p > 0$. Через $\text{Var}(A)$ будем обозначать многообразие, порожденное алгеброй A . Обозначим через $F\langle X \rangle$ свободную ассоциативную алгебру (без единицы), порожденную счетным множеством X . Пусть $\Gamma \subseteq F\langle X \rangle$ – идеал тождеств алгебры A . Тогда $F\langle X \rangle/\Gamma$ – относительно свободная алгебра счетного ранга в многообразии $\text{Var}(A)$. Напомним, что сложностью T -идеала Γ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00080).

(а также сложностью соответствующего ему многообразия $\text{Var}(A)$) называется наибольшее число n со свойством $\Gamma \subseteq T[M_n]$, где $T[M_n]$ – идеал тождеств алгебры матриц M_n порядка n . Сложность многообразия конечна по теореме Амицура–Левитского, за исключением многообразия, состоящего только из нулевой алгебры. Хорошо известно, что радикал алгебры $F\langle X \rangle / \Gamma$ совпадает с $T[M_n] / \Gamma$.

Будем вести индукцию по сложности многообразия $\text{Var}(A)$. Для многообразий сложности 0 теорема очевидна, так как каждое такое многообразие удовлетворяет тождеству $x^N = 0$ для некоторого N .

Пусть сложность многообразия $\text{Var}(A)$ равна n . Рассмотрим идеал I алгебры A , порожденный множеством

$$\{h(a_1, \dots, a_s) \mid a_i \in A, h \in T[M_n]\}.$$

Из теоремы 2 вытекает, что I – нильидеал ограниченного индекса. Поэтому достаточно доказать, что факторалгебра $B = A/I$ будет нильалгеброй ограниченного индекса. Через M обозначим образ множества всех слов над алфавитом $\{a_i, i \in I\}$ при естественном отображении $A \rightarrow A/I$.

Алгебра B удовлетворяет всем тождествам M_n . Хорошо известно, что M_n обладает полилинейным центральным полиномом $g(x_1, \dots, x_l)$ (см., например, [6]), причем любой центральный полином будет тождеством алгебры M_{n-1} . Рассмотрим множество J , состоящее из линейных комбинаций элементов $b_0 g(b_1, \dots, b_l)$, $b_i \in M$. Ясно, что J является двусторонним идеалом алгебры B .

Так как полином g полилинеен, алгебра B/J удовлетворяет тождеству

$$x_0 g(x_1, \dots, x_l) = 0,$$

поэтому сложность многообразия $\text{Var}(B/J)$ не превосходит $n - 1$. Следовательно, по предположению индукции B/J будет нильалгеброй ограниченного индекса. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что идеал J также является нильалгеброй ограниченного индекса.

Рассмотрим произвольный элемент $b \in J$. Тогда b имеет вид $b = \sum \alpha_i u_i$, $\alpha_i \in F$, где каждый из элементов u_i можно представить в виде $u_i = b_0^{(i)} g(b_1^{(i)}, \dots, b_l^{(i)})$, $b_j^{(i)} \in M$. Тогда элемент $b^N = (\sum \alpha_i u_i)^N$ является линейной комбинацией элементов $L_{N,\rho}(u_{i_1}, \dots, u_{i_t})$, где через $L_{N,\rho}(x_1, \dots, x_t)$ обозначена частичная линейаризация полинома x^N мультистепени $(\rho) = (\rho_1, \dots, \rho_t)$ по переменным $(x_1, \dots, x_t)$. Учитывая, что значения полинома g лежат в центре алгебры B , получаем

$$L_{N,\rho}(u_{i_1}, \dots, u_{i_t})(g(b_1^{(i_1)}, \dots, b_l^{(i_1)})^{\rho_1} \dots (g(b_1^{(i_t)}, \dots, b_l^{(i_t)})^{\rho_t} L_{N,\rho}(b_0^{(i_1)}, \dots, b_0^{(i_t)})). \quad (*)$$

В работе [3] Кемером было показано, что существует такая константа q , что следствиями тождества $f = 0$ являются все частичные линейаризации $L_{N,\rho}$ тождества $x^N = 0$ при достаточно больших N , имеющие степень $< N/q$ по каждой из переменных. Далее рассмотрим два случая.

1) Для всех ρ_i выполнено $\rho_i < N/q$. Тогда при достаточно больших N

$$L_{N,\rho}(b_0^{(i_1)}, \dots, b_0^{(i_t)}) = 0,$$

поэтому элемент $(*)$ равен нулю в алгебре B ; следовательно, и в идеале J .

2) Для некоторого i (пусть для $i = 1$) выполнено $\rho_i \geq N/q$. Заметим, что элемент $g(b_1^{(i_1)}, \dots, b_l^{(i_1)})$ является линейной комбинацией не более чем $l!$ слагаемых, каждое из которых лежит в M . Пусть это будет линейная комбинация мономов $v_1, \dots, v_{l'}$, $l' \leq l!$. По теореме А. И. Ширшова о высоте, примененной к l -порожденной подалгебре $\langle v_1, \dots, v_{l'}, 0, \dots, 0 \rangle$ алгебры B , при достаточно больших N/q (N/q зависит от l , но не от элементов $v_1, \dots, v_{l'}$) элемент $g(b_1^{(i_1)}, \dots, b_l^{(i_1)})^{\rho_1}$ является линейной комбинацией таких

слов в алфавите $v_1, \dots, v_{l'}$, каждое из которых содержит m -ю степень некоторого подсло-
ва. Но m -я степень любого слова из M равна нулю. Таким образом, в рассматриваемом
случае при достаточно больших N элемент $(*)$ тоже равен нулю. При этом N не зависит
от b и мощности множества I .

Итак, при достаточно больших N , не зависящих от числа порождающих, элемент
 $b^N = (\sum \alpha_i u_i)^N$ равен линейной комбинации нулевых слагаемых, т.е. он равен нулю.
Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Zelmanov, *Nil Rings and Periodic Groups*, KMS Lecture Notes Math., Korean Math.
Soc., Seoul, 1992. [2] A. Ya. Belov, V. V. Borisenko, V. N. Latyshev, *J. Math. Sci. (N. Y.)*,
87:3 (1997), 3463–3575. [3] A. Kemer, *Trends in Ring Theory* (Miskolc, Hungary, 1996),
CMS Conf. Proc., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 59–69. [4] Л. М. Самойлов,
Матем. заметки, **82**:4 (2007), 583–592. [5] Л. М. Самойлов, *Матем. сб.*, **199**:5 (2008),
81–126. [6] Ю. П. Размыслов, *Тождества алгебр и их представлений*, Наука, М., 1989.

Л. М. Самойлов

Ульяновский государственный университет
E-mail: samoilov_l@rambler.ru

Поступило
16.09.2008