Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Скориков, Точные значения информационных колмогоровских поперечников классов Соболева в одномерном случае, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 154–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:19:21

Точные значения информационных колмогоровских поперечников классов Соболева в одномерном случае

Е. М. Скориков

Везде далее X, Y – банаховы пространства, M – непустое центрально симметричное относительно нуля подмножество X , $\mathcal{B}(X, Y)$ – множество всех линейных ограниченных операторов из X в Y , B_X – замкнутый единичный шар X . Пусть $L_m \subset X$ – подпространство размерности m , $V^n \subset X$ – подпространство коразмерности n .

Величины

$$d_m(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{L_m \subset X} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L_m} \|x - y\|_X,$$

$$\lambda_n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{L_n \subset X, A \in \mathcal{B}(X, L_n)} \sup_{x \in M} \|x - Ax\|_X,$$

называются *колмогоровским* и *линейным поперечниками* множества M соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Информационным колмогоровским поперечником назовем величину

$$d_m^n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{V^n} \sup_{b \in X} d_m(M \cap (V^n + b), X).$$

В работе [1] показано, что для произвольного множества $M \subset X$ справедливо неравенство

$$d_m^n(M, X) \leq \lambda_{n+m}(M, X). \quad (1) \quad \{\text{eq1}\}$$

Доказательство основной теоремы базируется на аппарате приближения функции сплайнами (см. [2]).

Обозначим через $\tilde{\Gamma}_{2k,r}$ множество 1-периодических идеальных сплайнов порядка r , у которых r -я производная имеет на периоде не более, чем $2k$ существенных перемен знака, а через $\varphi_{2k,r} \in \tilde{\Gamma}_{2k,r}$ – Эйлеров идеальный сплайн. Пусть $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – одномерный тор, $\tilde{L}_q = \tilde{L}_q(\mathbb{T}^1)$ – пространство Лебега.

Множество функций

$$\widetilde{W}_\infty^r \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in AC^{(r-1)}(\mathbb{T}^1) : \|f^{(r)}\|_\infty \leq 1\}$$

называется *классом Соболева*.

Для доказательства основной теоремы, нам потребуется

ТЕОРЕМА 1 ([2; с. 260]). Для произвольных $k \in \mathbb{N}$, $q \in [1, \infty]$ справедливы равенства

$$d_{2k}(\widetilde{W}_\infty^r, \tilde{L}_q) = \lambda_{2k}(\widetilde{W}_\infty^r, \tilde{L}_q) = \|\varphi_{2k,r}\|_q. \quad (2) \quad \{\text{eq2}\}$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n + m = 2k$ четно; тогда выполнено равенство

$$d_m^n(\widetilde{W}_\infty^r, \tilde{L}_q) = d_{n+m}(\widetilde{W}_\infty^r, \tilde{L}_q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху вытекает из (1) и (2). Для оценки снизу достаточно оценить величину

$$\inf_{V^n} d_m(\widetilde{W}_\infty^r \cap V^n, \tilde{L}_q),$$

для чего достаточно показать справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 1. Для произвольных подпространств $V^n, L_m \subset X$, обладающих одним из условий

$$(*) \quad 1 \in L_m,$$

$$(**) \quad 1 \in X \setminus V^n,$$

существует функция $f_* \in \tilde{\Gamma}_{n+m,r}$ такая, что

$$f_* \in V^n, \quad \inf_{l_m \in L_m} \|f_* - l_m\|_q = \|f_*\|_q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы полностью аналогично доказательству леммы 6.1.5 [2; с. 255]. Пусть $V^n = \bigcap_{s=1}^n \ker \langle \cdot, y_s^* \rangle$. Так же, как и в лемме 6.1.5, для произвольного вектора ξ на единичной сфере S^{2k} пространства l_1^{2k+1} определяется функция $g_0(\xi, t)$, непрерывно и нечетно зависящая от ξ ;

$$\tau_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad \tau_s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^s |\xi_i|, \quad s = 1, \dots, 2k+1, \quad (3) \quad \{\text{eq3}\}$$

$$g_0(\xi, \tau_s) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad g_0(\xi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sgn} \xi_s, \quad \tau_{s-1} < t < \tau_s, \quad s = 1, \dots, 2k+1. \quad (4) \quad \{\text{eq4}\}$$

Далее, аналогично строятся функции $g_j(\xi, t)$:

$$g_j(\xi, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t g_{j-1}(\xi, u) du + c_j(\xi), \quad j = 1, \dots, r,$$

где для $j = 1, \dots, r-1$ константы $c_j(\xi)$ определяются условием $\int_0^1 g_j(\xi, t) dt = 0$, $c_r(\xi) = 0$. Положим

$$f(\xi, t) = g_r(\xi, t) + c(\xi).$$

В случае $(*)$ $c(\xi)$ определяется условием $c(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \arg \inf_{\lambda} \|g_r(\xi, \cdot) - \lambda\|_q$.

Для случая $(**)$ можно без ограничения общности считать, что $\langle 1, y_1^* \rangle \neq 0$; тогда константа $c(\xi)$ определяется условием $\langle f(\xi, \cdot), y_1^* \rangle = 0$.

Аналогично строится непрерывное и нечетное поле векторов

$$\eta: S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}.$$

Зададим $\eta_1(\xi) = \int_0^1 g_0(\xi, t) dt$. В случае $(*)$, представляя $L_m = \operatorname{Lin}\{1, e_2, \dots, e_m\}$, положим

$$\begin{aligned} \eta_i(\xi) &= \int_0^1 e_i(t) |f(\xi, t)|^{q-1} \operatorname{sgn} f(\xi, t) dt, & i = 2, \dots, m, \\ \eta_{i+n}(\xi) &= \langle f(\xi, \cdot), y_i^* \rangle, & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Для случая $(**)$ определим

$$\begin{aligned} \eta_{i+1}(\xi) &= \int_0^1 e_i(t) |f(\xi, t)|^{q-1} \operatorname{sgn} f(\xi, t) dt, & i = 1, \dots, n \\ \eta_{i+n}(\xi) &= \langle f(\xi, \cdot), y_i^* \rangle, & i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

В силу теоремы Борсука существует вектор $\xi^* \in S^{2k}$, для которого $\eta(\xi^*) = 0$. Это, во-первых, означает, что $f_* = f(\xi^*, \cdot) \in V^n$ и, во-вторых, из соотношений двойственности,

$$\|f_*\|_q = \inf_{l_m \in L_m} \|f_* - l_m\|_q.$$

В случае $1 \leq q < \infty$ лемма доказана. Доказательство в случае $q = \infty$ следует из аналогичных лемме 6.1.5 [2; с. 255] рассуждений.

Автор выражает благодарность И. Г. Царькову, А. С. Кочурову за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. М. Скориков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:3 (2007), 173–196. [2] Н. П. Корнейчук, *Сплайны в теории приближения*, Наука, М., 1984.

Е. М. Скориков

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: skorikov_eugene@mail.ru

Поступило
20.11.2008