Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Зыкин, Теорема Брауэра–Зигеля для семейств эллиптических поверхностей над конечными полями, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 148–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:20:03

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Теорема Брауэра–Зигеля для семейств эллиптических поверхностей над конечными полями

А. И. Зыкин

Классическая теорема Брауэра–Зигеля для числовых полей, доказанная Брауэром (см. [1]), утверждает, что если k пробегает последовательность числовых полей, нормальных над $\mathbb{Q}$, таких, что $n_k / \log |D_k| \rightarrow 0$, то $\log(h_k R_k) / \log \sqrt{|D_k|} \rightarrow 1$. Здесь D_k , h_k и R_k – дискриминант, число классов и регулятор поля k соответственно. Эта теорема была обобщена Цфасманом и Влэдуцем (см. [2]) на случай, когда условие $n_k / \log |D_k| \rightarrow 0$ не выполнено (асимптотически хорошие семейства полей). При этом получающийся предел $\lim \log(h_k R_k) / \log \sqrt{|D_k|}$ уже не обязательно равен 1.

Существование глубокой аналогии между числовыми и функциональными полями известно с давних пор. При этом многие результаты для функциональных полей получаются гораздо легче (например, исчезают аналитические проблемы, связанные с дзета-функциями). Аналог теоремы Брауэра–Зигеля для функциональных полей доказывается существенно проще и требование нормальности, присутствующее в числовом случае, оказывается лишним.

Пусть $\{X_i\}$ – семейство попарно неизоморфных гладких, абсолютно неприводимых, проективных кривых над конечным полем $\mathbb{F}_q$ рода $g_i = g(X_i)$. Пусть $\Phi_{q^m}(X_i)$ – число точек степени в точности m на кривой X_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Числа $\phi_{q^m} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\Phi_{q^m}(X_i) / g_i)$ называются *инвариантами Цфасмана–Влэдуца* семейства $\{X_i\}$. Если пределы ϕ_q существуют, то семейство называется *асимптотически точным*.

Пусть $Z_i(t) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - t^m)^{-\Phi_m(X_i)}$ – дзета функция кривой X_i . Она имеет полюс порядка один в точке $t = 1/q$, обозначим через $\varkappa_i$ ее вычет в этой точке. Известно, что $\varkappa_i$ выражается через число $\mathbb{F}_q$ -точек на Якобиане кривой X_i (аналог числа классов идеалов в числовом случае). Имеет место следующая теорема, доказанная Цфасманом в [3].

ТЕОРЕМА 1. Для асимптотически точного семейства кривых $\{X_i\}$ имеет место формула

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log \varkappa_i}{g_i} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{q^m} \log \frac{q^m}{q^m - 1}.$$

Попытки обобщить эту теорему на многомерный случай приводят сразу к нескольким результатам. Во-первых, для семейства алгебраических многообразий размерности d над конечным полем $\mathbb{F}_q$ можно изучать поведение вычета дзета функции в точке $t = q^{-d}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 06-01-72004-МНТИа, 06-01-72550-НЦНИЛа, 07-01-00051а, 08-07-92495-НЦНИЛа) и фонда INTAS (гранты № 05-1000008-8118).

В этом направлении аналог теоремы 1 был получен в работе [4]. Однако геометрическая интерпретация вычета дзета-функции в точке $t = q^{-d}$ уже не столь проста.

Другой подход был предложен Андри в [5] и Кунявским–Цфасманом в [6]. В этих работах изучается поведение значения L -функции в точке $s = 1$ для семейств эллиптических кривых. Вопрос является интересным, так как это значение связано с тонкими арифметическими инвариантами эллиптических кривых посредством гипотезы Берча–Свиннертона–Дайера. Андри формулирует некоторую гипотезу, аналогичную теореме Брауэра–Зигеля, для случая семейства эллиптических кривых над фиксированным числовым полем. Здесь нас интересует преимущественно функциональный случай, так что более подробно мы рассмотрим подход Кунявского и Цфасмана. Дадим несколько предварительных определений. Пусть X – гладкая, проективная кривая над $\mathbb{F}_q$, $K = \mathbb{F}_q(X)$ ее поле функций, E/K эллиптическая кривая, а $f: \mathcal{E} \rightarrow X$ соответствующая эллиптическая поверхность. Рассмотрим семейство накрытий $X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \dots \leftarrow X_i \leftarrow \dots$ и семейство эллиптических поверхностей $\mathcal{E}_i$, получающихся заменой базы:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 & \longleftarrow & \mathcal{E}_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \mathcal{E}_i & \longleftarrow & \dots \\ \downarrow f & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ X = X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & X_i & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Пусть $\Phi_{v,f}(X_i)$ – число точек степени f на X_i , лежащих над точкой $v \in |X|$. Будем далее предполагать, что для семейства $\{X_i\}$ существуют пределы $\phi_{v,f} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\Phi_{v,f}(X_i)/g_i)$.

Обозначим через E_i эллиптическую кривую, являющуюся общим слоем $\mathcal{E}_i \rightarrow X_i$. Если v – замкнутая точка X , положим $Nv = q^{\deg v}$. Пусть $N_{v,f}(E)$ – число точек на редукции $E_v = f^{-1}(v)$ кривой E над полем $\mathbb{F}_{Nvf}$. Положим $a_{v,f}(E) = Nvf + 1 - N_{v,f}(E)$ и

$$L_{v,f}(E, s) = \begin{cases} (1 - a_{v,f}Nv^{-fs} + Nv^{f(1-2s)})^{-1}, & \text{если } E_v \text{ неособа;} \\ (1 - a_{v,f}Nv^{-fs})^{-1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Напомним, что L -функция эллиптической кривой E определяется как

$$L_E(s) = \prod_{v \in |X|} L_{v,1}(E, s).$$

Введем также предельную L -функцию семейства $\{E_i/K_i\}$ как

$$L_{\{E_i/K_i\}}(s) = \prod_{v \in |X|} \prod_{f=1}^{\infty} L_{v,f}(E, s)^{\phi_{f,v}}.$$

Пусть r_E – порядок нуля $L_E(s)$ в точке $s = 1$, а c_E – первый ненулевой коэффициент в разложении $L_E(s)$ в ряд Тейлора в $s = 1$. Кунявский и Цфасман в работе [6] формулируют следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. *Имеем*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log |c_{E_i}|}{g_i} = - \sum_{v \in |X|} \sum_{f=1}^{\infty} \phi_{v,f} \log \frac{N_{v,f}(E)}{Nvf}.$$

В этой же работе доказывается частный случай гипотезы для случая постоянных эллиптических кривых ($\mathcal{E}_i = E' \times X_i$, где $E'/\mathbb{F}_q$ – фиксированная эллиптическая кривая). К сожалению, доказательство содержит лакуны. Перестановка предельного перехода в бесконечном произведении для L -функции и предела при $g_i \rightarrow \infty$ не является обоснованной. Таким образом, на данный момент гипотеза не известна ни для какого семейства эллиптических кривых.

Основным нашим результатом является доказательство следующего факта в направлении гипотезы.

ТЕОРЕМА 2. 1) Бесконечное произведение для $L_{\{E_i/K_i\}}(s)$ сходится при $\operatorname{Re} s \geq 1$.
 2) Для $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место формула

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log L_{E_i}(s)}{g_i} = \log L_{\{E_i/K_i\}}(s).$$

3) Предположим, что для семейства E_i/K_i выполнено $\lim_{i \rightarrow \infty} r_{E_i}/g_i = 0$. Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log |c_{E_i}|}{g_i} \leq \log L_{\{E_i/K_i\}}(1).$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Условие $\lim_{i \rightarrow \infty} r_{E_i}/g_i = 0$ выполнено в случае постоянного семейства кривых и довольно часто в общем случае (см. [7]).

2) Вопрос о наличии равенства в утверждении 3 теоремы весьма тонок и связан с низко лежащими нулями L -функций. Подробное обсуждение вопроса, хотя и в несколько другой ситуации, можно найти в работе [8].

Я хочу поблагодарить моего научного руководителя М. А. Цфасмана за плодотворные обсуждения и постоянное внимание к моей работе, а также М. Балазара за ценные советы и идеи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Brauer, *Amer. J. Math.*, **69**:2 (1947), 243–250. [2] M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduț, *Mosc. Math. J.*, **2**:2 (2002), 329–402. [3] M. A. Tsfasman, *Coding Theory and Algebraic Geometry* (Luminy, 1991), *Lecture Notes in Math.*, **1518**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, 178–192. [4] A. Zykin, *Arithmetic, Geometry, Cryptography and Coding Theory*, Proceedings of the 11th conference on AGC²T (Marseille, 2007), *Contemp. Math.*, **487**, Institut de Mathématiques de Luminy, Marseille, 2009, 195–206. [5] M. Hindry, *Diophantine Geometry*, CRM Series, **4**, Ed. Norm., Pisa, 2007, 197–219. [6] B. E. Kunyavskii, M. A. Tsfasman, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2008, № 8, Art. ID rnn009, 9 pp. [7] A. Brumer, *Invent. Math.*, **109**:3 (1992), 445–472. [8] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **91** (2000), 55–131.

А. И. Зыкин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
 Независимый московский университет
E-mail: alzykin@gmail.com

Поступило
 16.09.2008