Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Ганжа, Интегралы и мультиинтегралы Эйлера линейных дифференциальных уравнений с частными производными, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 19–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:40:07

Интегралы и мультиинтегралы Эйлера линейных дифференциальных уравнений с частными производными

Е. И. Ганжа

В работе обсуждается понятие редуцируемости решений вида Эйлера, обобщающих решения, возникающие в каскадном методе Лапласа интегрирования гиперболических уравнений второго порядка на плоскости. Приводятся алгоритмы редукции и доказана эквивалентность различных возможных точных определений редукции подобных явных решений.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Классические методы точного интегрирования линейных уравнений с частными производными и систем таких уравнений (см. [1]–[3]) в последнее десятилетие получили существенное обобщение в работах [4]–[7]. Были найдены применения этих методов к двумерным спектральным задачам [8] и в теории стохастических систем [9]. При этом в качестве точных решений в классическом методе Лапласа получаются выражения вида

$$f(x, y) = a_0(x, y)\varphi(x) + a_1(x, y)\varphi'(x) + \dots + a_n(x, y)\varphi^{(n)}(x) + b_0(x, y)\psi(y) + \dots + b_m(x, y)\psi^{(m)}(y) \quad (1.1)$$

с произвольными $\varphi(x)$, $\psi(y)$ и фиксированными коэффициентами $a_i(x, y)$, $b_j(x, y)$. Первые решения такого рода были получены еще Эйлером [10]. Для систем [4]–[7] и уравнений более высокого порядка [11], [12] решениями могут являться суммы нескольких выражений указанного типа. Как было известно еще классикам, выражения вида (1.1) иногда могут быть упрощены (т.е. порядки производных n или m могут быть понижены) путем введения других произвольных функций, например,

$$\vartheta(x) = r_0(x)\varphi(x) + \dots + r_k(x)\varphi^{(k)}(x).$$

Однако до настоящего времени отсутствовала общая теория решений указанного вида. В данной работе построены алгоритмы упрощения (редукции) подобных выражений и доказана эквивалентность различных возможных точных определений редукции. Для простоты мы разделяем в (1.1) части, содержащие $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, вводя соответствующие общие определения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00814).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Интегралом Эйлера на плоскости* называется выражение

$$\mathcal{J} = a_0(x, y)\varphi(x) + a_1(x, y)\varphi'(x) + \dots + a_n(x, y)\varphi^{(n)}(x), \quad (1.2)$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция одной переменной x , $a_i(x, y)$ – заданные функции двух переменных.

Мы будем считать, что $a_i(x, y)$ принадлежат некоторому конструктивному дифференциальному полю функций на плоскости, например, полю рациональных функций $\mathbb{Q}(x, y)$. Для корректности изложенных ниже алгоритмов необходимым является возможность эффективно разрешать вопрос о равенстве элемента поля коэффициентов нулю и наличие производных достаточно высокого порядка в некоторой достаточно малой области на плоскости.

В дальнейшем мы часто будем называть интегралы Эйлера (1.2) просто “интегралами” и записывать их в виде $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x)$, где

$$L(x, y) = a_0(x, y) + a_1(x, y)D + \dots + a_n(x, y)D^n, \quad D = \frac{d}{dx},$$

– линейный обыкновенный дифференциальный оператор. Все линейные дифференциальные операторы в данной работе будут обыкновенными, т.е. включать только производные $D^s = d^s/dx^s$. Зависимость коэффициентов оператора от двух переменных x и y или только от одной переменной x будем явно указывать после значка оператора. Всюду в дальнейшем мы будем большими латинскими буквами обозначать обыкновенные линейные дифференциальные операторы по x , а маленькими латинскими – заданные функции; маленькими греческими буквами – произвольные функции от одной переменной x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Мультиинтегралом Эйлера на плоскости* назовем выражение вида

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= a_{10}(x, y)\varphi_1(x) + a_{11}(x, y)\varphi_1'(x) + \dots + a_{1n_1}(x, y)\varphi_1^{(n_1)}(x) \\ &\quad + a_{20}(x, y)\varphi_2(x) + a_{21}(x, y)\varphi_2'(x) + \dots + a_{2n_2}(x, y)\varphi_2^{(n_2)}(x) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + a_{k0}(x, y)\varphi_k(x) + a_{k1}(x, y)\varphi_k'(x) + \dots + a_{kn_k}(x, y)\varphi_k^{(n_k)}(x) \\ &= L_1(x, y)\varphi_1(x) + \dots + L_k(x, y)\varphi_k(x), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ – произвольные функции одной переменной x , а $a_{ij}(x, y)$ – заданные функции двух переменных, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n_i$.

В дальнейшем будем обозначать строку $(L_1(x, y), \dots, L_k(x, y))$ операторов через $\bar{L}(x, y)$, а столбец функций $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))^t$ – через $\hat{\varphi}(x)$: $\mathcal{J} = \bar{L}(x, y)\hat{\varphi}(x)$.

Следует отметить, что произвольное данное выражение вида (1.1) может быть (неполным) решением некоторого уравнения вида

$$Pu = \left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i(x, y)D_y^i D_x + \sum_{i=0}^{p-1} b_i(x, y)D_y^i \right) u = 0, \quad a_{p-1} \neq 0, \quad (1.4)$$

рассматривавшегося в диссертации Петрен [12].

Действительно, подставляя интеграл $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x)$ в уравнение (1.4) и приравнявая нулю слагаемые с одинаковыми производными произвольной функции $\varphi(x)$, получим систему из $(n + 2)$ линейных однородных алгебраических уравнений на $2p$ неизвестных коэффициента $b_0, b_1, \dots, b_{p-1}, a_0, \dots, a_{p-1}$. При $p > (n + 2)/2$ она имеет нетривиальное решение, т.е. всякий интеграл вида (1.2) является решением некоторого уравнения типа Петрен (1.4) достаточно высокого порядка. Аналогичное утверждение, как легко видеть, справедливо и для мультиинтегралов (1.3).

Рассматриваемый в настоящей работе линейный случай может служить основой для рассмотрения также точных решений интегрируемых по Дарбу нелинейных уравнений с частными производными: как показано в [3], [13], [14], интегрируемость по Дарбу эквивалентна интегрируемости соответствующего линеаризованного уравнения с помощью каскадного метода Лапласа.

2. Интегралы Эйлера. Для точной формулировки самого общего определения редуцируемости нам понадобится следующее естественное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Запасом* функций $Z(\mathcal{J})$, порождаемым интегралом Эйлера (1.2), называется множество всех функций от двух переменных (x, y) , которые получаются, если подставлять в (1.2) всевозможные (гладкие) функции $\varphi(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Порядком* интеграла Эйлера (1.2) будем называть порядок n старшей производной произвольной функции $\varphi(x)$, входящей в интеграл.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Будем называть интеграл Эйлера (1.2) *редуцируемым по порядку*, если существует другой интеграл

$$\mathcal{J}_1 = b_0(x, y)\psi(x) + \dots + b_m(x, y)\psi^{(m)}(x)$$

меньшего порядка m , $m < n$, который порождает тот же запас функций, что и интеграл $\mathcal{J}$.

Отметим, что мы априори не предполагаем какой-либо связи между произвольными функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в интегралах $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_1$. Ниже будет доказано, что если редуцируемость по порядку возможна, то между $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеется дифференциальная связь.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Интеграл Эйлера (1.2) *редуцируем в операторном смысле*, если соответствующий ему оператор $L(x, y)$ представим в виде композиции

$$L(x, y) = M(x, y)R(x), \quad (2.1)$$

где $M(x, y)$ – оператор меньшего порядка, а коэффициенты оператора $R(x)$, как указано, зависят только от x .

Очевидно, запасы функций, порождаемые интегралами $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x)$ и $\mathcal{J}_1 = M(x, y)\psi(x)$, совпадают и имеется дифференциальная связь $\psi(x) = R(x)\varphi(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Будем говорить, что интеграл Эйлера (1.2) *не имеет ядра* (нередуцируем по ядру), если $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x)$ обращается тождественно в ноль как функция двух переменных лишь при $\varphi(x) \equiv 0$. В противном случае будем называть интеграл $\mathcal{J}$ *редуцируемым по ядру*.

Действительно, достаточно брать y_i общего положения, т.е. не совпадающие с полюсами коэффициентов всех операторов, возникающих в процессе работы алгоритма Евклида и не annulling тождественно коэффициенты при старших производных этих операторов. Операторы $P_i(x)$ получаются стандартной обратной подстановкой в циклах (2.2) работы алгоритма Евклида.

Следует отметить, что в общем случае количество точек y_i невозможно сделать меньше, чем $n + 1$. Здесь мы построим пример такого интеграла $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x)$ второго порядка. Рассмотрим для этого линейное трехмерное пространство полиномов второго порядка

$$V = \{p(x) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Зададим в нем зависящие от параметра y двумерные подпространства $W_y = \langle z_1, z_2 \rangle$, порожденные двумя базисными функциями

$$z_1 = y \cdot 1 + (y + 1) \cdot x, \quad z_2 = y \cdot x + (y + 1) \cdot x^2.$$

Для любого фиксированного y функции z_1, z_2 линейно независимы, а для $y_1 \neq y_2$, W_{y_1} и W_{y_2} пересекаются по одномерному подпространству. С другой стороны, имеем $W_{y_1} \cap W_{y_2} \cap W_{y_3} = \{0\}$. Поэтому для оператора

$$L(x, y)\varphi(x) = \begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ z_1 & z_1' & z_1'' \\ z_2 & z_2' & z_2'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & z_1' \\ z_2 & z_2' \end{vmatrix}^{-1} = \left[D^2 - \frac{2(y+1)}{xy+x+y}D + \frac{2(y+1)^2}{(xy+x+y)^2} \right] \varphi(x)$$

имеем

$$\begin{aligned} \text{rGCD}(L(x, y_1), L(x, y_2)) &= B_1(x, y_1, y_2) \\ &= (y_1 - y_2)((xy_1 + x + y_1)(xy_2 + x + y_2)D \\ &\quad - (2xy_1y_2 + 2xy_1 + 2xy_2 + 2x + 2y_1y_2 + y_1 + y_2)), \end{aligned}$$

но $\text{rGCD}(L(x, y_1), L(x, y_2), L(x, y_3)) = 1$. Тем самым, для построенного оператора $L(x, y)$ невозможно найти две точки y_1, y_2 и операторы $P_1(x), P_2(x)$ такие, что

$$P_1(x)L(x, y_1) + P_2(x)L(x, y_2) = 1,$$

хотя $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x)$ нередуцируем в операторном смысле. Для трех точек y_1, y_2, y_3 общего положения равенство (2.3) будет найдено алгоритмом **RI**.

ТЕОРЕМА 2.6. *Указанные выше три определения 2.3, 2.4 и 2.5 редуцируемости интегралов Эйлера эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если интеграл $\mathcal{J}$ редуцируем в операторном смысле, т.е.

$$\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x) = M(x, y)R(x)\varphi(x)$$

с нетривиальным $R(x)$, то интеграл $\mathcal{J}$ имеет нетривиальное ядро, которое, по меньшей мере, содержит пространство решений уравнения $R(x)\varphi(x) = 0$, а это означает, что $\mathcal{J}$ редуцируем по ядру.

Если интеграл $\mathcal{J}$ – редуцируемый по ядру, т.е. существует ненулевая функция $\varphi(x)$ такая, что $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x) \equiv 0$, то, очевидно, $L(x, y)$ представим в виде

$$L(x, y) = L_1(x, y) \left(\frac{d}{dx} - \frac{\varphi'_x}{\varphi} \right),$$

т.е. интеграл $\mathcal{J}$ редуцируем в операторном смысле.

Очевидно, что редуцируемость интеграла в операторном смысле влечет редуцируемость по порядку. Для доказательства обратного нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.7. Пусть даны интегралы Эйлера $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x)$ и $\mathcal{J}_1 = M(x, y)\psi(x)$ вида (1.2), причем $\mathcal{J}_1$ нередуцируемый в операторном смысле. Пусть для порождаемых ими запасов функций верно включение $Z(\mathcal{J}) \subseteq Z(\mathcal{J}_1)$. Тогда порядок $\mathcal{J}$ не меньше порядка $\mathcal{J}_1$, интеграл $\mathcal{J}$ редуцируется к интегралу $\mathcal{J}_1$ в операторном смысле (т.е. $L(x, y) = M(x, y)R(x)$), и запасы функций, порождаемые интегралами $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_1$, совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем алгоритмом **RI** для операторно нередуцируемого интеграла $\mathcal{J}_1 = M(x, y)\psi(x)$ точки $y_1, y_2, \dots, y_s$ и операторы $P_1(x), \dots, P_s(x)$ такие, что имеет место (2.3) для $M(x, y)$.

Так как по условию $Z(\mathcal{J}) \subseteq Z(\mathcal{J}_1)$, для любой функции $\varphi(x)$ найдется такая функция $\psi(x)$, что $L(x, y)\varphi(x) = M(x, y)\psi(x)$. Отсюда, используя (2.3), приходим к

$$\sum_{i=1}^s P_i(x)L(x, y_i)\varphi(x) = \psi(x).$$

Это означает, что $\psi(x)$ дифференциально выражается через $\varphi(x)$: $\psi(x) = R(x)\varphi(x)$, $R(x) = \sum_i P_i(x)L(x, y_i)$, откуда $L(x, y)\varphi(x) = M(x, y)R(x)\varphi(x)$, т.е. $\mathcal{J}$ редуцируется к $\mathcal{J}_1$ в операторном смысле. Поскольку для любой функции $\psi(x)$ существует решение $\varphi(x)$ обыкновенного линейного дифференциального уравнения $\psi(x) = R(x)\varphi(x)$, имеем $M(x, y)\psi(x) = M(x, y)R(x)\varphi(x) = L(x, y)\varphi(x)$ для произвольной $\psi(x)$ и соответствующей $\varphi(x)$. Следовательно, $Z(\mathcal{J}) = Z(\mathcal{J}_1)$.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2.6. Пусть $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x)$ редуцируем по порядку к некоторому $\mathcal{J}_1 = L_1(x, y)\psi(x)$. Покажем, что тогда $\mathcal{J}$ редуцируем в операторном смысле. Алгоритмом **RI** находим нередуцируемый интеграл $\mathcal{J}_2 = M(x, y)\xi(x)$ с $Z(\mathcal{J}_2) = Z(\mathcal{J}_1) = Z(\mathcal{J})$. Применяя лемму 2.7 к $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_2$, получим, что $L(x, y) = M(x, y)R(x)$, т.е. интеграл $\mathcal{J}$ редуцируем в операторном смысле.

В силу доказанного, в дальнейшем мы можем просто говорить о “редуцируемости” или “нередуцируемости” интегралов.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Ядро интеграла Эйлера $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x)$ совпадает с ядром оператора $R(x)$, полученного алгоритмом **RI**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.1) очевидно, что $\text{Ker } R(x) \subseteq \text{Ker } \mathcal{J}$. Пусть $\varphi(x) \in \text{Ker } \mathcal{J}$. Тогда

$$0 = L(x, y)\varphi(x) = M(x, y)R(x)\varphi(x) = M(x, y)\psi(x), \quad \psi = R\varphi.$$

Так как $M(x, y)$ нередуцируемый, $\psi(x) = 0$. Следовательно, $\varphi(x) \in \text{Ker } R(x)$.

Резюмируем приведенные выше результаты в виде следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.9. Среди интегралов Эйлера, порождающих одинаковые запасы функций, имеется единственный (с точностью до калибровочных преобразований $L_0 \mapsto L_0(x, y)g(x)$) нередуцируемый $\mathcal{J}_0 = L_0(x, y)\psi(x)$. Все остальные интегралы с тем же запасом функций имеют вид $\mathcal{J} = L_0(x, y)R(x)\varphi(x)$, где $R(x)$ – произвольный линейный обыкновенный дифференциальный оператор с коэффициентами, зависящими от x .

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_1$ – интегралы Эйлера вида (1.2). Тогда порождаемые ими запасы функций либо совпадают, либо пересекаются по конечномерному подпространству.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можем полагать, что интегралы $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_1$ нередуцируемые. Пусть $\mathcal{J} = L(x, y)\varphi(x)$, $\mathcal{J}_1 = L_1(x, y)\psi(x)$ и пусть некоторая функция $f(x, y)$ принадлежит пересечению запасов функций этих интегралов:

$$f(x, y) = L(x, y)\varphi(x) = L_1(x, y)\psi(x) \quad (2.4)$$

для некоторых $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Применив алгоритм **RI** к интегралу $\mathcal{J}$, получим точки $y_1, y_2, \dots, y_s$ и операторы $P_1(x), \dots, P_s(x)$ такие, что выполнено равенство (2.3). Подставим y_i в (2.4) и составим из полученных уравнений линейную комбинацию; используя (2.3), получим

$$\varphi(x) = N(x)\psi(x), \quad (2.5)$$

где $N(x) = \sum_{i=1}^s P_i(x)L_1(x, y_i)$. Подставляя (2.5) в (2.4), получим

$$(L(x, y)N(x) - L_1(x, y))\psi(x) = 0. \quad (2.6)$$

Если оператор $L(x, y)N(x) - L_1(x, y)$ тождественно нулевой, то любая функция $\psi(x)$ удовлетворяет (2.6). Отсюда вытекает, что $Z(\mathcal{J}) = Z(\mathcal{J}_1)$ (лемма 2.7). Если оператор $L(x, y)N(x) - L_1(x, y)$ не обращается в нуль, то из (2.6) видим, что $\psi(x)$ принадлежит ядру интеграла, порождаемого оператором $F(x, y) = L(x, y)N(x) - L_1(x, y)$. Применив алгоритм **RI** к $F(x, y)$, получим разложение $F(x, y) = F_1(x, y)S(x)$, где $F_1(x, y)$ – нередуцируемый оператор; тем самым, $\psi(x)$ принадлежит конечномерному пространству решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения $S(x)\psi(x) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как очевидно из утверждения 2.9 и теоремы 2.10, есть простой алгоритмический способ выяснения, совпадают ли запасы функций, порождаемые двумя заданными интегралами $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$. Для этого достаточно с помощью алгоритма **RI** найти соответствующие нередуцируемые операторы $L_1(x, y)$ и $L_2(x, y)$ с теми же запасами функций. Если порядки $L_1(x, y)$, $L_2(x, y)$ не совпадают, запасы функций $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ различны. Если же порядки $L_1(x, y)$ и $L_2(x, y)$ одинаковы, разделим $L_1(x, y)$ на $L_2(x, y)$ слева:

$$L_1(x, y) = L_2(x, y)g(x, y) + B(x, y), \quad \text{ord } B < \text{ord } L_1 = \text{ord } L_2.$$

Для совпадения запасов $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ необходимо и достаточно выполнение условий $B(x, y) \equiv 0$, $g_y \equiv 0$. Для выяснения размерности пересечения $Z(\mathcal{J}_1) \cap Z(\mathcal{J}_2)$ поступаем так же, как и в доказательстве теоремы 2.10, т.е. формируем операторы, стоящие в левой части (2.6), и применяем алгоритм **RI** для отщепления от оператора $F(x, y)$ максимального правого множителя $S(x)$. Размерность пересечения $Z(\mathcal{J}_1) \cap Z(\mathcal{J}_2)$ будет совпадать с порядком оператора $S(x)$.

3. Мультиинтегралы. В этом разделе мы доказываем аналоги результатов предыдущего раздела для мультиинтегралов вида (1.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Запасом функций* $Z(\mathcal{J})$, порождаемым мультиинтегралом (1.3), называется множество всех функций двух переменных (x, y) , которые получаются при подстановке в (1.3) всевозможных (гладких) функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Мультиинтеграл (1.3) называется *редуцируемым в операторном смысле*, если соответствующую ему строку $(L_1(x, y), \dots, L_k(x, y))$ можно представить в виде операторной композиции матриц

$$(L_1(x, y), \dots, L_k(x, y)) = (M_1(x, y), \dots, M_p(x, y)) \begin{pmatrix} R_{11}(x) & \dots & R_{1k}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p1}(x) & \dots & R_{pk}(x) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где $R_{ij}(x)$ – дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими только от x , а $M_i(x, y)$ – дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от (x, y) , причем матрица $(R_{ij}(x))$ необратимая, а $p \leq k$.

В дальнейшем формулу (3.1) будем сокращенно записывать как

$$\bar{L}(x, y) = \bar{M}(x, y) \hat{R}(x). \quad (3.2)$$

То есть $\hat{R}(x)$ будет далее обозначать (не обязательно квадратную) матрицу из дифференциальных операторов. Под обратимостью операторной матрицы мы понимаем, как обычно, наличие такой операторной матрицы $\hat{S}(x)$, что $\hat{R}\hat{S} = \hat{S}\hat{R} = (\delta_{ij})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Будем говорить, что мультиинтеграл (1.3) *не имеет ядра* (нередуцируем по ядру), если

$$\mathcal{J} = L_1(x, y)\varphi_1(x) + \dots + L_k(x, y)\varphi_k(x)$$

обращается тождественно в нуль как функция двух переменных лишь при $\varphi_i(x) \equiv 0$, $i = 1, \dots, k$. В противном случае назовем мультиинтеграл $\mathcal{J}$ *редуцируемым по ядру*.

Отметим, что вводить понятие редуцируемости по порядку в данном контексте нецелесообразно. Даже нередуцируемые в смысле введенных определений 3.2 и 3.3 мультиинтегралы с одинаковыми запасами функций могут иметь операторы $L_i(x, y)$ произвольно высокого порядка. Это связано с тем, что в представлении (3.2) можно выбирать обратимые матрицы $\hat{R}(x)$ с операторами $R_{ij}(x)$ высокого порядка.

К матрице $\hat{R}(x)$ мы будем применять следующие две стандартные операции: перестановку двух строк и прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной слева на дифференциальный оператор с коэффициентами, зависящими только от x . Используя эти операции, мы можем с помощью стандартного некоммутативного аналога метода последовательного исключения Гаусса [15] привести любую матрицу $\hat{R}(x)$ к ступенчатому виду:

$$\hat{R}_{st}(x) = \begin{pmatrix} R_{11}(x) & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots \\ 0 & \dots & 0 & R_{2q_2}(x) & \dots & * & * & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & R_{3q_3}(x) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Первые ненулевые элементы каждой строки $R_{11}(x), R_{2q_2}(x), R_{3q_3}(x), \dots$ будем называть *опорными элементами* ступенчатой матрицы. Количество ненулевых строк получившейся ступенчатой матрицы называется *рангом* исходной операторной матрицы. Как показано в [15], [16], ранг операторной матрицы является ее инвариантом и не зависит от способа приведения к ступенчатому виду. Очевидно, процедура приведения к ступенчатому виду эквивалентна умножению исходной матрицы $\hat{R}(x)$ слева на некоторую обратимую операторную матрицу $\hat{T}(x)$. Тем самым, в формуле (3.2) мы можем заменить $\bar{M}(x, y)$ на $\bar{M}(x, y)\hat{T}^{-1}(x)$ и $\hat{R}(x)$ на $\hat{R}_{st}(x) = \hat{T}(x)\hat{R}(x)$ и считать в дальнейшем, что матрица $\hat{R}(x)$ уже имеет ступенчатый вид.

Легко видеть, что матрица $\hat{R}(x)$ обратима, если и только если она квадратная и после приведения ее к ступенчатому виду получаем верхнетреугольную матрицу с ненулевыми диагональными элементами, являющимися обратимыми элементами в кольце дифференциальных операторов, т.е. функциями (операторами нулевого порядка). Элементы выше диагонали могут быть произвольными дифференциальными операторами.

Для любой операторной матрицы $\hat{R}(x)$ естественно рассматривать ее *ядро*, т.е. множество столбцов $\hat{\varphi}(x)$, для которых $\hat{R}(x)\hat{\varphi}(x) = 0$. Используя ступенчатую форму, легко доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 3.4. Пусть дана операторная матрица $\hat{R}(x)$ размера $p \times k$ и $p \leq k$. Тогда

- $\hat{R}(x)$ необратима, если и только если она имеет нетривиальное ядро;
- ядро $\hat{R}(x)$ бесконечномерно, если и только если ранг $\hat{R}(x)$ меньше числа ее столбцов.

Для мультиинтегралов также существует алгоритм, выделяющий “максимальный” правый фактор $\hat{R}(x)$, т.е. для заданной строки $\bar{L}(x, y)$ можно конструктивно найти представление (3.2) со строкой $\bar{M}(x, y)$, задающей нередуцируемый в операторном смысле мультиинтеграл с тем же запасом функций.

АЛГОРИТМ RMI. Исходными данными алгоритма является строка

$$(L_1(x, y), \dots, L_k(x, y)).$$

В соответствии с разложением (3.1) со ступенчатой матрицей $\hat{R}(x)$ видим, что нам необходимо найти такие операторы $M_i(x, y), R_{ij}(x)$, что

$$L_1(x, y) = M_1(x, y)R_{11}(x), \quad (3.3)$$

$$L_2(x, y) = M_1(x, y)R_{12}(x) + M_2(x, y)R_{22}(x), \quad (3.4)$$

.....

По алгоритму **RI** находим разложение (3.3), где $R_{11}(x)$ – дифференциальный оператор максимального порядка, а $M_1(x, y)$ – нередуцируемый оператор. Также в результате работы алгоритма **RI** получаем точки $y_1, \dots, y_s$ и операторы $P_1(x), \dots, P_s(x)$, такие, что выполнено (2.3) с оператором $M_1(x, y)$. Теперь нам надо найти $R_{12}(x), M_2(x, y), R_{22}(x)$, удовлетворяющие (3.4). Делаем это в три этапа.

Этап А. Нахождение $R_{22}(x)$. Подставим в равенство (3.4) найденные точки y_i . Получим

$$L_2(x, y_i) = M_1(x, y_i)R_{12}(x) + M_2(x, y_i)R_{22}(x).$$

Умножая эти равенства на операторы $P_i(x)$ слева и складывая их, приходим в силу (2.3) к

$$R_{12}(x) + \left[\sum_{i=1}^s P_i(x) M_2(x, y_i) \right] R_{22}(x) = \sum_{i=1}^s P_i(x) L_2(x, y_i). \quad (3.5)$$

Умножим (3.5) слева на $M_1(x, y)$ и вычтем из (3.4):

$$\left[M_2(x, y) - M_1(x, y) \sum_i P_i(x) M_2(x, y_i) \right] R_{22}(x) = L_2(x, y) - M_1(x, y) \sum_i P_i(x) L_2(x, y_i). \quad (3.6)$$

В правой части этого равенства стоит некоторый известный оператор $N(x, y)$. Значит, для нахождения $R_{22}(x)$ достаточно применить к $N(x, y)$ алгоритм **RI**:

$$K(x, y) R_{22}(x) = N(x, y) \quad (3.7)$$

с $R_{22}(x)$ максимального порядка, причем полученный $K(x, y)$ – нередуцируемый.

Этап Б. Нахождение $R_{12}(x)$. Запишем (3.5) в виде

$$R_{12}(x) + S(x) R_{22}(x) = T(x) \equiv \sum P_i(x) L_2(x, y_i), \quad (3.8)$$

в котором нам известны операторы $T(x)$ и $R_{22}(x)$. Можно выбрать оператор $S(x)$ произвольным (что соответствует умножению ступенчатой матрицы $\hat{R}(x)$ слева на обратимую верхнетреугольную матрицу) и определить соответствующее $R_{12}(x)$.

Этап В. Нахождение $M_2(x, y)$. Напомним, что (3.6) было получено из (3.5) и (3.4). Проведем обратную операцию: умножим (3.8) на $M_1(x, y)$ слева и прибавим к нему (3.7):

$$M_1(x, y) R_{12}(x) + [M_1(x, y) S(x) + K(x, y)] R_{22}(x) = L_2(x, y).$$

Тем самым получили требуемое равенство (3.4) с $M_2(x, y) = M_1(x, y) S(x) + K(x, y)$.

Отметим, что поскольку полученный $K(x, y)$ нередуцируемый, мы можем найти точки $y_{2,1}, y_{2,2}, \dots, y_{2,s_2}$ и операторы $P_{2,1}(x), \dots, P_{2,s_2}(x)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{s_2} P_{2,i}(x) K(x, y_{2,i}) = 1. \quad (3.9)$$

Если количество операторов $L_i(x, y)$ в строке $\bar{L}(x, y)$ будет более двух, мы можем аналогичным образом найти требуемые операторы $M_j(x, y)$, $R_{ij}(x)$, $j \geq 3$. Продемонстрируем это для $j = 3$.

В равенстве

$$L_3(x, y) = M_1(x, y) R_{13}(x) + M_2(x, y) R_{23}(x) + M_3(x, y) R_{33}(x) \quad (3.10)$$

нам известны $M_1(x, y)$ и $M_2(x, y)$. Используя выбранные ранее точки $y_1, \dots, y_s$ и (2.3), приходим к аналогу (3.5), а затем (3.6):

$$\begin{aligned} K(x, y) R_{23}(x) + \left[M_3(x, y) - M_1(x, y) \sum_i P_i(x) M_3(x, y_i) \right] R_{33}(x) \\ = L_3(x, y) - M_1(x, y) \sum_i P_i(x) L_3(x, y_i). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Используя теперь точки $y_{21}, \dots, y_{2s_2}$ и (3.9), уничтожим слагаемое $K(x, y)R_{23}(x)$ и придем к аналогу (3.7):

$$K_3(x, y)R_{33}(x) = N_3(x, y)$$

с известным оператором $N_3(x, y)$. Это позволяет найти $R_{33}(x)$ с помощью алгоритма **RI**. Повторяя этап Б, находим $R_{13}(x)$, $R_{23}(x)$ с произволом, аналогичным произволу выбора $S(x)$ в (3.8). Повторяя этап В, находим $M_3(x, y)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Может получиться, что в правой части (3.6) окажется тождественный нуль. Тогда полагаем $R_{22}(x) \equiv 0$ и из (3.5) находим $R_{12}(x)$. В (3.4) фактически отсутствует оператор $M_2(x, y)$ и мы можем на следующем шаге в формуле (3.10) положить $R_{33}(x) \equiv 0$ и опорным элементом становится элемент $R_{23}(x)$. Тем самым, $R_{ij}(x)$ окажется не квадратной, а ступенчатой матрицей. Количество операторов $M_i(x, y)$ будет меньше количества исходных операторов $L_i(x, y)$, т.е. $p < k$.

В результате работы алгоритма **RMI** будут найдены строка операторов $\bar{M}(x, y) = (M_1(x, y), \dots, M_p(x, y))$ и операторная ступенчатая матрица $\hat{R}(x)$ в представлении (3.1). Тот факт, что мультиинтеграл $\mathcal{J}_1 = \bar{M}(x, y)\hat{\psi}(x)$ является нередуцируемым в операторном смысле, будет доказан ниже (следствие 3.9). Включение $Z(\mathcal{J}) \subseteq Z(\mathcal{J}_1)$ очевидно. Обратное включение вытекает из того простого факта, что для полученной в алгоритме **RMI** ступенчатой матрицы $\hat{R}(x)$ без нулевых строк система дифференциальных уравнений $\hat{R}(x)\dot{\varphi} = \dot{\psi}$ на $\dot{\varphi}$ разрешима для любой $\dot{\psi}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если исходный мультиинтеграл был нередуцируемый в операторном смысле, то алгоритм **RMI** выдаст разложение (3.1) с $k = p$ и верхнетреугольной обратимой матрицей $\hat{R}(x)$. Имеющаяся на этапе Б неопределенность в выборе оператора $S(x)$ и будет соответствовать возможности написать представление (3.1) с любой обратимой верхнетреугольной матрицей $\hat{R}(x)$ для любого мультиинтеграла $\mathcal{J}$. Отметим, что требование необратимости матрицы $\hat{R}(x)$ без требования $p \leq k$ в определении 3.2 было бы недостаточным: легко составить пример разложения (3.1) с $p > k$ (и тем самым с необратимой $\hat{R}(x)$) для любого мультиинтеграла.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. *Мультиинтеграл $(M_1(x, y), \dots, M_p(x, y))$, полученный в результате работы алгоритма **RMI**, является нередуцируемым по ядру.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для количества элементов в строках $\bar{L}$ и $\bar{M}$, равного двум. Тогда для ненулевого элемента ядра ψ

$$0 = M_1(x, y)\psi_1 + M_2(x, y)\psi_2. \quad (3.12)$$

При этом $M_1(x, y)$, $M_2(x, y)$ удовлетворяют (3.4), где $R_{12}(x)$, $R_{22}(x)$ найдены с помощью алгоритма **RMI**. Прделаем с равенством (3.12) те же действия, что и в алгоритме **RMI** были проделаны с уравнением (3.4) для нахождения $R_{12}(x)$, $R_{22}(x)$, т.е. возьмем те же точки y_i , те же операторы $P_i(x)$ и составим ту же линейную комбинацию уравнений, что и в (3.5). Получим

$$\psi_1(x) + \left[\sum_i P_i(x)M_2(x, y_i) \right] \psi_2(x) = 0. \quad (3.13)$$

Из (3.13) и (3.12) получаем

$$[M_2(x, y) - M_1(x, y) \sum_i P_i(x)M_2(x, y_i)] \psi_2(x) = 0$$

(аналог (3.6) в алгоритме **РМІ**). Тем самым, $\psi_2(x) \equiv 0$, так как по алгоритму в левой части этого равенства стоит нередуцируемый интеграл $K(x, y)$. Тогда из (3.12) получаем $M_1(x, y)\psi_1 \equiv 0$. Но $M_1(x, y)$ – нередуцируемый по построению, поэтому $\psi_1(x) \equiv 0$.

Для мультиинтеграла $\mathcal{J} = (M_1(x, y), \dots, M_p(x, y))$ доказательство аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Ядро мультиинтеграла $\mathcal{J} = (L_1(x, y), \dots, L_k(x, y))$ совпадает с ядром матрицы $\hat{R}(x)$, полученной алгоритмом **РМІ**.*

Используя это следствие и лемму 3.4, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7. *Мультиинтеграл $\mathcal{J}$ имеет бесконечномерное ядро, если и только если матрица $\hat{R}(x)$, полученная в алгоритме **РМІ**, неквадратная (число столбцов больше числа строк).*

ТЕОРЕМА 3.8. *Мультиинтеграл $\mathcal{J}$ редуцируем в операторном смысле тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}$ редуцируем по ядру.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к $\mathcal{J} = \bar{L}(x, y)\dot{\varphi}(x)$ алгоритм **РМІ**, получаем представление $\bar{L}(x, y) = \bar{M}(x, y)\hat{R}(x)$. Если $\mathcal{J}$ редуцируем по ядру, то по следствию 3.6 матрица $\hat{R}(x)$ имеет нетривиальное ядро и необратима. Тем самым, $\mathcal{J}$ редуцируем в операторном смысле.

Обратно, пусть $\mathcal{J}$ редуцируем в операторном смысле, т.е. имеет место соответствующее разложение $\bar{L}(x, y) = \bar{M}(x, y)\hat{R}(x)$, где $\hat{R}(x)$ – необратимая матрица такая, что число строк в ней меньше или равно числу столбцов. По лемме 3.4 $\hat{R}(x)$ имеет нетривиальное ядро. Тем самым $\mathcal{J}$ редуцируем по ядру.

Из доказанной теоремы и утверждения 3.5 непосредственно получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.9. *Мультиинтеграл $\mathcal{J} = \bar{M}(x, y)\dot{\psi}(x)$, полученный в алгоритме **РМІ**, нередуцируем в операторном смысле.*

ТЕОРЕМА 3.10. *Пусть даны мультиинтегралы $\mathcal{J}_1 = (M_1(x, y), \dots, M_p(x, y))$, $\mathcal{J}_2 = (L_1(x, y), \dots, L_k(x, y))$, причем $\mathcal{J}_1$ – нередуцируемый и $Z(\mathcal{J}_2) \subseteq Z(\mathcal{J}_1)$. Тогда*

$$(L_1(x, y), \dots, L_k(x, y)) = (M_1(x, y), \dots, M_p(x, y))\hat{R}(x) \quad (3.14)$$

с некоторой матрицей $\hat{R}(x)$ линейных обыкновенных дифференциальных операторов с коэффициентами, зависящими только от x . При этом ранг матрицы $\hat{R}(x)$ совпадает с числом ее строк p , если и только если $Z(\mathcal{J}_2) = Z(\mathcal{J}_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $Z(\mathcal{J}_2) \subseteq Z(\mathcal{J}_1)$, для любого столбца

$$\dot{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))^t$$

найдется столбец $\dot{\psi}(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_p(x))^t$ такой, что

$$(M_1(x, y), \dots, M_p(x, y))\dot{\psi} = (L_1(x, y), \dots, L_k(x, y))\dot{\varphi}. \quad (3.15)$$

Поскольку $M_1(x, y)$ нередуцируемый, можно выбрать $y_1, \dots, y_s$ и операторы $P_1(x), \dots, P_s(x)$ так, что

$$P_1(x)M_1(x, y_1) + \dots + P_s(x)M_1(x, y_s) = 1.$$

Моделируя действие алгоритма **РМ** на уравнение (3.15), получим из (3.15)

$$\psi_1(x) + \sum_{i=1}^s P_i(x) M_2(x, y_i) \psi_2(x) + \dots = \sum_{i=1}^s P_i(x) L_1(x, y_i) \varphi_1(x) + \dots \quad (3.16)$$

Применим к обеим частям этого равенства оператор $M_1(x, y)$ и вычтем полученное равенство из (3.15). В результате придем к аналогу равенства (3.11) в алгоритме **РМ**. Продолжая действие алгоритма, приходим в конце к равенству вида

$$Q(x, y) \psi_p(x) = \sum_{j=1}^k T_j(x) \varphi_j(x). \quad (3.17)$$

Поскольку в силу предположения теоремы $\mathcal{J}_1$ нередуцируемый, полученный оператор $Q(x, y)$ также нередуцируемый и подходящим выбором точек $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_t$ и операторов $\tilde{P}_1(x), \dots, \tilde{P}_t(x)$ можем получить

$$\tilde{P}_1(x) Q_1(x, \tilde{y}_1) + \dots + \tilde{P}_t(x) Q_1(x, \tilde{y}_t) = 1.$$

Тогда из (3.17) легко получаем

$$\psi_p(x) = \sum_{j=1}^k R_{pj}(x) \varphi_j(x). \quad (3.18)$$

Найденные $R_{pj}(x)$ и дают нам последнюю строчку матрицы $\hat{R}(x)$. Предыдущие строчки легко находятся из полученных в ходе работы алгоритма равенств вида (3.16). Подставляя (3.18) и аналогичные выражения для $\psi_{p-1}(x), \dots, \psi_1(x)$ в (3.15), получаем требуемую формулу (3.14), так как $\varphi_i(x)$ были выбраны произвольными.

Из (3.14) вытекает, что $Z(\mathcal{J}_2) = Z(\mathcal{J}_1)$ тогда и только тогда, когда система обыкновенных дифференциальных уравнений $\hat{R}(x) \dot{\varphi}(x) = \dot{\psi}(x)$ разрешима для любого столбца функций $\dot{\psi}(x)$. Приведем $\hat{R}$ к ступенчатому виду, что эквивалентно умножению системы слева на некоторую обратимую операторную матрицу $\hat{S}(x)$. Система $\hat{S}(x) \hat{R}(x) \dot{\varphi}(x) = \hat{S}(x) \dot{\psi}(x)$ разрешима при любом $\dot{\psi}(x)$, если и только если ступенчатая матрица $\hat{S}(x) \hat{R}(x)$ не имеет нулевых строк, что и доказывает последнее утверждение теоремы.

Отметим, что, в отличие от случая интегралов, для мультиинтегралов возможно строгое включение $Z(\mathcal{J}_2) \subset Z(\mathcal{J}_1)$. Простейшим примером может служить любой мультиинтеграл вида

$$\mathcal{J}_1 = (L_1(x, y), L_2(x, y))(\varphi_1(x), \varphi_2(x))^t,$$

в котором оба $L_1(x, y), L_2(x, y)$ порождают нередуцируемые интегралы с различными *непересекающимися* запасами функций $Z(L_1 \varphi_1), Z(L_2 \varphi_2)$. Прежде всего отсюда вытекает, что $\mathcal{J}_1$ нередуцируем по ядру и его запас функций совпадает с прямой суммой $Z(L_1 \varphi_1) \oplus Z(L_2 \varphi_2)$. Возьмем $\mathcal{J}_2 = L_1(x, y) \psi_1(x)$. Тогда $Z(\mathcal{J}_2) = Z(L_2 \varphi_2)$ строго содержится в $Z(\mathcal{J}_1)$.

Этот пример мотивирует введение следующего понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. *Подмультиинтегралом неприводимого мультиинтеграла*

$$\mathcal{J} = (L_1(x, y), \dots, L_k(x, y))$$

назовем любой мультиинтеграл

$$\widetilde{\mathcal{J}} = (\widetilde{L}_1(x, y), \dots, \widetilde{L}_m(x, y)) \dot{\varphi}(x) = (L_1(x, y), \dots, L_k(x, y)) \widehat{N}(x) \dot{\varphi}(x),$$

где $\widehat{N}(x)$ – любая матрица из дифференциальных операторов с коэффициентами, зависящими от x . Как видно из доказанного выше, это эквивалентно требованию $Z(\widetilde{\mathcal{J}}) \subseteq Z(\mathcal{J})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как и в случае интегралов Эйлера, из доказательства теоремы 3.10 легко вывести алгоритмический способ выяснения для заданных мультиинтегралов $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$, совпадают их запасы функций или различны, имеет ли место строгое включение одного запаса в другой и какова размерность пересечения $Z(\mathcal{J}_2) \cap Z(\mathcal{J}_1)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.12. Среди мультиинтегралов, порождающих одинаковые запасы функций, имеется единственный нередуцируемый $\mathcal{J}_0 = \bar{L}_0(x, y) \dot{\psi}(x)$, с точностью до преобразований $\bar{L}_0 \mapsto \bar{L}_0(x, y) \widehat{R}(x)$ с обратимой операторной матрицей $\widehat{R}(x)$. Все остальные мультиинтегралы с тем же запасом функций имеют вид $\mathcal{J} = \bar{L}_0(x, y) \widehat{S}(x) \dot{\varphi}(x)$, где $\widehat{S}(x)$ – произвольная операторная матрица с коэффициентами, зависящими от x , количество строк которой равно ее рангу.

Отметим, что в принятом нами подходе к рассмотрению редукции мультиинтегралов мы до настоящего момента не позволяли преобразования произвольных функций $\varphi_i(x)$. Естественными допустимыми операциями над набором $\dot{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))^t$ являются:

- перестановка двух функций $\varphi_i \leftrightarrow \varphi_j$;
- умножение одной из функций на заданный ненулевой множитель $g(x)$;
- замена $\varphi_j \mapsto \varphi_j + A(x)\varphi_i$, $i \neq j$, где $A(x)$ – заданный дифференциальный оператор с коэффициентами, зависящими только от x .

Этим операциям в представлении (3.1) соответствуют:

- перестановка операторов $L_i(x, y) \leftrightarrow L_j(x, y)$ строки $\bar{L}(x, y)$ и соответствующих столбцов матрицы $\widehat{R}(x)$;
- умножение оператора $L_i(x, y)$ и i -го столбца матрицы $\widehat{R}(x)$ справа на $g(x)$;
- замена $L_i \rightarrow L_i + L_j A(x)$ и добавление к i -му столбцу $\widehat{R}(x)$ j -го столбца, умноженного справа на $A(x)$.

Все эти операции соответствуют умножению обеих частей равенства (3.1) справа на обратимую операторную матрицу. Как показано в [15], одновременное выполнение допустимых операций со строками и столбцами матрицы $\widehat{R}(x)$ позволяет привести ее к виду $\widehat{\widetilde{R}}(x)$, в котором $\widetilde{R}_{ii}(x) = 1$ при $1 \leq i \leq p-1$, $\widetilde{R}_{pp}(x)$ есть некоторый дифференциальный оператор, а остальные элементы матрицы $\widehat{\widetilde{R}}(x)$ нулевые.

Отсюда вытекает, что, применяя к полученному в алгоритме **РМ** разложению $\bar{L} = \bar{M} \widehat{R}$ описанные выше операции со строками и столбцами, придем к равенству

$$(\widetilde{L}_1(x, y), \dots, \widetilde{L}_k(x, y)) = (\widetilde{M}_1(x, y), \dots, \widetilde{M}_p(x, y)) \widehat{\widetilde{R}}(x),$$

т.е.

$$\widetilde{L}_1 = \widetilde{M}_1, \quad \dots, \quad \widetilde{L}_{p-1} = \widetilde{M}_{p-1}, \quad \widetilde{L}_p = \widetilde{M}_p \widetilde{R}_{pp}$$

и, если $k > p$, то

$$\widetilde{L}_{p+1} = 0, \quad \dots, \quad \widetilde{L}_k = 0.$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.13. *С помощью допустимых операций над набором*

$$\mathring{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))^t$$

и отбрасывания нулевых компонент любой мультиинтеграл может быть приведен к виду

$$\mathcal{J} = (\tilde{L}_1(x, y), \dots, \tilde{L}_{p-1}(x, y), \tilde{M}_p(x, y) \tilde{R}_{pp}(x)) \mathring{\varphi}(x),$$

где строка $(\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{p-1}, \tilde{M}_p)$ задает нередуцируемый интеграл.

Автор выражает благодарность О. В. Капцову и Ю. В. Шанько за плодотворные обсуждения полученных в работе результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. R. Forsyth, *Theory of Differential Equations. Part IV. Partial Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1906.
- [2] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, II Partie, Gauthier-Villars, Paris, 1889.
- [3] É. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du seconde ordre à deux variables indépendants*, Tome II, A. Hermann, Paris, 1898.
- [4] А. В. Жибер, С. Я. Старцев, “Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений”, *Матем. заметки*, **74**:6 (2003), 848–857.
- [5] С. Я. Старцев, “Метод каскадного интегрирования Лапласа для линейных гиперболических систем уравнений”, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 107–118.
- [6] C. Athorne, “A $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{R}^3$ Toda system”, *Phys. Lett. A*, **206**:3-4 (1995), 162–166.
- [7] S. P. Tsarev, “Generalized Laplace transformations and integration of hyperbolic systems of linear partial differential equations”, *ISSAC'2005* (July 24–27, 2005, Beijing, China), ACM Press, New York, 2005, 325–331, arXiv:cs.SC/0501030.
- [8] И. А. Тайманов, С. П. Царев, “Двумерные операторы Шрёдингера с быстро убывающим рациональным потенциалом и многомерным L_2 -ядром”, *УМН*, **62**:3 (2007), 217–218.
- [9] E. I. Ganzha, V. M. Loginov, S. P. Tsarev, “Exact solutions of hyperbolic systems of kinetic equations. Application to Verhulst model with random perturbation”, *Math. Comput. Sci.*, **1**:3 (2008), 459–472, arXiv:math.AP/0612793.
- [10] Л. Эйлер, *Интегральное исчисление*. т. 3, ГИФМЛ, М., 1958.
- [11] J. Le Roux, “Extensions de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second”, *Bull. Soc. Math. France*, **27** (1899), 237–262.
- [12] L. Petré, “Extension de la méthode de Laplace aux équations $\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i} \partial^{i+1} z / \partial x \partial y^i + \sum_{i=0}^n A_{0i} \partial^i z / \partial y^i = 0$ ”, *Lunds Univ. Årsskrift*, **7**:3 (1911), 1–166.
- [13] А. В. Жибер, В. В. Соколов, “Точно интегрируемые гиперболические уравнения ливиллевского типа”, *УМН*, **56**:1 (2001), 63–106.
- [14] I. M. Anderson, N. Kamran, “The variational bicomplex for hyperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane”, *Duke Math. J.*, **87**:2 (1997), 265–319.
- [15] Н. Джекобсон, *Теория колец*, ИЛ, М., 1947.
- [16] Я. Б. Лопатинский, *Линейные дифференциальные операторы*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Баку, 1946; Я. Б. Лопатинский, *Теория общих граничных задач*, Наукова думка, Киев, 1984.

Е. И. Ганжа

Красноярский государственный педагогический университет

им. В. П. Астафьева

E-mail: eiganzha@mail.ru

Поступило

24.03.2009