Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Белов, О сходимости в среднем тригонометрических рядов Фурье, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 492–501

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:42:49

О сходимости в среднем тригонометрических рядов Фурье

А. С. Белов

В статье доказывается неулучшаемость теоремы Зигмунда, которая утверждает, что если 2π -периодическая функция $f \in L \ln^+ L$, то ее ряд Фурье сходится в среднем.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Теорема Зигмунда [1] утверждает, что если функция $f \in L_{2\pi}$ такова, что $f \in L \ln^+ L$, то ее ряд Фурье сходится в среднем (т.е. в метрике $L_{2\pi}$). В замечании в конце статьи [1] Зигмунд также обращает внимание на ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(\ln k)^{\gamma}},$$

который при любом $\gamma \in (0, 1]$ не сходится в среднем, но является рядом Фурье функции из $L(\ln^+ L)^{\varepsilon}$ для всех $\varepsilon \in [0, \gamma)$. Более того, Зигмунд высказал возможность того, что для любой неотрицательной и неубывающей на $[0, \infty)$ функции $\Psi(x)$, которая удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Psi(t)}{\ln t} = 0, \quad (1)$$

существует такая функция $f \in L\Psi(L)$, что ее ряд Фурье не сходится в среднем. Приведенный выше пример наводит на мнение, что возможно уже тригонометрические ряды с монотонными коэффициентами могут дать ответ на вопрос о неулучшаемости теоремы Зигмунда. Ясно, что речь идет о рядах по косинусам, поскольку ряд Фурье по синусам с монотонными коэффициентами всегда сходится в среднем.

Пусть невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ стремится к нулю, $\Delta^2 a_k \geq 0$ при всех $k \geq 0$ и

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx). \quad (2)$$

Здесь и далее, как обычно,

$$\begin{aligned} \Delta^0 a_n &= a_n, & \Delta a_n &= \Delta^1 a_n = a_n - a_{n+1}, \\ \Delta^m a_n &= \Delta^{m-1} a_n - \Delta^{m-1} a_{n+1}, & n &= 0, 1, \dots, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00302).

Преобразование Абеля, примененное дважды к ряду (2), приводит к известному представлению

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{2 \sin^2(x/2)}. \quad (3)$$

В частности, функция (2) неотрицательна на прямой, $f \in L_{2\pi}$ и, более того,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \Delta^2 a_n = a_0. \quad (4)$$

Умножая обе части равенства (3) на $\cos(kx)$ и интегрируя почленно, сразу получаем, что $a_k(f) = a_k$ при всех целых неотрицательных k , т.е. ряд (2) является рядом Фурье f .

Используя идею из нашей статьи [2], мы докажем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для любой неотрицательной и неубывающей на промежутке $[0, \infty)$ функции $\Psi(t)$, которая удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Psi(t)}{\ln t} = 0, \quad (5)$$

существует стремящаяся к нулю убывающая последовательность положительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln n = +\infty$,

$$\Delta^m a_n > 0 \quad \text{при всех } m \geq 1 \text{ и } n \geq 0, \quad (6)$$

функция (2) положительна на прямой, $f \in L_{2\pi}$, $f \in \Phi(L_{2\pi})$, где $\Phi(t) = t\Psi(t)$ при $t \in [0, \infty)$, но частные суммы ряда Фурье функции f , т.е. ряда (2), не ограничены в метрике $L_{2\pi}$ и, в частности, ряд Фурье функции f не сходится в среднем.

Эта теорема не только подтверждает предположение Зигмунда из замечания в статье [1], но и усиливает его, поскольку в теореме 1 условие (1) заменено на условие (5). Отметим также, что (см. далее лемму 1) удовлетворяющая условиям теоремы 1 функция $f(x)$ положительна и строго убывает на промежутке $(0, \pi]$, а ее сопряженная функция не интегрируема на $(0, \pi]$ и выполнено условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty. \quad (7)$$

Поэтому теорема 1 усиливает также теоремы Зигмунда 2 и 4 из [1].

Известно, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{\ln k}$$

не сходится в среднем и является рядом Фурье своей суммы $f_1(x)$. Более того, если функция $\Phi(x)$ неотрицательна и не убывает на $[0, \infty)$, то $f_1 \in \Phi(L)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_2^{\infty} \frac{\Phi(v)}{v^2 (\ln v)^2} dv < \infty. \quad (8)$$

Оказывается, верна следующая

ТЕОРЕМА 2. *Для любой неотрицательной и неубывающей на $[0, \infty)$ функции $\Phi(x)$, которая удовлетворяет условию (8), существует положительная функция $f \in L_{2\pi}$, имеющая ряд Фурье вида (2), такая, что $f \in \Phi(L_{2\pi})$,*

$$\Delta^m a_n > 0 \quad \text{при всех } m \geq 0 \text{ и } n \geq 0, \quad (9)$$

$a_n \ln n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и частные суммы ряда Фурье функции f не ограничены в метрике $L_{2\pi}$.

Теорема 2 дополняет теорему 1 при условии (8). Заметим также (см. конец статьи), что удовлетворяющая условиям теорем 1 и 2 функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема и даже аналитична на интервале $(0, 2\pi)$.

Цель этой статьи – доказательство теорем 1 и 2. Сначала излагается доказательство теоремы 1, затем – лемма 1 и после этого – доказательство теоремы 2. Теперь перейдем к реализации этого плана.

2. Доказательство теоремы 1. Если $t \in [2^m, 2^{m+1}]$ для некоторого натурального m , и $\log$ далее берется по основанию 2, то $m \leq \log t \leq m+1 \leq 2m$ и $\Psi(2^m) \leq \Psi(t)$. Поэтому $2\Psi(t)/\log t \geq \Psi(2^m)/m$ и из (5) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Psi(2^m)}{m} = 0.$$

Положим $n_0 = 1$. Последовательно для $k = 1, 2, \dots$ подберем натуральные числа $n_k = 2^{m_k}$ так, что

$$m_k \geq k2^{k+1}, \quad n_k \geq 4n_{k-1}, \quad \frac{\Psi(n_k)}{\log n_k} \leq 2^{-k-5} \quad (10)$$

при всех натуральных k . Пусть $\gamma_0 = 0$ и

$$\gamma_k = \frac{k}{m_k} \quad \text{при всех } k \geq 1. \quad (11)$$

Тогда в силу (10) имеем $\gamma_k \leq 2^{-k-1}$ при всех $k \geq 1$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < 1.$$

Положим

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^n \quad \text{при всех } n \geq 0 \quad (12)$$

и покажем, что эта последовательность удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Из (12) ясно, что все $a_n > 0$, $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и для любого натурального m верно равенство

$$\Delta^m a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{n_k^m} \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^n \quad \text{при всех } n \geq 0. \quad (13)$$

Из (13) сразу вытекает (9). Отсюда и из представления (3) имеем $f(x) \geq \Delta^2 a_0/2 > 0$. Таким образом, справедливо (6), функция f положительна на прямой, $f \in L_{2\pi}$ и в силу (4)

$$\|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{a_0(f)}{2} = \frac{a_0}{2}.$$

Отсюда и из (12) следует, что $\|f\|_{L^1} < 1$.

Поскольку при всех x и $r \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-r)^2 r^n \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{2 \sin^2(x/2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(kx) = \frac{1-r^2}{2((1-r)^2 + 4r \sin^2(x/2))},$$

из (3) и (13), где $m = 2$, имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{n_k^2} \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^n \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{2 \sin^2(x/2)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{(1 - (1 - 1/n_k)^2)}{2((1/n_k)^2 + 4(1 - 1/n_k) \sin^2(x/2))}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (10) видим, что $m_1 \geq 4$ и $n_1 \geq 16$. Значит, $4(1 - 1/n_k) > 2$ при всех натуральных k , и из (14) получаем оценку

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{n_k} \frac{1}{((1/n_k)^2 + 2 \sin^2(x/2))}. \quad (15)$$

Заметим, что в силу (10), (11) и возрастания функции $v/\log v$ на интервале $(3, +\infty)$ при всех натуральных k верны оценки

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} n_{k+1} &= (k+1) \frac{n_{k+1}}{\log n_{k+1}} > k \frac{4n_k}{\log(4n_k)} \geq k \frac{4n_k}{\log(n_k^2)} = 2\gamma_k n_k, \\ \frac{\gamma_{k+1}}{n_{k+1}} &= \frac{(k+1)}{n_{k+1} m_{k+1}} < \frac{2k}{n_{k+1} m_k} \leq \frac{2k}{4n_k m_k} = \frac{\gamma_k}{2n_k}. \end{aligned}$$

Пусть

$$x \in \left[\frac{\pi}{n_m}, \frac{\pi}{n_{m-1}} \right]$$

при некотором натуральном m . Тогда $\sin(x/2) \geq x/\pi$, и из (15) получаем

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k n_k + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\gamma_k}{2n_k} \left(\frac{\pi}{x}\right)^2 \\ &\leq 2\gamma_{m-1} n_{m-1} + \frac{\gamma_m}{n_m} \frac{\pi^2}{x^2} \leq \max \left\{ 4\gamma_{m-1} n_{m-1}, 2 \frac{\pi^2 \gamma_m}{n_m x^2} \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & \int_{\pi/n_m}^{\pi/n_{m-1}} \Phi(f(x)) dx \\
 & \leq \int_{\pi/n_m}^{\pi/n_{m-1}} \Phi(4\gamma_{m-1}n_{m-1}) dx + \int_{\pi/n_m}^{\pi/n_{m-1}} \Phi\left(2\frac{\gamma_m}{n_m} \frac{\pi^2}{x^2}\right) dx \\
 & \leq \Phi(4\gamma_{m-1}n_{m-1}) \left(\frac{\pi}{n_{m-1}} - \frac{\pi}{n_m}\right) + 2\pi^2 \frac{\gamma_m}{n_m} \Psi(2\gamma_m n_m) \int_{\pi/n_m}^{\pi/n_{m-1}} \frac{dx}{x^2} \\
 & \leq 4\pi\gamma_{m-1} \Psi(4\gamma_{m-1}n_{m-1}) + 2\pi\gamma_m \Psi(2\gamma_m n_m).
 \end{aligned}$$

Производя в этой оценке суммирование по всем натуральным m , приходим к оценке

$$\int_0^\pi \Phi(f(x)) dx \leq 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \Psi(4\gamma_k n_k) + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \Psi(2\gamma_m n_m).$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(f(x)) dx \leq 12\pi \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \Psi(4\gamma_k n_k).$$

Но в силу (10) и (11) все $\gamma_k \leq 1/4$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \Psi(4\gamma_k n_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \Psi(n_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\Psi(n_k)}{\log n_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k+5}} = \frac{1}{16}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(f(x)) dx < 1$$

и $f \in \Phi(L_{2\pi})$. Из (12) и (11) при натуральных k видим, что

$$a_{n_k} \geq \gamma_k \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \geq \frac{1}{4} \gamma_k = \frac{k}{4 \log n_k}.$$

Значит, $a_{n_k} \ln n_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда (см. [3; гл. 7, теорема 8.11]) вытекает, что частные суммы ряда (2), т.е. ряда Фурье функции f , не ограничены в метрике $L_{2\pi}$ и, тем более, ряд Фурье функции f не сходится в среднем. Теорема 1 полностью доказана.

3. Дополняющая лемма. Для лучшего понимания теоремы 1 полезна следующая

ЛЕММА 1. Пусть невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ стремится к нулю, $\Delta^4 a_k \geq 0$ при всех $k \geq 0$ и $a_0 > 0$. Тогда функция (2), т.е. $f(x)$, положительна, интегрируема, трижды непрерывно дифференцируема на интервале $(0, 2\pi)$, имеет отрицательную производную на интервале $(0, \pi)$ и строго убывает на промежутке $(0, \pi]$, а ее сопряженная функция не интегрируема на $(0, \pi]$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При всех целых неотрицательных n через

$$D_n^1(x) = D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$$

обозначим ядро Дирихле, и пусть

$$D_n^j(x) = \sum_{k=0}^n D_n^{j-1}(x) \quad \text{при } j = 2, 3, \dots$$

Тогда полином

$$D_n^2(x) = \frac{1 - \cos((n+1)x)}{4 \sin^2(x/2)}$$

неотрицателен. Известно (см. [3; гл. 3, формула (10.3)]), что при всех $|r| < 1$ верно тождество

$$-\sum_{k=0}^{\infty} r^k (D_k^4(x))' = \frac{4r \sin(x)}{(1-r^2)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k D_k^2(x) \right)^2.$$

Приравнявая коэффициенты при r^n , получаем равенство

$$-(D_n^4(x))' = 4 \sin(x) \sum_{\substack{k+m+2j=n-1 \\ k, m, j \geq 0}} D_k^2(x) D_m^2(x).$$

Из неотрицательности слагаемых в правой части этого равенства при нечетных n и $k = 0, m = 0$ выводим

$$-(D_n^4(x))' \geq 4 \sin(x) (D_0^2(x))^2 = \sin x > 0$$

при всех $x \in (0, \pi)$. Если же натуральное число n является четным, то, беря $2j = n - 2$, при $x \in (0, \pi)$ получаем

$$-(D_n^4(x))' \geq 8 \sin(x) D_0^2(x) D_1^2(x) = 4 \sin(x) (1 + \cos x) > 0.$$

Следовательно,

$$(D_n^4(x))' < 0 \quad \text{при всех } x \in (0, \pi) \quad \text{и} \quad n \geq 1. \quad (16)$$

При целых неотрицательных n последовательно имеем

$$\begin{aligned} \Delta^3 a_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \Delta^4 a_k, \\ \Delta^2 a_n &= \sum_{k=n}^{\infty} (k+1-n) \Delta^4 a_k, \\ \Delta a_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2} (k+1-n)(k+2-n) \Delta^4 a_k, \\ a_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(\sum_{j=n}^k \frac{1}{2} (k+1-j)(k+2-j) \right) \Delta^4 a_k. \end{aligned}$$

Поэтому $\Delta^m a_n \geq 0$ при всех $n \geq 0$ и $m = 0, 1, 2, 3, 4$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^3 \Delta^4 a_k < \infty.$$

Применяя четыре раза преобразование Абеля, получаем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^4 a_n D_n^4(x). \quad (17)$$

Поскольку

$$D_n^4(x) = \frac{(n+2)^2(1 - \cos x) - 1 + \cos((n+2)x)}{16 \sin^4(x/2)},$$

то при любом $\delta \in (0, \pi)$ ряд (17) после и однократного, и двухкратного, и трехкратного почленного дифференцирования будет равномерно сходиться на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$. Следовательно, функция f имеет на интервале $(0, 2\pi)$ третью непрерывную производную, и из (16) и (17) имеем равенство

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^4 a_n (D_n^4(x))' < 0$$

при всех $x \in (0, \pi)$, поскольку из того, что $a_0 > 0$, вытекает, что $\Delta^4 a_n > 0$ для некоторого номера n . В частности, функция f строго убывает на промежутке $(0, \pi]$. Поскольку ее сопряженная функция

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx),$$

то (см. [4; гл. 10, § 2, следствие 1]) функция $\tilde{f} \in L_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда условие (7) не выполнено. Лемма 1 доказана.

Обратим внимание, что для функции $f(x)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 1 или 2, выполнены все условия леммы 1, а также и условие (7), поскольку невыполнение условия (7) влечет условие $a_n \ln n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а оно и при условиях теоремы 1 и при условиях теоремы 2 не выполнено.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть

$$\Phi(+0) = \lim_{v \rightarrow +0} \Phi(v).$$

Положим

$$\varphi(v) = \Phi(v) - \Phi(+0) + v \quad \text{при } v > 0 \quad \text{и} \quad \varphi(0) = 0.$$

Тогда функция φ непрерывна в нуле, строго возрастает на промежутке $[0, \infty)$ и $\lim_{v \rightarrow +\infty} \varphi(v) = +\infty$, причем

$$\Phi(v) < \varphi(v) + \Phi(+0) \quad \text{при всех } v > 0. \quad (18)$$

Из условия (8) вытекает, что

$$\int_2^{\infty} \frac{\varphi(v)}{v^2 (\ln v)^2} dv < \infty. \quad (19)$$

Положим

$$g(x) = \frac{(\pi/x)}{(1 + \log(\pi/x))^2},$$

где $\log$ здесь и далее берется по основанию 2. Заметим, что производная функции $g(x)$ отрицательна при $x \in (0, \pi/8]$. Производя в условии (19) замену $v = Ag(x)$, видим, что для любого $A > 0$ справедливо условие

$$\int_0^\pi \varphi(Ag(x)) dx < +\infty. \quad (20)$$

Естественно, что при проведении этой замены достаточно рассматривать только x , лежащие в достаточно малой окрестности нуля, в которой функция $g(x)$ строго убывает, например, $x \in (0, \pi/8]$.

Возьмем произвольное натуральное q , $q \geq 4$, и пусть $n_k = 2^{qk}$ при всех $k = 0, 1, \dots$. Пусть $k_0 = 0$. Из (20) следует, что для каждого натурального s найдется такое натуральное k_s , что $k_s > k_{s-1}$ и

$$\int_0^{\pi 2^{-qk_s}} \varphi((s+1)g(x)) dx \leq \pi 2^{-s-2}. \quad (21)$$

Теперь найдем число $\theta \in (0, 1)$ такое, что

$$\int_{\pi 2^{-qk_1}}^\pi \varphi(\theta g(x)) dx < \frac{\pi}{4}. \quad (22)$$

Положим $A_m = \theta$ при $m = 1, \dots, 2^{qk_1}$. Для каждого натурального s пусть $A_m = \theta(s+1)$ при $m = 1 + 2^{qk_s}, \dots, 2^{qk_{s+1}}$. Тогда числа A_m определены и положительны при всех натуральных m , причем $A_m \leq A_{m+1}$, $A_{m+1} \leq 2A_m$ и $A_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Из (21) и (22) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\pi/n_m}^{\pi/n_{m-1}} \varphi(A_m g(x)) dx &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=k_{s+1}}^{k_{s+1}+1} \int_{\pi/n_m}^{\pi/n_{m-1}} \varphi(\theta(s+1)g(x)) dx \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\pi 2^{-qk_{s+1}}}^{\pi 2^{-qk_s}} \varphi(\theta(s+1)g(x)) dx < \frac{\pi}{4} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^{s+2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть $\gamma_0 = 0$ и

$$\gamma_m = \frac{A_m 2^{-2q-4}}{\log^2 n_m} \quad \text{при всех } m \geq 1. \quad (24)$$

Для всех натуральных m при $x \in [\pi/n_m, \pi/n_{m-1}]$ верны оценки

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1 + \log(\pi/x))^2} &\geq \frac{(\pi/n_m)}{(1 + \log n_m)^2}, \\ g(x) &\geq \frac{\pi}{x^2} \frac{(\pi/n_m)}{(1 + \log n_m)^2} \geq \frac{n_m^2}{n_m (1 + \log n_m)^2} = 2^{-2q} \frac{n_m}{(1 + \log n_m)^2} \geq 2^{-2q-2} \frac{n_m}{(\log n_m)^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$A_m g(x) \geq 2^{-2q-2} A_m \frac{n_m}{\log^2 n_m} = 4\gamma_m n_m \quad \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{n_m}, \frac{\pi}{n_{m-1}} \right] \quad (25)$$

для всех $m \geq 1$. Тогда в силу (24)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m 2^{-2q-4}}{q^2 m^2} = \frac{2^{-2q-4}}{q^2} \left(\sum_{m=1}^{2^{qk_1}} \frac{\theta}{m^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1+2^{qk_s}}^{2^{qk_{s+1}}} \frac{\theta(s+1)}{m^2} \right) \\ &= \frac{\theta}{q^2 2^{2q+4}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1+2^{qk_s}}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) \\ &< \frac{\theta}{q^2 2^{2q+4}} \left(1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \int_{2^{qk_s}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} \right) \\ &= \frac{\theta}{q^2 2^{2q+4}} \left(2 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^{qk_s}} \right) \leq \frac{3\theta}{q^2 2^{2q+4}} < \frac{3}{q^2 2^{2q+4}} < 2^{-12}. \end{aligned}$$

Последовательность положительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ определим по формуле (12). Функцию $f(x)$ определим по формуле (2). Тогда верна формула (13), а значит, условие (9) выполнено. Как и при доказательстве теоремы 1, из представления (3) выводим, что функция $f(x)$ положительна на прямой, $f \in L_{2\pi}$ и ряд (2) является ее рядом Фурье. Более того,

$$\|f\|_{L^1} = \frac{a_0}{2} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < 2^{-12}.$$

При натуральных m из (12) имеем

$$\begin{aligned} a_{n_m} &\geq \sum_{k=m}^{\infty} \gamma_k \left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^{n_m} \geq \frac{1}{4} \sum_{k=m}^{\infty} \gamma_k \\ &\geq 2^{-2q-6} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{A_k}{q^2 k^2} \geq 2^{-2q-6} \frac{A_m}{q^2} \int_m^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 2^{-2q-6} \frac{A_m}{q^2 m}. \end{aligned}$$

Отсюда, если $n_{m-1} \leq n \leq n_m$ при некотором натуральном $m \geq 2$, то

$$a_n \log n \geq a_{n_m} \log n_{m-1} \geq 2^{-2q-6} \frac{A_m}{q^2 m} (m-1) \geq 2^{-2q-7} \frac{A_m}{q}.$$

Поэтому $a_n \ln n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Как и при доказательстве теоремы 1, отсюда следует, что частные суммы ряда (2) не ограничены в метрике $L_{2\pi}$.

При всех натуральных k из (24) выводим

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} n_{k+1} &= 2^{-2q-4} \frac{A_{k+1}}{q^2 (k+1)^2} 2^q n_k = 2^q \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \frac{A_{k+1}}{A_k} \gamma_k n_k \\ &\geq 2^q \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \gamma_k n_k \geq 2^{q-2} \gamma_k n_k \geq 2 \gamma_k n_k, \\ \frac{\gamma_{k+1}}{n_{k+1}} &= \frac{2^{-2q-4} A_{k+1}}{q^2 (k+1)^2 2^q n_k} = 2^{-q} \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 \frac{A_{k+1}}{A_k} \frac{\gamma_k}{n_k} \leq 2^{1-q} \frac{\gamma_k}{n_k} \leq \frac{1}{2} \frac{\gamma_k}{n_k}. \end{aligned}$$

Так как $n_1 \geq 16$, то верна оценка (15). Пусть $x \in [\pi/n_m, \pi/n_{m-1}]$ при некотором натуральном m . Тогда, как и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$f(x) \leq \max \left\{ 4 \gamma_{m-1} n_{m-1}, 2 \frac{\gamma_m}{n_m} \frac{\pi^2}{x^2} \right\} \leq 2 \gamma_m n_m \leq A_m g(x),$$

где использована оценка (25). Отсюда и из (23) получаем

$$\int_0^\pi \varphi(f(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi/n_m}^{\pi/n_{m-1}} \varphi(f(x)) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi/n_m}^{\pi/n_{m-1}} \varphi(A_m g(x)) dx < \frac{\pi}{2}.$$

Из этой оценки и из (18) следует

$$\int_0^\pi \Phi(f(x)) dx < \pi\Phi(+0) + \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \Phi(f(x)) dx < 2\Phi(+0) + 1.$$

Значит, $f \in \Phi(L_{2\pi})$. Теорема 2 доказана.

Из представления (14) видим, что функция f продолжается как аналитическая функция в полосу $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$ по формуле

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{n_k} \left(1 - \frac{1}{2n_k}\right) \frac{1}{((1/n_k)^2 + (1 - 1/n_k)(2 - e^{iz} - e^{-iz}))}.$$

Заметим, что последний ряд сходится равномерно в полосе $\varepsilon \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi - \varepsilon$ при любом $\varepsilon \in (0, \pi)$. В частности, функция f бесконечно дифференцируема в интервале $(0, 2\pi)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Zygmund, “Sur les fonctions conjuguées”, *Fund. Math.*, **13**, (1929), 284–303.
- [2] А. С. Белов, “О тригонометрических рядах с неограниченными снизу частными суммами”, *Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. Биолог. Хим. Физ. Матем.*, 2002, № 3, 110–117.
- [3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, М., 1965.
- [4] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.

А. С. Белов
Ивановский государственный университет

Поступило
14.01.2009