Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Ниукканен, Преобразование тройного ряда Гельфанда, Граева и Ретаха в ряд того же типа и связанные вопросы, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 3, 384–392

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:30:11

Преобразование тройного ряда Гельфанда, Граева и Ретаха в ряд того же типа и связанные вопросы

А. В. Ниукканен

Получено преобразование тройного ряда T , связанного с грассманианом $G_{2,4}$, в ряд того же структурного типа. Это преобразование обобщает формулу редукции Гельфанда, Граева и Ретаха, сводящую ряд T к функции Гаусса при выполнении двух дополнительных условий, и две более общие формулы редукции, сводящие ряд T к функции Аппеля F_1 и к функции Горна G_2 при выполнении одного из дополнительных условий. Подход, примененный для анализа ряда T , основан на представлении исходного ряда T через ряды, обладающие удобными вычислительными свойствами.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Модельные и автономные доказательства тождества Гельфанда, Граева и Ретаха. Проблема компьютерной реализации доказательств. Первоначальное определение функций Аомото–Гельфанда [1]–[3] возникло как непосредственное обобщение [2] интегрального представления Эйлера ряда Гаусса

$$F_1^2 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x \right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 du u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} (1-xu)^{-b}. \quad (1)$$

Обозначения и определение ряда Гаусса будем записывать в виде

$${}_2F_1[a, b//c; x] \equiv F_1^2 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a, i)(b, i)}{(c, i)} \frac{x^i}{i!}, \quad (2)$$

где $(a, i) = a(a+1) \cdots (a+i-1) = \Gamma(a+i)/\Gamma(a)$ – символ Похгаммера. Выражение $a, b//c$ в левой части (2) является сокращенным “одноэтажным”, обозначением двухэтажной символической дроби в средней части равенства. Числителем и знаменателем этой “дроби”, являются списки параметров $[a, b]$ и $[c]$, поставленные в соответствие числителю $(a, i)(b, i)$ и знаменателю (c, i) числовой дроби, представляющей коэффициент ряда в правой части (2). Для символической дроби выполняются операции сокращения, расширения и обращения дроби, аналогичные операциям над обычными дробями. Числа 2 и 1 в обозначениях ${}_2F_1$ и F_1^2 соответствуют числам параметров числителя и знаменателя гипергеометрического ряда.

Подынтегральная функция в правой части (1) имеет форму произведения степеней трех линейных функций u , $1 - u$ и $1 - xu$. Аомото предложил обобщение функции Гаусса в форме аналогичного интеграла от произведения степеней нескольких линейных комбинаций переменных интегрирования $u_1, \dots, u_n$ [2]. Такое обобщение имеет вид функции от n переменных, служащих коэффициентами этих линейных комбинаций. Появление линейных комбинаций позволяет ввести n -мерное линейное пространство и грассманиан $G_{k,n}$, являющийся множеством всех k -мерных подпространств этого n -мерного пространства [3]. Это дает возможность обобщить схему Аомото с помощью технического аппарата интегральной геометрии. В новой математической модели “наивное” обобщение Аомото возникает как преобразование Радона характера χ универсальной накрывающей группы подгруппы Картана $GL(N+1, \mathbb{C})$ [1]. Использование теории преобразования Радона позволяет получить простую высокосимметричную систему дифференциальных уравнений и многочисленные аналоги 24 решений Куммера уравнения Гаусса для специального класса многократных гипергеометрических рядов, которые были названы “общими гипергеометрическими функциями на грассманиане $G_{k,n}$ ” [3]. С точки зрения общей теории гипергеометрических рядов класс функций, изученных в работе [3], сравнительно узок. Однако важность этого класса определяется тем, что он является непосредственным обобщением классических функций Гаусса, Куммера и Бесселя от одного переменного, а также тем, что работа [3] подводит под этот класс мощную математическую базу, позволяющую использовать для его изучения теорию дифференциальных уравнений. К сожалению путь от дифференциальных уравнений к формулировке конкретных свойств конкретных гипергеометрических рядов обычно долог и технически не прост. С точки зрения развития вычислительных методов в теории гипергеометрических рядов наиболее интересным и, по-видимому, единственным результатом, полученным с помощью новой математической модели, является возможность представления функции на грассманиане $G_{k,n}$ в виде двух разных рядов ${}^N F$ и ${}^M F$, имеющих кратности $N = (k-1)(n-1)$ и $M = (k-1)(n-k-1)$ [3]. Это приводит, например, к связи функций ${}^3 F$ и ${}^1 F$ в случае $G_{2,4}$; ${}^{10} F$ и ${}^4 F$ в случае $G_{3,6}$ и т.д. Наибольший интерес представляет простейшая формула этого ряда

$$T[a, a_1, a_2, 1-a, a_{12}; \mathbf{x}] = \frac{(1-x_3)^{a_{12}-1}(1-x_1x_3)^{a-a_1}}{(1-x_1)^a(1-x_2x_3)^{a_2}} F_1^2 \left[\begin{matrix} a_2, a \\ a_{12} \end{matrix}; \frac{(x_2-x_1)(1-x_3)}{(1-x_1)(1-x_2x_3)} \right], \quad (3)$$

где $a_{12} = a_1 + a_2$. Она связывает тройной ряд $T \equiv {}^3 F$, определяемый соотношением

$$T \equiv T[a, a_1, a_2, a_3, b; \mathbf{x}] = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} \frac{(a, i_1 + i_2 - i_3)}{(b, i_1 + i_2 - i_3)} (a_1, i_1)(a_2, i_2)(a_3, i_3) \frac{x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}}{i_1! i_2! i_3!}, \quad (4)$$

с функцией Гаусса ${}_2 F_1 \equiv {}^1 F$. Доказательство и обобщение этой формулы с помощью предлагаемого далее простого и универсального метода может дать ключ к доказательству и обобщению других формул этого ряда, а установление новых соотношений для функции T может оказаться стимулом для поисков доказательств этих соотношений с помощью теории “общих гипергеометрических функций на грассманиане $G_{k,n}$ ”.

Гипергеометрические ряды возникают во многих областях математики, физики и химии, использующих для решения своих специфических задач различные

математические модели. Для удобства сравнения методов и результатов желательно использовать в качестве основы анализа гипергеометрических рядов не свойства моделей, в которых возникают такие ряды, а фундаментальные, “автономные” свойства самих рядов, непосредственно учитывающие особенности их формальной структуры и не связанные со свойствами внешних по отношению к гипергеометрическим рядам математических моделей.

Попытка использования такого подхода для доказательства формулы (3) была предпринята в работе [4]. Ввиду недостаточной изученности многократных рядов авторы работы [4] были вынуждены использовать классические теоремы суммирования и формулы преобразования для рядов от *одного* переменного. Для этого вместо доказательства преобразования $T \rightarrow F_1^2$ они предложили доказательство обратного преобразования $F_1^2 \rightarrow T$. Разложение (2) для ряда F_1^2 из правой части (3) и последующие разложения пяти биномов, входящих в аргумент и сомножители этого ряда, порождают шестикратный ряд. Приведение такого ряда к форме трехкратного ряда T представляет по признанию авторов устрашающую (daunting) задачу, требующую для своего решения привлечения методов компьютерной алгебры.

За год до появления статьи [4] в заметке [5] задача прямого доказательства формулы редукции $T \rightarrow F_1^2$ была решена с помощью дробно-линейных преобразований ряда T по разным переменным и параметрам многократного ряда [6] и элементарных правил редукции многократных гипергеометрических рядов, найденных в [5]. Обращение к “интегральным” свойствам ряда “как целого” вместо анализа деталей его структуры позволило избавиться от промежуточных операций с отдельными частями многократных сумм и осуществить вычисления как вручную, так и с помощью интерактивной программы для ЭВМ.

В данной заметке эффективность предложенных в [6] формул, дополненных формулами операторной связи гипергеометрических рядов [7], подтверждена выводом преобразования $T \rightarrow \tilde{T}$, связывающего тройной ряд T с преобразованным тройным рядом $\tilde{T}$ того же структурного типа. Дополнительное исследование ряда T с помощью компьютерной программы [5], реализующей дробно-линейные преобразования и элементарные формулы редукции на языке системы компьютерной математики Maple, показало, что использование фундаментальных свойств многократных рядов позволяет использовать возможности компьютерного анализа более эффективно, чем схема, основанная на искусственном сведении вычислений к преобразованиям рядов от одного переменного. Было показано, что хотя с рядом T связаны около 200 тройных гипергеометрических рядов, однако ни один из этих рядов не приводит к столь простому и эффективному выводу формулы редукции (3) как ряд $\tilde{T}$. Формула редукции $T \rightarrow F_1^2$ [3] оказывается непосредственным следствием нового преобразования, как и две другие более общие формулы [5], сводящие ряд T к функции Аппеля F_1 и функции Горна G_2 .

2. Многократные гипергеометрические ряды: обозначения и элементарные свойства. Любой гипергеометрический ряд ${}^N F[L; \mathbf{x}]$ от N переменных $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]$ можно записать в однострочной форме

$${}^N F[L; \mathbf{x}] = \sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty} L(\mathbf{i}) \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{i}}}{\mathbf{i}!} \equiv \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_N=0}^{\infty} L(i_1, \dots, i_N) \frac{x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N}}{i_1! \cdots i_N!}, \quad (5)$$

$$L(\mathbf{i}) = \prod_{k=1}^K (a_k, \mathbf{m}_k^{\rightarrow} \cdot \mathbf{i}) \equiv \prod_{k=1}^K (a_k, m_{k,1}i_1 + \dots + m_{k,N}i_N), \quad (6)$$

где $m_{k,n}$ – структурные числа, которые могут принимать любые целые значения, $\mathbf{m}_k^{\rightarrow}$ – k -я строка структурной $K \times N$ -матрицы M с элементами $m_{k,n}$, $(a, i) = a(a+1) \dots (a+i-1) = \Gamma(a+i)/\Gamma(a)$ – символ Похгаммера. Вместо явного изображения ряда в виде многократной суммы (5) удобно использовать сокращенное обозначение

$${}^N F[L; \mathbf{x}] = {}^N F[\langle a_1 | \mathbf{m}_1^{\rightarrow} \rangle, \dots, \langle a_K | \mathbf{m}_K^{\rightarrow} \rangle; x_1, \dots, x_N], \quad (7)$$

где $\langle a_k | \mathbf{m}_k^{\rightarrow} \rangle = \langle a_k | m_{k,1}, \dots, m_{k,N} \rangle$ – элементарные списки параметров, соответствующие символам Похгаммера в правой части (6). Параметры a_k будем называть *головными параметрами* элементарных списков. Обозначение (7) в отличие от многих стандартных дает полную информацию о ряде ${}^N F[L; \mathbf{x}]$. Любая перестановка переменных $x_1, \dots, x_N$ в правой части (7) оставляет ряд инвариантным, если она сопровождается аналогичной перестановкой столбцов $\mathbf{m}_1^{\downarrow}, \dots, \mathbf{m}_N^{\downarrow}$ матрицы M (правило комбинированной перестановки). В некоторых случаях вместо однострочной записи параметров L и коэффициентов $L(\mathbf{i})$ удобно использовать двухстрочную запись

$$L = \begin{matrix} \langle a_1 | \mathbf{m}_1^{\rightarrow} \rangle & \dots & \langle a_K | \mathbf{m}_K^{\rightarrow} \rangle \\ \langle b_1 | \mathbf{w}_1^{\rightarrow} \rangle & \dots & \langle b_Q | \mathbf{w}_Q^{\rightarrow} \rangle \end{matrix}, \quad L(\mathbf{i}) = \frac{\langle a_1 | \mathbf{m}_1^{\rightarrow} \cdot \mathbf{i} \rangle \times \dots \times \langle a_K | \mathbf{m}_K^{\rightarrow} \cdot \mathbf{i} \rangle}{\langle b_1 | \mathbf{w}_1^{\rightarrow} \cdot \mathbf{i} \rangle \times \dots \times \langle b_Q | \mathbf{w}_Q^{\rightarrow} \cdot \mathbf{i} \rangle}, \quad (8)$$

связанную с применяемым далее перемещением части параметров из числителя в знаменатель и обратным перемещением другой части параметров из знаменателя в числитель для приведения ряда к канонической форме. Применяемое для этой цели правило вертикального переноса элементарного списка $\langle a_k | \mathbf{m}_k^{\rightarrow} \rangle$, вытекающее из формулы $(a, i) = (-1)^i (1 - a, -i)^{-1}$, заключается в замене этого списка “инвертированным” списком $\langle 1 - a | \overline{\mathbf{m}_k^{\rightarrow}} \rangle \equiv \langle 1 - a | -\mathbf{m}_k^{\rightarrow} \rangle$, помещаемым в противоположную по вертикали позицию, с одновременной заменой $x_n \rightarrow (-1)^{m_{k,n}} x_n$, $n = 1, \dots, N$. Кроме подразделения множества элементарных списков на подмножества списков числителя и знаменателя удобно использовать дальнейшую детализацию обозначений, разделяя каждое из этих подмножеств двоеточием на подмножество “глюонных” (склеивающих) списков параметров, структурные наборы которых содержат не менее двух отличных от нуля компонент, и подмножество “индивидуальных” списков параметров, в структурных наборах которых отлична от нуля одна и только одна компонента. Опуская нулевые компоненты таких структурных наборов, поместим “урезанные” индивидуальные списки в разделенные точками с запятой позиции, соответствующие номерам позиций ненулевых компонент. Если единственное ненулевое структурное число, остающееся в обозначении индивидуального списка, равно 1, будем указывать только головной параметр этого списка, а единичный структурный параметр будем подразумевать, не указывая его явно. Такое же соглашение применим к глюонным элементарным спискам, в которых все структурные числа равны 1. Пример соответствия общих и специализированных обозначений дает редукция

$$\begin{aligned} & [\langle a | 1, 1, 0 \rangle, \langle a | 1, 1, 1 \rangle, \langle a_1 | 1, 0, 0 \rangle, \langle a_2 | 0, \bar{2}, 0 \rangle, \langle b | 0, 1, 0 \rangle, \langle a_3 | 0, 0, 1 \rangle] \\ & \rightarrow [\langle a | 1, 1, 0 \rangle, a : a_1; \langle a_2 | \bar{2} \rangle, b; a_3], \end{aligned}$$

где $\bar{2} \equiv -2$. Пустой набор параметров обозначим значком $*$, принимая, что $(*, i) \equiv 1$. Положим $\bar{m} = -m$, например, $\bar{1} = -1$. В указанных обозначениях ряд T , входящий в тождество Гельфанда, Граева и Ретаха, принимает вид

$$T \equiv T[a, a_1, a_2, a_3, b; \mathbf{x}] = {}_3F \left[\begin{matrix} \langle a|1, 1, \bar{1} \rangle : a_1; a_2; a_3; x_1, x_2, x_3 \\ \langle b|1, 1, \bar{1} \rangle : *; *; * \end{matrix} \right]. \quad (9)$$

3. Универсальные дробно-линейные преобразования. Часто понимаемое под *преобразованием* отображение элемента некоторого функционального пространства на элемент этого же или другого функционального пространства под действием линейного преобразования не имеет отношения к преобразованиям гипергеометрических рядов. Для наших целей *преобразование* – это обычное тождественное, или Ω -тождественное, т.е. осуществляемое с помощью формул факторизации (см. п. 4), преобразование ряда, выражающее его через некоторый другой гипергеометрический ряд. В отличие от функциональных преобразований число преобразований гипергеометрических рядов относительно невелико, так как они возникают при жестких ограничениях на тип или параметры ряда. Для явной формулировки таких преобразований по некоторому переменному x_n многократный гипергеометрический ряд необходимо привести к канонической форме по переменному x_n . На первом шаге приведения с помощью правила вертикального переноса следует добиться, чтобы все n -е структурные компоненты, связанные с переменным x_n , получили неотрицательные значения. На втором шаге с помощью формулы умножения Гаусса–Лежандра всем неединичным n -м структурным компонентам, отличным от нуля, следует придать единичные значения.

Если бы все структурные компоненты, не связанные с переменным x_n , были обращены после этого шага в нуль, то многократный ряд превратился бы в однократный обобщенный гипергеометрический ряд от переменного x_n , аналогичный по форме ряду в правой части (2), но содержащий A_n параметров числителя $\mathbf{a}_n = a_{n,1}, \dots, a_{n,A_n}$ и B_n параметров знаменателя $\mathbf{b}_n = b_{n,1}, \dots, b_{n,B_n}$. По аналогии с рядом (2) будем называть пару чисел $[A_n//B_n]$ типом многократного ряда по переменному x_n . В случае $A_n = 2$ и $B_n = 1$ будем говорить, что многократный ряд имеет гауссовский тип $[2//1]$ по переменному x_n . Классификация рядов по типам имеет важное значение для теории многократных гипергеометрических рядов, так как многие свойства таких рядов, имеющих по некоторым переменным бесселевский тип $[0//1]$, куммеровский тип $[1//1]$, гауссовский тип $[2//1]$ и т.д., являются скрытыми или явными аналогами свойств однократных рядов аналогичного типа.

Упомянутые выше начальные шаги приведения завершим переносом переменного x_n и всех n -х структурных чисел, получивших единичные значения в результате первых двух шагов, в начальные (крайние левые) позиции соответствующих списков. Полученную форму записи ряда будем называть канонической формой по переменному x_n .

Если ряд имеет гауссовский тип по переменному x_n , то, переобозначая x_n через x_0 , а все остальные переменные и связанные с ними поднаборы структурных чисел – через $\mathbf{x}$, $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ и $\mathbf{m}_0$, каноническую форму ряда можно записать в следующем

общем виде:

$$F \left[\begin{matrix} \langle \nu_1 | 1, \mathbf{m}_1 \rangle, \langle \nu_2 | 1, \mathbf{m}_2 \rangle, L^* \\ \langle \nu_0 | 1, \mathbf{m}_0 \rangle \end{matrix}; x_0, \mathbf{x} \right] \equiv \sum_{i_0, \mathbf{i}} \frac{(\nu_1, i_0 + \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{i})(\nu_2, i_0 + \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{i})}{(\nu_0, i_0 + \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{i})} L^*(\mathbf{i}) \frac{x_0^{i_0} \mathbf{x}^{\mathbf{i}}}{i_0! \mathbf{i}!}, \quad (10)$$

где через L^* обозначена совокупность параметров, в состав которых входят структурные наборы с нулевыми значениями первых компонент. Через ν_1 , ν_2 и ν_0 обозначены головные параметры преобразованных в результате шагов 1 и 2 элементарных списков с единичными структурными числами в первых позициях.

Выделение в (10) внутренней суммы по i_0 , имеющей форму ряда Гаусса, позволяет применить к этому ряду дробно-линейные преобразования Пфаффа–Куммера и Эйлера, явный вид которых следует из (11)–(13) в случае $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Восстановление исходной структуры суммирований показывает, что для исходного ряда имеют место три новых выражения, которые будем называть дробно-линейными преобразованиями исходного ряда. Для краткого обозначения этих выражений введем условные символы $L^0(\underline{\nu}_1, \nu_2)F$, $L^0(\nu_1, \underline{\nu}_2)F$ и $L^0(\underline{\nu}_1, \underline{\nu}_2)F$, в которых верхний индекс при символе L (здесь -0 , и далее -1 , 2 и 3) указывает на активный аргумент, а нижняя черта – на связанные с этим аргументом активные параметры, изменяющиеся в результате преобразований Пфаффа–Куммера–Эйлера:

$$L^0(\underline{\nu}_1, \nu_2)F = (1 - x_0)^{-\nu_2} F \left[\begin{matrix} \langle \nu_{0\bar{1}} | 1, \mathbf{m}_{0\bar{1}} \rangle, \langle \nu_2 | 1, \mathbf{m}_2 \rangle, L_1^*, L^* \\ \langle \nu_0 | 1, \mathbf{m}_0 \rangle \end{matrix}; \frac{x_0}{x_0 - 1}, \frac{\mathbf{x}}{(1 - x_0)\mathbf{m}_2} \right], \quad (11)$$

$$L^0(\nu_1, \underline{\nu}_2)F = (1 - x_0)^{-\nu_1} F \left[\begin{matrix} \langle \nu_1 | 1, \mathbf{m}_1 \rangle, \langle \nu_{0\bar{2}} | 1, \mathbf{m}_{0\bar{2}} \rangle, L_2^*, L^* \\ \langle \nu_0 | 1, \mathbf{m}_0 \rangle \end{matrix}; \frac{x_0}{x_0 - 1}, \frac{\mathbf{x}}{(1 - x_0)\mathbf{m}_1} \right], \quad (12)$$

$$L^0(\underline{\nu}_1, \underline{\nu}_2)F = (1 - x_0)^{-\nu_{0\bar{1}\bar{2}}} F \left[\begin{matrix} \langle \nu_{0\bar{1}} | 1, \mathbf{m}_{0\bar{1}} \rangle, \langle \nu_{0\bar{2}} | 1, \mathbf{m}_{0\bar{2}} \rangle, L_1^*, L_2^*, L^* \\ \langle \nu_0 | 1, \mathbf{m}_0 \rangle \end{matrix}; x_0, \frac{\mathbf{x}}{(1 - x_0)\mathbf{m}_{\bar{0}12}} \right], \quad (13)$$

где

$$L_1^* = \frac{\langle \nu_1 | 0, \mathbf{m}_1 \rangle}{\langle \nu_{0\bar{1}} | 0, \mathbf{m}_{0\bar{1}} \rangle}, \quad L_2^* = \frac{\langle \nu_2 | 0, \mathbf{m}_2 \rangle}{\langle \nu_{0\bar{2}} | 0, \mathbf{m}_{0\bar{2}} \rangle}, \quad \begin{bmatrix} \nu_{0\bar{p}} \\ \mathbf{m}_{0\bar{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n u_0 - \nu_p \\ \mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_p \end{bmatrix}, \quad (14)$$

и $\nu_{0\bar{1}\bar{2}} = \nu_0 - \nu_1 - \nu_2$, $\mathbf{m}_{\bar{0}12} = -\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$. Возможность явной записи таких преобразований для рядов произвольного вида возникает в результате введения понятий структурных наборов и канонической формы ряда. Любая последовательность дробно-линейных преобразований ряда T приводит к ряду, который численно равен исходному, например,

$$T = T_{110}^{132} = L_0^2 L_1^3 L_1^1 T \equiv L^2(\underline{a}, \underline{a}_2) L^3(1 - \underline{b}, a_3) L^1(\underline{a}, a_1) T, \quad (15)$$

$$T_{110}^{132} = (1 - x_1)^{-a_1} (1 - x_2)^{b-a-a_2} (1 - x_3)^{-a_3} U, \quad (16)$$

$$U = F \left[\begin{matrix} \langle b - a | 1, 1, 1 \rangle, \langle b - a_2 | 1, 1, 0 \rangle : & a_1; *; & a_3; \\ \langle b | 1, 1, 0 \rangle : & b - a_2; *; & 1 - a; \end{matrix} z_1, z_2, z_3 \right], \quad (17)$$

$$z_1 = x_1(1 - x_2)(x_1 - 1)^{-1}, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_3(1 - x_2)(x_3 - 1)^{-1}. \quad (18)$$

4. Формулы факторизации и преобразования ряда T в ряд того же типа. В своей основе метод факторизации [7] сводится к двум формулам. Общая формула для произвольного степенного ряда имеет вид

$$\begin{aligned} {}^N F[A, B; x_1, \dots, x_N] &= \sum_{i_1 \dots i_N} A(i_1, \dots, i_N) B(i_1, \dots, i_N) \frac{x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N}}{i_1! \dots i_N!} \\ &= {}^N F\left[A; \frac{d}{ds_1}, \dots, \frac{d}{ds_N}\right] {}^N F[B; x_1 s_1, \dots, x_N s_N] \Big|_{s_1 = \dots = s_N = 0}. \end{aligned} \quad (19)$$

Эта формула позволяет отщепить в гипергеометрическом ряде (5) любую совокупность элементарных списков параметров. Специальная формула

$$\begin{aligned} {}^N F[\langle D | \mathbf{m} \rangle, B; x_1, \dots, x_N] &= \sum_{i_1 \dots i_N} D(\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}) B(i_1, \dots, i_N) \frac{x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N}}{i_1! \dots i_N!} \\ &= {}^1 F\left[D; \frac{d}{ds}\right] {}^N F[B; x_1 s^{m_1}, \dots, x_N s^{m_N}] \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (20)$$

следует из (19), если коэффициент $A(\mathbf{i}) = A(i_1, \dots, i_N)$ имеет вид $A(\mathbf{i}) = D(\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}) = D(m_1 i_1 + \dots + m_N i_N)$, типичный для коэффициентов (6) ряда (7). В отличие от формул (11)–(13) формулы операторной факторизации пригодны для исследования любого гипергеометрического ряда. Формулы (19) и (20) являются шаблонами, по образцу которых формируются специализированные формулы для рядов, в которых место произвольных последовательностей A и B занимают произведения символов Похгаммера, заданных на целочисленных N -мерных решетках. Используя двухкратную факторизацию ряда U (17) с помощью формулы вида (20), получаем

$$U = F\left[b - a; \frac{d}{ds}\right] F\left[b - a_2; \frac{d}{dt}\right] F\left[\frac{a_1}{b - a_2}; z_1 st\right] e^{z_2 st} \Big|_{t=0} F\left[\frac{a_3}{1 - a}; z_3 s\right] \Big|_{s=0}. \quad (21)$$

В правой части (21) появляются ряды Куммера $F[\alpha//\beta; x]$ типа $[1//1]$ с коэффициентами $(\alpha, n)/(\beta, n)$ при $x^n/n!$. Применение к рядам $F_1^1[a_1//b - a_2; z_1 st]$ и $F_1^1[a_3//1 - a; z_3 s]$ преобразования Куммера $F[a//b; x] = F[b - a//b; -x] \exp(x)$ приводит к появлению в правой части (21) двух экспонент $\exp(z_1 st)$ и $\exp(z_3 s)$. Первая экспонента поглощается функцией $\exp(z_2 st)$, а вторая исчезает в силу условия $s = 0$, которое делает возможным замену оператора $F[b - a; d/ds] \exp(z_3 s)$ “ Ω -эквивалентным” оператором $(1 - z_3)^{a-b} F[b - a; (1 - z_3)^{-1} d/ds]$; по определению [6], [7] оператор $H(d/ds)$ Ω -эквивалентен оператору $K(d/ds)$, если выполнено $H(d/ds)\Psi(s)|_{s=0} = K(d/ds)\Psi(s)|_{s=0}$ для любой достаточно гладкой функции $\Psi(s)$. После этого двухкратным применением формулы операторной факторизации получаем выражение ряда U в виде преобразованного так, как указано выше, ряда $\tilde{U}$:

$$\begin{aligned} U = \tilde{U} &\equiv (1 - x_2 x_3)^{a-b} (1 - x_3)^{b-a} \\ &\times {}^3 F\left[\begin{matrix} \langle b - a | 1, 1, 1 \rangle, \langle b - a_2 | 1, 1, 0 \rangle : b - a_{12}; *; 1 - a - a_3 \\ \langle b | 1, 1, 0 \rangle : b - a_2; *; 1 - a \end{matrix} ; \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где зависимость $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ от x_1, x_2, x_3 может быть записана в виде

$$\zeta_1 = \xi_1(1 - \xi_2)(\xi_1 - 1)^{-1}, \quad \zeta_2 = \xi_2, \quad \zeta_3 = \xi_3(1 - \xi_2)(\xi_3 - 1)^{-1}, \quad (23)$$

$$\xi_1 = \frac{x_1(1 - x_3)}{x_1 - 1}, \quad \xi_2 = \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_3)}{(1 - x_1)(1 - x_2x_3)}, \quad \xi_3 = \frac{x_3(1 - x_2)}{1 - x_2x_3}. \quad (24)$$

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & \tilde{U} \\ T \swarrow & & \searrow \tilde{T} \\ & & \end{array}$$

следует, что преобразование $T \rightarrow \tilde{T}$ эквивалентно последовательности преобразований $T \rightarrow U$ (16), $U \rightarrow \tilde{U}$ (22) и $\tilde{U} \rightarrow \tilde{T}$ (16). Так как оба ряда U и $\tilde{U}$ имеют одинаковую структуру, а зависимость аргументов $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ от ξ_1, ξ_2, ξ_3 такая же, как зависимость z_1, z_2, z_3 от x_1, x_2, x_3 в уравнении (18), то ряд U удастся выразить через ряд $\tilde{T}$, имеющий такую же структуру, как и исходный ряд T . В результате получаем искомую формулу преобразования ряда T :

$$\begin{aligned} T &\equiv {}^3F \left[\begin{matrix} \langle a|1, 1, \bar{1} \rangle : a_1; a_2; a_3 \\ \langle b|1, 1, \bar{1} \rangle : *; *; * \end{matrix} ; x_1, x_2, x_3 \right] \\ &= \frac{(1 - x_3)^{b-1}(1 - x_1x_3)^{1-a_1-a_3}}{(1 - x_1)^a(1 - x_2x_3)^{a_2}} \\ &\quad \times {}^3F \left[\begin{matrix} \langle a|1, 1, \bar{1} \rangle : b - a_{12}; a_2; 1 - a - a_3 \\ \langle b|1, 1, \bar{1} \rangle : *; *; * \end{matrix} ; \xi_1, \xi_2, \xi_3 \right] \equiv \tilde{T}, \end{aligned} \quad (25)$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 заданы формулами (24). Если выполняется одно из условий $b = a_{12}$ или $a_3 = 1 - a$, то подавление соответствующих структурных чисел и аргументов приводит либо к ряду Аппеля F_1 , либо к ряду Горна G_2 [5]:

$$T[a, a_1, a_2, 1 - a, b; \mathbf{x}] = L_1^2 L_1^1 (T_{11}^{12}|_{a_3=1-a}) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(1 - x_3)^{b-1}(1 - x_1x_3)^{a-a_1}}{(1 - x_1)^a(1 - x_2x_3)^{a_2}} \\ &\quad \times F_1 \left[\begin{matrix} a : b - a_{12}; a_2, \frac{x_1(1 - x_3)}{x_1 - 1}, \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_3)}{(1 - x_1)(1 - x_2x_3)} \\ b : *; *, \frac{x_1(1 - x_3)}{x_1 - 1}, \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_3)}{(1 - x_1)(1 - x_2x_3)} \end{matrix} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$T[a, a_1, a_2, a_3, a_{12}; \mathbf{x}] = L_1^2 (T_{12}^{31}|_{b=a_{12}}) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(1 - x_3)^{a_{12}-1}(1 - x_1x_3)^{1-a_1-a_3}}{(1 - x_1)^a(1 - x_2x_3)^{a_2}} \\ &\quad \times G_2 \left[\begin{matrix} \langle a|1, \bar{1} \rangle : a_2; 1 - a - a_3, \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_3)}{(1 - x_1)(1 - x_2x_3)}, \frac{x_3(x_1 - 1)}{x_3 - 1} \\ \langle a_{12}|1, \bar{1} \rangle : *; *, \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_3)}{(1 - x_1)(1 - x_2x_3)}, \frac{x_3(x_1 - 1)}{x_3 - 1} \end{matrix} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

где в полных обозначениях рядов вместо общего символа F использованы общепринятые символы F_1 и G_2 . Если выполняются оба условия, то из преобразования (25) немедленно следует формула редукции $T \rightarrow F_1^2$ (3). Преобразование (25) подтверждает предположение [5], что любая формула редукции ряда является следствием тривиальной формулы редукции, примененной к некоторому преобразованию ряда, и показывает, что тождество Гельфанда, Граева и Ретаха является следствием “скрытой симметрии” ряда T , который является представителем семейства 205

полных гауссовских тройных рядов, имеющих тип $[2//1]$ по каждому из переменных. Отнесение 205 функций к классам функций, связанных друг с другом линейными преобразованиями, может иметь важное значение в теории функций этого семейства, аналогичного семейству 14 полных двойных гауссовских рядов Апеля и Горна. Преобразование (25) является частным, но важным примером таких преобразований, аналитический вывод которых можно осуществить по аналогии с предложенной выше схемой. Полную систему таких преобразований можно использовать для вычислительных целей, применяя в разных областях параметров и переменных те из преобразований исходного ряда, которые обеспечивают наиболее быструю сходимость. Кроме формул приведения (3), (27), (29) из соотношения (25) можно получить некоторые новые преобразования. Например, Эрдеи утверждает [8], что за исключением функций Апеля F_1 и F_2 , которые допускают преобразования в ряды того же типа, “ни для одного из других полных гипергеометрических рядов от двух переменных не известно простого преобразования такого типа”. В случае $x_1 = x_2$ формула (25) дает преобразование ряда G_2 в ряд такого же типа, что расширяет список “исключительных” функций. Можно показать, что и функция H_2 , связанная с G_2 , также допускает аналогичное преобразование.

Автор благодарен Л. А. Грибову за поддержку усилий, направленных на разработку упрощенной, универсализированной и производительной техники вычислений, удобной для использования в прикладных математических исследованиях.

Автор благодарен А. С. Трушечкину за вопросы и замечания, способствовавшие улучшению изложения материала заметки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Kimura, “On the twisted de Rham cohomology group of the general hypergeometric integral of type $(q+1, 1^{N-q})$ ”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **12**:2 (2005), 165–189.
- [2] К. Aomoto, “On the structure of integrals of power product of linear functions”, *Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo*, **27**:2 (1977), 49–61.
- [3] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах, “Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа”, *УМН*, **47**:4 (1992), 3–82.
- [4] C. Krattenthaler, H. Rosengren, “On a hypergeometric identity of Gelfand, Graev and Retakh”, *J. Comput. Appl. Math.*, **160**:1-2 (2003), 147–158.
- [5] А. В. Ниукканен, О. С. Парамонова, “Линейные преобразования и формулы редукции гипергеометрических функций Гельфанда, связанных с грассманианами $G_{2,4}$ и $G_{3,6}$ ”, *Матем. заметки*, **71**:1 (2002), 88–99.
- [6] А. В. Ниукканен, “Общие линейные преобразования гипергеометрических функций”, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 769–779.
- [7] А. В. Ниукканен, “Новый метод в теории гипергеометрических рядов и специальных функций математической физики”, *УМН*, **43**:3 (1988), 191–192.
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдеи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1973.

А. В. Ниукканен

Институт геохимии и аналитической химии

им. В. И. Вернадского РАН, Москва

E-mail: aniukkanen@tula.net

Поступило

02.02.2009

Исправленный вариант

20.06.2010