Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Потапов, Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 262–266

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:14:49

Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика

Д. К. Потапов

Рассматриваются непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости. Аппроксимирующая задача получается из исходной малыми возмущениями спектрального параметра (завихренности) и непрерывными по фазовой переменной аппроксимациями разрывной нелинейности. При определенных условиях вариационным методом устанавливается сходимость решений аппроксимирующих задач к решению исходной задачи.

Библиография: 9 названий.

Введение. В работах [1]–[3] рассматриваются аппроксимации основных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. Аппроксимирующая задача получается из исходной возмущением спектрального параметра и аппроксимацией нелинейности каратеодориевыми функциями. Вариационным методом доказываются теоремы о сходимости решений аппроксимирующей задачи к решению исходной. В [1] предполагается, что дифференциальная часть вместе с граничным условием порождает коэрцитивный оператор. В [2] рассматриваются резонансные эллиптические краевые задачи со спектральным параметром и ограниченной разрывной нелинейностью. В [3] рассматривается однопараметрическое семейство задач Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка с разрывной нелинейностью. Изучается вопрос о близости решений аппроксимирующей и исходной задач. На актуальность данной тематики и необходимость исследований в этом направлении указано в совместной работе Красносельского и Покровского [4].

Данная статья посвящена непрерывным аппроксимациям плоской задачи об отрывных течениях несжимаемой жидкости Гольдштика [5], [6].

1. Постановка задачи. Математическая постановка задачи Гольдштика [5] состоит в определении непрерывно-дифференцируемой функции тока ψ , удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\psi = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < 0, \\ 0, & \text{если } \psi \geq 0, \end{cases}$$

и краевому условию

$$\psi|_{\Gamma} = \varphi(s),$$

где Δ – оператор Лапласа, ω – завихренность, Γ – кусочно-гладкий контур плоской ограниченной области Ω , φ – непрерывная неотрицательная и отличная от нуля лишь на части контура функция.

Аппроксимирующая задача имеет вид

$$\Delta\psi = \begin{cases} \omega_k, & \text{если } \psi < -\varepsilon, \\ -\frac{\omega_k}{\varepsilon}\psi, & \text{если } -\varepsilon \leq \psi \leq 0, \\ 0, & \text{если } \psi \geq 0, \end{cases} \quad \psi|_{\Gamma} = \varphi(s),$$

$\omega_k > 0$, $\varepsilon > 0$. Аппроксимирующая задача представляет собой нелинейное эллиптическое дифференциальное уравнение с краевым условием. Нелинейность в уравнении непрерывная и зависит от малого параметра. В пределе при стремлении параметра к нулю получается разрывная нелинейность. Отметим, что разрывные нелинейности довольно часто возникают как идеализации непрерывных нелинейностей, имеющих участки быстрого роста по фазовой переменной. При этом удобно считать, что непрерывные нелинейности зависят от малого параметра ε и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получается разрывная нелинейность. В силу [1]–[3] аппроксиматором при $\psi \in [-\varepsilon, 0]$ может быть любая непрерывная на этом отрезке функция $f = f(\psi)$, удовлетворяющая условиям $f(-\varepsilon) = \omega_k$, $f(0) = 0$.

Функция ψ_0 удовлетворяет задаче

$$\Delta\psi_0 = 0, \quad \psi_0|_{\Gamma} = \varphi(s).$$

Из принципа максимума следует, что функция $\psi_0(x)$ положительна в области Ω . Сделав замену $u = \psi - \psi_0$, приходим к следующей задаче:

$$\Delta u = \begin{cases} \omega, & \text{если } u < -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x), \end{cases} \quad u|_{\Gamma} = 0.$$

Имеем

$$-\Delta u = \omega g(x, u(x)), \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где

$$g(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x). \end{cases}$$

Поверхность

$$S = \{(x, u) \in \mathbb{R}^3 : u = -\psi_0(x), x \in \bar{\Omega}\}$$

разбивает область $D = \Omega \times \mathbb{R}$ на непересекающиеся подобласти

$$D_0 = \{(x, u) \in D : u < -\psi_0(x)\}, \quad D_1 = \{(x, u) \in D : u \geq -\psi_0(x)\}.$$

На $\bar{D}_i$, $i = 0, 1$, заданы каратеодориевы функции $g_i(x, u)$, функция $g: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и на D_i совпадает с $g_i(x, u)$, причем для почти всех $x \in \Omega$, если $(x, u) \in S$, то $g(x, u)$ принадлежит отрезку с концами $g_0(x, u)$ и $g_1(x, u)$. Положим $g_0(x, u) = -1$, $g_1(x, u) = 0$.

Краевой задаче (1), (2) сопоставим функционал $J^\omega(u)$, заданный на $H_0^1(\Omega)$, следующим образом:

$$J^\omega(u) = J_1(u) - \omega \int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds,$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_{x_i}^2 dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx \right).$$

В [6] доказано, что существует $\omega_0 > 0$ такое, что для любого $\omega > \omega_0$ выполнено $\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J^\omega(v) < 0$, найдется $u \in H_0^1(\Omega)$ такое, что $J^\omega(u) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J^\omega(v)$ и любое такое u является ненулевым полуправильным решением краевой задачи (1), (2). Таким образом, при ω , превышающих некоторое значение, задача имеет, по крайней мере, одно нетривиальное решение (в силу теорем вложения Соболева решение непрерывно-дифференцируемо). В силу [7] для величины бифуркационного параметра ω_0 , начиная с которого задача на собственные значения (1), (2) разрешима, справедлива следующая оценка сверху:

$$\omega_0 \leq \inf_{\hat{u} \in U} \frac{J_1(\hat{u})}{\int_{\Omega} dx \int_0^{\hat{u}(x)} g(x, s) ds},$$

где

$$U = \left\{ \hat{u} \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} dx \int_0^{\hat{u}(x)} g(x, s) ds > 0 \right\}.$$

Зафиксируем $\omega > \omega_0$, и пусть числовая последовательность (ω_k) , $\omega_k > 0$, сходится к ω . Нелинейность $g(x, u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $(g^k(x, u))$.

Имеем

$$-\Delta u = \omega_k g^k(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где

$$g^k(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\varepsilon - \psi_0(x), \\ \frac{1}{\varepsilon}(u + \psi_0(x)), & \text{если } -\varepsilon - \psi_0(x) \leq u \leq -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x). \end{cases}$$

Проверим, что для задачи Гольдштика выполнены все условия теоремы 1 из [1].

2. Решение задачи. Для искомой задачи Дирихле (1), (2) функция $c(x) \equiv 0$ (коэффициент при $u(x)$ в дифференциальном операторе $-\Delta u = -\sum_{i=1}^2 \partial^2 u / \partial x_i^2$) неотрицательна в Ω . Выполнено условие 1) теоремы 1 из [1].

Для почти всех $x \in \Omega$ выполнена оценка

$$|g_i(x, u)| \leq 1 \quad \text{для всех } u, \quad (x, u) \in \overline{D}_i,$$

где $1 \in L_q(\Omega)$, $q > 2$, $i = 0, 1$, верно равенство $g(x, 0) = 0$ и неравенство $g_1(x, u) \geq g_0(x, u)$, $(x, u) \in S$, справедлива оценка

$$|g^k(x, u)| \leq 1 \quad \text{для всех } u \in \mathbb{R}, \quad \text{где } 1 \in L_q(\Omega), \quad q > 2.$$

Покажем, что выполнено условие существования $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$, для которого

$$\int_{\Omega} dx \int_0^{\hat{u}(x)} g(x, s) ds > 0.$$

Возьмем замкнутое множество $F \subset \Omega$ ненулевой меры такое, что расстояние от F до границы Γ положительно. Тогда существует открытое множество $G \supset F$ такое, что $\overline{G} \subset \Omega$. Пусть $h \in C_\infty(\overline{\Omega})$, равна единице на F , нулю вне G и $0 \leq h(x) \leq 1$ на $G \setminus F$ (такую функцию можно построить [8]). Имеем

$$\int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds = \int_{\{x \in \Omega: u(x) < -\psi_0(x)\}} (-\psi_0(x) - u(x)) dx.$$

Положим $u(x) = \hat{u}(x) = -2\psi_0(x)h(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dx \int_0^{\hat{u}(x)} g(x, s) ds &= \int_{\{x \in \Omega: \hat{u}(x) < -\psi_0(x)\}} (-\psi_0(x) - \hat{u}(x)) dx \\ &= \int_{\{x \in \Omega: h(x) > 1/2\}} \psi_0(x)(2h(x) - 1) dx > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, найдется $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$, для которого

$$\int_{\Omega} dx \int_0^{\hat{u}(x)} g(x, s) ds > 0.$$

Выполняется условие 2) теоремы 1 из [1].

Итак, все условия теоремы 1 из [1] для задачи Гольдштика выполнены. Поэтому последовательность (u_k) решений аппроксимирующих задач (3), (4) является минимизирующей последовательностью для функционала J^ω на $H_0^1(\Omega)$, содержит подпоследовательность (u_{k_l}) , сходящуюся в $C_1(\Omega)$ к полуправильному решению u_0 предельной задачи (1), (2), для которого

$$J^\omega(u_0) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J^\omega(v) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2) dx - \omega \int_{\Omega} dx \int_0^{v(x)} g(x, s) ds \right).$$

Если инфимум J^ω на $H_0^1(\Omega)$ достигается в единственной точке u_0 , то $u_k \rightarrow u_0$ в $C_1(\overline{\Omega})$.

Отметим, что согласно теореме 3 из [9] для любого $k \geq 2$ существует $u_k \in H_0^1(\Omega)$ такое, что

$$J_k(u_k) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J_k(v) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left(J_1(v) - \omega_k \int_{\Omega} dx \int_0^{v(x)} g^k(x, s) ds \right).$$

Причем, любое такое $u_k \in W_q^2(\Omega)$ и является сильным решением соответствующей аппроксимирующей краевой задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. К. Потапов, “Устойчивость основных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью в коэрцитивном случае”, *Изв. РАН. Сер. МММИУ*, **9**:1–2 (2005), 159–165.
- [2] В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, “Аппроксимация краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью”, *Изв. вузов. Матем.*, 2005, № 4, 49–55.

- [3] Д. К. Потапов, “Аппроксимация задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью”, *Дифференц. уравнения*, **43**:7 (2007), 1002–1003.
- [4] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, “Уравнения с разрывными нелинейностями”, *Докл. АН СССР*, **248**:5 (1979), 1056–1059.
- [5] М. А. Гольдштик, “Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости”, *Докл. АН СССР*, **147**:6 (1962), 1310–1313.
- [6] Д. К. Потапов, “Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости”, *Изв. РАН. Сер. МММИУ*, **8**:3–4 (2004), 163–170.
- [7] Д. К. Потапов, “Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями”, *Дифференц. уравнения*, **44**:5 (2008), 715–716.
- [8] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*. Т. 2. *Спектральная теория*, ИЛ, М., 1966.
- [9] В. Н. Павленко, Д. К. Потапов, “О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:4 (2001), 911–919.

Д. К. Потапов

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

Поступило

05.02.2009