Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Явные оценки для асимптотики субэкспоненциальных безгранично делимых функций распределения, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 295–301

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm838>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:53:06

УДК 519.2

ЯВНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ АСИМПТОТИКИ СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. Л. ЯКЫМИВ

В данной заметке впервые получены неулучшаемые по порядку явные оценки для асимптотики на бесконечности широкого класса субэкспоненциальных безгранично делимых распределений.

Библиография: 12 названий.

Асимптотика безгранично делимых функций распределения на бесконечности исследовалась ранее в работах [1]–[8], см. также ссылки в статье [1].

В настоящей заметке впервые приводятся явные неравенства для асимптотики широкого класса безгранично делимых функций распределения на бесконечности. Перейдем к формулировке полученных результатов.

Пусть случайная величина $\tau \geq 0$ имеет безгранично делимое распределение. Это выполнено тогда и только тогда (см. [9, с. 114]), когда справедливо представление

$$Me^{-\lambda\tau} = \exp\left(-\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} q(t) dt\right), \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

где функция $q(t)$ не возрастает при $t \geq 0$, интегрируема на $[0, 1]$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0. \quad (2)$$

Функцию $q(t)$ в представлении (1) называют *спектральной функцией*. Мы будем считать везде далее, что $q(t)$ дифференцируема при $t \geq 0$, $0 < q(0) < \infty$. Положим при $t \geq 0$

$$\begin{aligned} F(t) &= P\{\tau \leq t\}, & T(t) &= 1 - F(t), \\ Q(t) &= q(0) - q(t), & G(t) &= \frac{Q(t)}{q(0)}, & q_1(t) &= -\frac{d}{dt}q(t). \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00721 и грант № 96-15-9602.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$b = \sup_{t \geq 0} \left| \frac{q^2(t)}{q_1(t)} - \int_0^t (q(t-u) - q(t)) \frac{q_1(u)}{q_1(t)} du \right| < \infty, \quad (3)$$

$$c = \sup_{t \geq 0} \int_0^t q_1(t-u) \frac{q_1(u)}{q_1(t)} du < \infty. \quad (4)$$

Тогда при всех $t \geq 0$ справедливо следующее неравенство:

$$|T(t) - q(t)| \leq \frac{b}{a^2} (e^a - 1 - a) q_1(t), \quad (5)$$

где $a = c + q(0)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$K = \sup_{t \geq 0} \int_0^t (q(t-u) - q(t)) \frac{dQ(u)}{q^2(t)} < \infty, \quad (6)$$

$$c_1 = \sup_{t \geq 0} \int_0^t q^2(t-u) \frac{dQ(u)}{q^2(t)} < \infty. \quad (7)$$

Тогда при всех $t \geq 0$ справедливо следующее неравенство:

$$|T(t) - q(t)| \leq \frac{b_1}{a_1^2} (e^{a_1} - 1 - a_1) q^2(t), \quad (8)$$

где $b_1 = 1 + K$, $a_1 = c_1 + q(0)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть при любом $t \geq 0$

$$q(t) = q(0) \exp\left(-\int_0^t \varepsilon(u) du\right), \quad (9)$$

где $\varepsilon(t) \geq 0$ и не возрастает при $t \geq 0$,

$$\varepsilon(t) = t^{-\delta} l(t), \quad t > 0, \quad (10)$$

где $\delta \in [0, 1]$, а функция $l(t)$ медленно меняется на бесконечности, причем при $\delta = 1$ $l(t) \rightarrow \alpha \in (1, \infty)$, $t \rightarrow \infty$. Тогда справедливы неравенства (3)–(5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В предположениях следствия 1 при $t \rightarrow \infty$

$$T(t) = q(t) + O(t^{-\delta} l(t) q(t)).$$

Мы будем говорить, что неравенство $|T(t) - q(t)| \leq f(t)$, $t \geq 0$, неумлучшаемо по порядку, если для произвольного неравенства $|T(t) - q(t)| \leq g(t)$, $t \geq 0$, справедливо соотношение $f(t) = O(g(t))$, $t \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как показывает теорема 2 работы [4], в случае правильно меняющейся $q(t)$ с показателем $-\alpha < -1$ неравенство (5) неумлучшаемо по порядку.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условия следствия 1 обеспечивают конечность математического ожидания τ .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $\delta > 1$ функция, определяемая равенством (9), не является спектральной, так как в этом случае $\int_0^\infty \varepsilon(u) du < \infty$ (см. (2)).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если функция $l(t)$ в следствии 1 удовлетворяет условию

$$l'(t) = o\left(\frac{l(t)}{t}\right), \quad (11)$$

то при $\delta > 0$ $\varepsilon(t)$ будет автоматически монотонна при достаточно больших t . Для всякой медленно меняющейся функции существует эквивалентная ей на бесконечности функция $l(t)$, для которой выполнено (11); это следует из теоремы 1.2 книги [9, с. 10].

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из неравенства (5) следует асимптотика $T(t) \sim q(t)$ при $t \rightarrow \infty$ в случае, когда $q_1(t)/q(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. В этом случае (см. [6]) функции распределения $F(t)$ и $G(t)$ субэкспоненциальны в смысле определения, данного в [10], т.е. отношения

$$\frac{1 - F^{(2*)}(t)}{1 - F(t)} \quad \text{и} \quad \frac{1 - G^{(2*)}(t)}{1 - G(t)}$$

стремятся к 2 при $t \rightarrow \infty$, где $F^{(2*)}$ и $G^{(2*)}(t)$ — соответственно свертки $F(t)$ и $G(t)$ с самими собой.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $q_1(t)$ монотонна и правильно меняется на бесконечности с показателем $-1 - \alpha$, где $\alpha \in [0, 1]$. Тогда выполнены неравенства (6)–(8).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В предположениях следствия 2

$$M\tau = \int_0^\infty q(t) dt = \infty$$

и, как показывает теорема 3 работы [4], неравенство (8) при $\alpha \neq 1/2$ неулучшаемо по порядку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В работе [4, с. 699] показано, что при $t \geq 0$

$$T(t) - q(t) = \sum_{n \geq 2} \frac{r_n(t)}{n!} (-1)^{n+1}, \quad (12)$$

где $r_1(t) = q(t)$ при $t > 0$ и $r_1(0) = 0$, а

$$r_n(t) = \int_0^t r_{n-1}(t-u) dr_1(u) \quad (t \geq 0)$$

при $n \geq 2$. Покажем, что для произвольных $n \geq 2$ и $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$|r_n(t)| \leq ba^{n-2}q_1(t), \quad (13)$$

где постоянные a и b определены в формулировке теоремы 1. При $n = 2$ мы имеем:

$$\begin{aligned} |r_2(t)| &= \left| \int_0^t r_1(t-u) dr_1(u) \right| = \left| \int_0^t q(t-u) dq(u) + q(t)q(0) \right| \\ &= \left| q^2(t) - \int_0^t (q(t-u) - q(t)) q_1(u) du \right| \leq b q_1(t) \end{aligned}$$

в силу (3). Если же (13) справедливо для некоторого $n \geq 2$, то

$$\begin{aligned} |r_{n+1}(t)| &= \left| - \int_0^t r_n(t-u) q_1(u) du + r_n(t) q(0) \right| \leq \int_0^t |r_n(t-u)| q_1(u) du + |r_n(t)| q(0) \\ &\leq b a^{n-2} \left(\int_0^t q_1(t-u) q_1(u) du + q(0) \right) \leq b a^{n-1} q_1(t) \end{aligned}$$

согласно (4). Таким образом, неравенство (13) доказано. Из (13) и (12) следует, что при $t \geq 0$

$$|T(t) - q(t)| \leq \sum_{n \geq 2} \frac{b a^{n-2}}{n!} q_1(t) = \frac{b}{a^2} (e^a - 1 - a) q_1(t).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 аналогично теореме 1. Как нетрудно видеть, для справедливости теоремы 2 в отличие от теоремы 1 нет необходимости требовать существования производной у спектральной функции $q(t)$.

Доказательство следствия 1. Согласно (9) при $t \geq 0$

$$q_1(t) = \varepsilon(t) q(t). \quad (14)$$

Поэтому при $c_2 = (1 - \delta)^{-1}$ и $\delta < 1$

$$\begin{aligned} \frac{q^2(t)}{q_1(t)} &= q(0) \exp \frac{\left(- \int_0^t \varepsilon(u) du \right)}{\varepsilon(t)} \\ &= q(0) \exp \left(- (c_2 + o(1)) t^{1-\delta} l(t) + \ln \frac{t^\delta}{l(t)} \right) = O(1), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Стало быть, при $\delta \in [0, 1)$

$$\sup_{t \geq 0} \frac{q^2(t)}{q_1(t)} < \infty. \quad (15)$$

Далее мы покажем, что (15) выполнено и при $\delta = 1$. Согласно лемме 2 из работы [11] можно подобрать такую функцию $\varphi(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$), $\varphi(t) \in [0, t]$ при $t \geq 0$, что $\varphi(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$ и

$$q(t - \varphi(t)) \sim q(t) \quad (t \in \infty). \quad (16)$$

В силу монотонности $q_1(t)$ мы имеем

$$\int_0^t (q(t-u) - q(t)) q_1(u) du \leq \int_0^t u q_1(u) q_1(t-u) du. \quad (17)$$

Так как $M\tau < \infty$, то

$$\int_0^{t-\varphi(t)} u q_1(t-u) q_1(u) du \leq q_1(\varphi(t)) \int_0^t u q_1(u) du = o(1)$$

при $t \rightarrow \infty$.

Далее, по этой же причине в силу (14) и (16)

$$\int_{t-\varphi(t)}^t u q_1(u) q_1(t-u) du \sim t q(t) \varepsilon(t) \int_0^{\varphi(t)} q_1(v) dv = o(1)$$

при $t \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t u q_1(u) q_1(t-u) \frac{du}{q_1(t)} < \infty. \quad (18)$$

Из (15), (17) и (18) следует (3). Соотношение (4) является простым следствием (18). Рассмотрим теперь случай $\delta = 1$. В этом случае

$$q(t) = q(0) \exp\left(-\int_0^t \frac{l(u)}{u} du\right)$$

и

$$q_1(t) = \frac{l(t)}{t} q(t) \quad (t \geq 0).$$

Поэтому

$$\frac{q^2(t)}{q_1(t)} = \frac{t q(t)}{l(t)} = o(1)$$

при $t \rightarrow \infty$, так как $M\tau < \infty$ и $l(t) \rightarrow \alpha > 0$.

Дальнейшее является дословным повторением рассуждений при $\delta < 1$. Следствие 1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Из предположений следствия 2 мы выводим (см. [9, с. 82] или [12]), что $q(t)$ правильно меняется с показателем $-\alpha$, причем при $t \rightarrow \infty$

$$q_1(t) = \alpha \frac{q(t)}{t} + o\left(\frac{q(t)}{t}\right). \quad (19)$$

Предположим, что $\alpha > 0$. В силу (19)

$$\begin{aligned} \int_0^{t/2} (q(t-u) - q(t)) q_1(u) du &\leq \int_0^{t/2} u q_1(t-u) q_1(u) du \leq q_1\left(\frac{t}{2}\right) \int_0^t u q_1(u) du \\ &\sim 2^{1+\alpha} q_1(t) \frac{1}{1-\alpha} t^2 q_1(t) \sim \frac{2^{1+\alpha} \alpha^2}{1-\alpha} q^2(t), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее,

$$\int_{t/2}^t (q(t-u) - q(t)) q_1(u) du \leq q\left(\frac{t}{2}\right) \int_{t/2}^t q_1(u) du \leq q^2\left(\frac{t}{2}\right) \sim 2^{2\alpha} q^2(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Стало быть, (6) выполнено. Заметим, что

$$\int_0^{t/2} q^2(t-u)q_1(u) du \leq q^2\left(\frac{t}{2}\right)q(0) \sim 2^{2\alpha}q^2(t)q(0) = O(q^2(t)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Оценим интеграл

$$I = \int_{t/2}^t q^2(t-u)q_1(u) du \leq q_1\left(\frac{t}{2}\right) \int_0^t q^2(v) dv \sim 2^{1+\alpha} \alpha \frac{q(t)}{t} \int_0^t q_2(v) dv \quad (21)$$

при $t \rightarrow \infty$. В случае, когда $\alpha < 1/2$,

$$\frac{I}{q^2(t)} = O\left(\frac{tq^2(t)}{tq(t)}\right) = o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Если $\alpha > 1/2$, то

$$\int_0^\infty q^2(v) dv < \infty$$

и в силу (21)

$$\frac{I}{q^2(t)} = O\left(\frac{1}{tq(t)}\right) = o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Если $\alpha = 1/2$, то функция $L(t) = \int_0^t q^2(v) dv$ медленно меняется на бесконечности, и

$$\frac{I}{q^2(t)} = O\left(\frac{L(t)}{tq(t)}\right) = o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Стало быть,

$$I = o(q^2(t)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Из (20) и (22) следует (7). В случае, когда $\alpha > 0$, следствие 2 доказано. Доказательство в случае $\alpha = 0$ аналогично.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Круглов В. М., Антонов С. Н. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Теория вероятн. и ее прим. 1982. Т. 27. № 4. С. 625–642.
- [2] Круглов В. М., Антонов С. Н. Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Теория вероятн. и ее прим. 1984. Т. 29. № 4. С. 735–742.
- [3] Сгибнев М. С. Асимптотика безгранично делимых распределений в $\mathbb{R}$ // Сиб. матем. ж. 1990. Т. 31. № 1. С. 135–140.
- [4] Якимив А. Л. Асимптотическое поведение одного класса безгранично делимых распределений // Теория вероятн. и ее прим. 1987. Т. 32. № 4. С. 691–702.
- [5] Якимив А. Л. Асимптотика плотности безгранично делимого распределения на бесконечности // Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: ВНИИСИ, 1990. С. 123–131.
- [6] Embrechts P., Goldie Ch. M., Veraverbeke N. Subexponentiality and infinite divisibility // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 1979. V. 49. P. 333–347.
- [7] Grubel R. Über grenz teilbare Verteilungen // Arch. Math. 1983. V. 41. № 1. P. 80–88.
- [8] Omey E. Infinite divisibility and random sums of random vectors // Yokohama Math. J. 1985. V. 33. № 1–2. P. 39–48.
- [9] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
- [10] Чистяков В. П. Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее применение к ветвящимся случайным процессам // Теор. вероятн. и ее прим. 1964. Т. 9. № 4. С. 710–718.
- [11] Якимив А. Л. Достаточные условия субэкспоненциальности свертки двух распределений // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 778–781.
- [12] de Haan L. Regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes // Math. Centre Tracts. 1970. V. 32.