Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Я. Азизов, В. К. Кириакиди, Выпуклость и слабая замкнутость образа операторных шаров при дробно-линейном преобразовании, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 302–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm839>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 11:51:43

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ВЫПУКЛОСТЬ И СЛАБАЯ ЗАМКНУТОСТЬ ОБРАЗА ОПЕРАТОРНЫХ ШАРОВ ПРИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

Т.Я. Азизов, В.К. Кириакиди

1. Пусть

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^- \quad (1)$$

– гильбертово пространство и $L(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-)$ – множество всех ограниченных всюду определенных на $\mathcal{H}^+$ операторов $S: \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$. Рассмотрим операторный шар

$$\mathfrak{K}_{S_0}^\alpha = \{S \in L(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-) \mid \|S - S_0\| \leq \alpha\}, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

Если

$$\mathfrak{K} = \{K \in L(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-) \mid \|K\| \leq 1\}, \quad (3)$$

то (2) можно переписать в эквивалентной форме

$$\mathfrak{K}_{S_0}^\alpha = \{S \mid S = S_0 + \alpha K, \|K\| \leq 1\}. \quad (4)$$

Пусть $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ имеет следующее блочно-матричное представление:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

Если операторы $T_{11} + T_{12}S$ непрерывно обратимы при всех $S \in L(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-)$, то имеет смысл дробно-линейная функция F_T на шаре (2)

$$F_T(S) = (T_{21} + T_{22}S)(T_{11} + T_{12}S)^{-1}.$$

Так как множество значений этой функции является ограниченным, существует такая постоянная $c > 0$, что $cF_T(S) \in \mathfrak{K}$ при всех $S \in L(\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-)$. Функцию $cF_T(S)$ с учетом (4) можно переписать как дробно-линейное преобразование $F_V: \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$ шара (3)

$$F_V = (V_{21} + V_{22}K)(V_{11} + V_{12}K)^{-1}, \quad (5)$$

где $V_{11} = T_{11} + T_{12}S_0$, $V_{12} = \alpha T_{12}K$, $V_{21} = c(T_{21} + T_{22}S_0)$, $V_{22} = \alpha c T_{22}K$.

Пусть K_0 – линейный оператор, заданный на подпространстве $\text{dom } K_0 \subset \mathcal{H}^+$ и $\|K_0\| \leq 1$, и пусть

$$\mathfrak{K}(K_0) = \{K \in \mathfrak{K} \mid K_0 \subset K\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{K}(K_0) = \mathfrak{K}$ при $\text{dom } K_0 = \{0\}$.

В работе [1] доказано, что образ функции F_T , или, что то же, преобразования F_V , слабо замкнут и выпукл. Целью этой статьи является доказательство слабой замкнутости и выпуклости множества $F_V(\mathfrak{K}(K_0))$ как следствия общего результата о представлении F_V . При этом будет использован другой, нежели в [1] метод, опирающийся на теорию пространств с индефинитной метрикой.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 99-01-00391.

2. Напомним некоторые определения и результаты теории пространств с индефинитной метрикой. Более подробно, в том числе и вопросы приоритета, см. в [2]. Рассмотрим разложение (1) и пусть $P^\pm$ – ортопроекторы на $\mathcal{H}^\pm$. Введем в $\mathcal{H}$ индефинитную метрику с помощью эрмитовой формы $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$, где $J = P^+ - P^-$. Подпространство $\mathcal{L}$ называется *неотрицательным*, если $[x, x] \geq 0$, $x \in \mathcal{L}$, и *равномерно положительным*, если $[\cdot, \cdot]$ порождает в $\mathcal{L}$ норму, эквивалентную исходной. Естественным образом вводится понятие максимального неотрицательного и максимального равномерно положительного подпространств. Символом $\mathfrak{M}^+$ обозначим множество максимальных неотрицательных подпространств. Между неотрицательными подпространствами $\mathcal{L}$ и операторами $A: \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$, $\|A\| \leq 1$, существует взаимно однозначное соответствие

$$A = P^-(P^+|_{\mathcal{L}})^{-1}, \quad (6)$$

$$\mathcal{L} = \{x = x^+ + Ax^+ \mid x^+ \in P^+ \operatorname{dom} A\}. \quad (7)$$

В этом случае A называют *угловым оператором* подпространства $\mathcal{L}$. Максимальность $\mathcal{L}$ равносильна тому, что его угловой оператор A задан на всем $\mathcal{H}^+$, т.е. $A \in \mathfrak{K}$. Подпространство $\mathcal{L}$ будет равномерно положительным тогда и только тогда, когда $\|A\| < 1$.

Оператор $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $\operatorname{dom} T = \mathcal{H}$, называется *плюс-оператором*, если он переводит неотрицательные векторы в неотрицательные. В этом случае $\mu_+(T) := \inf_{[x, x]=1} [Tx, Tx] \geq 0$. При $\mu_+(T) > 0$ оператор T называют строгим плюс-оператором, в противном случае – нестрогим. Если одновременно с T строгим плюс-оператором будет и его сопряженный T^* , то T называют *бистрогим плюс-оператором*. Строгий плюс-оператор является бистрогим тогда и только тогда, когда он отображает хотя бы одно подпространство $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$ на подпространство $T\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, а тогда $T\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{M}^+$ (М. Крейн и Ю. Шмудьян, см. [2, с. 151]). В частности, образами равномерно положительных подпространств будут равномерно положительные подпространства. Если T – плюс-оператор и $\mathcal{L}, T\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, то угловые операторы P и Q этих подпространств связаны соотношением $Q = F_T(P)$.

Всюду определенный оператор U называют *J-унитарным*, если $U\mathcal{H} = \mathcal{H}$ и $[Ux, Uy] = [x, y]$, $x, y \in \mathcal{H}$. В этом случае $F_U(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}$; более того, если $\mathcal{L}_0$ – неотрицательное подпространство с угловым оператором K_0 , то

$$F_U(\mathfrak{K}(K_0)) = \mathfrak{K}(L_0). \quad (8)$$

где L_0 – угловой оператор подпространства $U\mathcal{L}_0$.

3. Ключевым моментом доказательства основного результата является следующая лемма (ср. [3]).

ЛЕММА 1. Пусть V – бистрогий плюс-оператор. Тогда он допускает представление $V = TU$, где T – бистрогий плюс-оператор, для которого $\mathcal{H}^-$ – инвариантное подпространство, и U – унитарный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению V – бистрогий плюс-оператор; следовательно, V^* – строгий плюс-оператор. Пусть V^* имеет следующее блочно-матричное представление:

$$V^* = \begin{bmatrix} (V^*)_{11} & (V^*)_{12} \\ (V^*)_{21} & (V^*)_{22} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что $K_1 := (V^*)_{21}^{-1}(V^*)_{11}$ – угловой оператор подпространства $V^*\mathcal{H}^+$, и потому, в частности, $\|K_1\| < 1$. Введем в рассмотрение оператор

$$W := \begin{bmatrix} (I - K_1^*K_1)^{-1/2} & -K_1^*(I - K_1K_1^*)^{-1/2} \\ -K_1(I - K_1^*K_1)^{-1/2} & (I - K_1K_1^*)^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что W – J -унитарный оператор, отображающий $V^*\mathcal{H}^+$ на $\mathcal{H}^+$. Следовательно, $T^* := WV^*$ – бистрогий плюс-оператор, для которого $\mathcal{H}^+$ – инвариантное подпространство. Отсюда $T\mathcal{H}^- \subset \mathcal{H}^-$, и потому $V = TU$ с $U = W^{*-1}$ будет искомым представлением V .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ задает дробно-линейное преобразование F_V шара $\mathfrak{K}$. Тогда $F_V(\mathfrak{K}(K_0))$ – выпуклое и замкнутое в слабой операторной топологии множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем, что V – плюс-оператор. Действительно, пусть $[x, x] \geq 0$. Тогда существует максимальное неотрицательное подпространство $L \in \mathfrak{M}^+$, содержащее вектор x . Пусть K – его угловой оператор. Включение $F_V(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K}$ влечет принадлежность вектора Vx подпространству $V\mathcal{L} \in \mathfrak{M}^+$, а потому Vx – неотрицательный вектор, т.е. V – плюс-оператор. Теперь рассмотрим два случая.

а) Пусть V – нестрогий плюс-оператор ($\mu_+(V) = 0$). Областью значений нестроого плюс-оператора является неотрицательный идеал. Следовательно, образ F_V – одна точка. Поэтому и $F_V(\mathfrak{K}(K_0))$ та же одна точка, а потому это множество выпукло и замкнуто в слабой операторной топологии.

б) Пусть V – строгий плюс-оператор ($\mu_+(V) > 0$). Так как он порождает дробно-линейное преобразование шара $\mathfrak{K}$, то он отображает $\mathfrak{M}^+$ в $\mathfrak{M}^+$. Следовательно, V – быстрый плюс-оператор. По лемме 1 существует представление $V = TU$, где T – быстрый плюс-оператор с $T\mathcal{H}^- \subset \mathcal{H}^-$, а U – J -унитарный оператор. Поскольку $F_V(K) = F_T(F_U(K))$ при $K \in \mathfrak{K}$ и согласно (8) имеем $F_U(\mathfrak{K}(K_0)) = \mathfrak{K}(L_0)$, достаточно проверить, что F_T отображает выпуклое замкнутое в слабой операторной топологии множество на множество с этими же свойствами. Включение $T\mathcal{H}^- \subset \mathcal{H}^-$ означает, что в блочно-матричном представлении оператора T компонента $T_{12} = 0$, т.е. F_T – аффинная функция:

$$F_T(K) = (T_{21} + T_{22}K)V_{11}^{-1}, \quad K \in \mathfrak{K}. \quad (9)$$

Отсюда немедленно следует, что F_T отображает выпуклое множество в выпуклое, а из непрерывности этой функции в слабой операторной топологии получаем, что она отображает замкнутое в этой топологии множество в замкнутое. В частности, $F_T(\mathfrak{K}(L_0))$, а с ним и $F_V(\mathfrak{K}(K_0))$ – выпуклое и замкнутое в слабой операторной топологии множество.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{K}$. Тогда множества $F_V(\mathfrak{S})$ и $F_U(\mathfrak{S})$ – выпуклы или замкнуты в слабой операторной топологии только одновременно. В частности, откуда имеем (см. [1]), что при дробно-линейном преобразовании образы шара $\mathfrak{K}$ и его внутренности – это выпуклые множества, а образ всего шара к тому же и замкнут в слабой операторной топологии. Если в условиях теоремы $\|K_0\| < 1$ и $\mathfrak{K}'(K_0) := \{K \in \mathfrak{K}(K_0) \mid \|K\| < 1\}$, то $F_V(\mathfrak{K}'(K_0))$ – выпуклое множество.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khatskevich V., Shulman V. // Studia Math. 1995. V. 116. №2. P. 189–195.
2. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
3. Азизов Т. Я. // Укр. матем. ж. 1989. Т. 41. №7.