Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Арабаджян, Об интегральном уравнении Винера–Хопфа в закритическом случае, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 11–19

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 07:21:36

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВИНЕРА–ХОПФА В ЗАКРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Л. Г. Арабаджян

Рассматривается скалярное однородное уравнение

$$S(x) = \int_0^\infty K(x-t)S(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, \infty), \quad (1)$$

с симметричным ядром $K: K(-x) = K(x)$, $x \in \mathbb{R}_1$, удовлетворяющим условиям

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C^{(2)}(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^\infty K(t) dt > \frac{1}{2}, \quad (2)$$

$K' \leq 0$ и $0 \leq K'' \downarrow$ на $\mathbb{R}^+$. Доказывается существование вещественного решения S уравнения (1)–(2) с асимптотическим поведением $S(x) = O(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Библиография: 17 названий.

Введение. 1. Начиная с основополагающей работы [1], теория интегральных уравнений типа

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt, \quad K \in L_1(-\infty, \infty), \quad (1)$$

где f – искомая функция, интенсивно развивалась, в основном, на основе изучения свойств символа $\omega(s)$ этих уравнений:

$$\omega(s) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)e^{ist} dt, \quad s \in \mathbb{R}_1 \equiv (-\infty, \infty).$$

Глубокое исследование уравнений вида (1) и систем таких уравнений проведено в работах [2], [3], где получено необходимое и достаточное условие нетеровости этих уравнений:

$$\omega(s) \neq 0 \quad \text{при } s \in \mathbb{R}_1. \quad (2)$$

При нарушении условия (2) соответствующий интегральный оператор

$$(\Lambda f)(x) = f(x) - \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, \infty),$$

действующий в одном из пространств $L_p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p \leq \infty$, $C(\mathbb{R}^+)$, не будет ни Φ_{+-} , ни Φ_- -оператором (см. [4, с. 108], а также [5, с. 76]).

Многие задачи математической физики, однако, приводятся к интегральным уравнениям типа (1), для которых условие (2) часто не выполняется. К таким задачам относятся, в частности, классическая проблема Милна в теории переноса излучения (см., например, [6], [7]), некоторые задачи теории очередей [8] и газовой динамики [9]. Указанные задачи сводятся к диссипативным и консервативным уравнениям Винера–Хопфа, т.е. уравнениям (1) с вещественными ядрами, удовлетворяющими условиям

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}_1), \quad \mu \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt \leq 1. \quad (3)$$

(Отметим, что в случае $\mu = 1$ для символа таких уравнений имеет место равенство $\omega(0) = 0$.)

Дальнейшее развитие теории уравнений (1) происходило в разных направлениях. Одно из направлений есть исследования вопросов разрешимости уравнений вида (1), в тех или иных функциональных пространствах, в зависимости от порядка нулей символа $\omega(s)$ (см. [4]). Принципиально иной подход для изучения уравнений вида (1) был развит в работах [10], [11], где на основе вольтерровской факторизации интегрального оператора и привлечения нелинейных функциональных уравнений были исследованы вопросы разрешимости и построения решений уравнений вида (1) в диссипативном ($\mu < 1$) и консервативном ($\mu = 1$) случаях.

2. Рассмотрим уравнение (1) с произвольным вещественным ядром $K \in L_1(\mathbb{R}_1)$, представив это уравнение в операторной форме:

$$\Lambda f = g \quad \text{или} \quad (\mathcal{J} - \mathcal{K})f = g. \quad (4)$$

Здесь $\mathcal{J}$ – единичный оператор, а $\mathcal{K}$ – интегральный оператор Винера–Хопфа.

Пусть $\Omega^\mp$ – пространства вольтерровых операторов $\mathcal{V}_\pm$ вида

$$(\mathcal{V}_+ f)(x) = \int_0^x V_+(x-t)f(t) dt, \quad (\mathcal{V}_- f)(x) = \int_0^\infty V_-(x-t)f(t) dt,$$

где $V_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+)$, действующих в $E(\mathbb{R}^+)$. (Здесь и далее через $E(\mathbb{R}^+)$ обозначается одно из пространств $L_p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p \leq \infty$, $C(\mathbb{R}^+)$.) Рассмотрим факторизацию

$$\mathcal{J} - \mathcal{K} = (\mathcal{J} - \mathcal{V}_-)(\mathcal{J} - \mathcal{V}_+), \quad (5)$$

где $\mathcal{V}_\pm \in \Omega^\pm$. Равенство (5) равносильно следующей нелинейной системе – уравнениям Енгигарьяна (см. [10]):

$$V_\pm(x) = K(\pm x) + \int_0^\infty V_\mp(t)V_\pm(x+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (6)$$

Для четных ядер K (симметрический случай) система (6) обращается в уравнение

$$V(x) = K(x) + \int_0^\infty V(t)V(x+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (7)$$

(В этом случае для решения (V_+, V_-) предыдущей системы имеем $V_{\pm} = V$.)

В [10] была доказана, в частности, разрешимость системы (6), уравнения (7) и, следовательно, существование факторизации (5) при условиях (3). Так, если через $\dot{V}$ обозначить решение уравнения (7) при $K = \dot{K}$, удовлетворяющее условиям

$$0 \leq \dot{K} \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^{\infty} \dot{K}(t) dt = \frac{1}{2} \quad (\text{условие консервативности}), \quad (8)$$

$$\dot{V}(x) = \dot{K}(x) + \int_0^{\infty} \dot{V}(t) \dot{V}(x+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (9)$$

то из результатов работы [10] имеем

$$0 \leq \dot{V} \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^{\infty} \dot{V}(t) dt = 1, \quad (10)$$

а при дополнительном условии

$$\int_0^{\infty} t^2 \dot{K}(t) dt < +\infty \quad \left(\text{тогда и} \quad \int_0^{\infty} t \dot{K}(t) dt < +\infty \right) \quad (11)$$

имеет место неравенство $\int_0^{\infty} t \dot{V}(t) dt < +\infty$ (см. [11]), что равносильно включению $\Psi \in L_1(\mathbb{R}^+)$, где $\Psi(x) = \int_x^{\infty} \dot{V}(t) dt$.

Ниже будет изучена возможность факторизации (5) в закритическом симметрическом случае:

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}_1), \quad \mu \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt > 1 \quad (\text{закритический случай}), \quad (12)$$

$$K(-x) = K(x) \quad \text{для} \quad \forall x \in \mathbb{R}_1. \quad (13)$$

3. Уравнению (1) в случае, когда ядро $K \in L_1(\mathbb{R}_1)$ представлено в виде суперпозиции экспонент

$$K_{\pm}(x) \stackrel{\text{def}}{=} K(\pm x) = \int_a^b e^{-xp} d\sigma_{\pm}(p), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad [a, b] \subset [0, \infty), \quad (14)$$

где $\sigma_{\pm}$ – неубывающие непрерывные слева функции на $[a, b]$, посвящено большое количество теоретических и прикладных исследований (см., например, [6], [7], [9]–[13]). В этих исследованиях, за некоторыми исключениями, изучалось уравнение (1), (14) при $\mu \leq 1$ и $\sigma_{\pm} \in C[a, b]$.

Именно, такие уравнения имеют наиболее важные применения в теории переноса и в кинетической теории газов (см. [7], [9]).

Следует отметить, что представление (14) равнозначно вполне монотонности (на $\mathbb{R}^+$) функций $K_{\pm}$ из $L_1(\mathbb{R}^+)$, т.е. бесконечной дифференцируемости $K_{\pm}$ и выполнению неравенств $(-1)^n \cdot K_{\pm}^{(n)}(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^+$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (см. [14, с. 255]).

Уравнению (1), (14) в закритическом случае (12) были посвящены работы [12], [13], [15]. В [12] с использованием теории R -функций доказана нетривиальная разрешимость этого уравнения при дополнительном условии $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot K(t) dt < +\infty$.

Задача факторизации интегрального оператора типа свертки с ядром вида (14) в закритическом случае была всесторонне изучена в работе [13], где на основе этой факторизации были построены вещественные решения как однородного, так и неоднородного закритического уравнения Винера–Хопфа с ядром (14). Вопросы разрешимости закритического уравнения (1), когда норма ядра K близка к единице, изучались в работе [15].

1. О факторизации оператора Винера–Хопфа в закритическом случае.

Рассмотрим уравнение (7) с произвольной функцией K из $L_1(\mathbb{R}^+)$ и консервативное уравнение (8), (9).

ЛЕММА 1. Пусть функция $\dot{K}$ удовлетворяет условиям (8) и (11), а функции K и V определяются посредством равенств

$$K(x) = \dot{K}(x) - \alpha^2 \cdot \int_x^\infty ds \int_s^\infty \dot{K}(t) dt, \quad V(x) = \dot{V}(x) + \alpha \cdot \int_x^\infty \dot{V}(t) dt, \quad (15)$$

$x \in \mathbb{R}^+$, где α – произвольное комплексное число, а $\dot{V}$ – соответствующее решение уравнения (9). Тогда для этих функций справедливо равенство (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрирование равенства (9) в пределах от $x > 0$ до $+\infty$ с использованием теоремы Фубини (см. [16, с. 317]) дает соотношение

$$\int_x^\infty \dot{V}(t) dt = \int_x^\infty \dot{K}(t) dt + \int_0^\infty \dot{V}(s) ds \int_{x+s}^\infty \dot{V}(t) dt,$$

которое можно представить в виде

$$\int_0^\infty \dot{V}(x+t) dt \int_t^\infty \dot{V}(s) ds = \int_x^\infty \dot{K}(t) dt.$$

Умножив последнее равенство на произвольное комплексное число α и сложив с (9), получаем

$$\dot{V}(x) = \left(\dot{K}(x) - \alpha \cdot \int_x^\infty \dot{K}(t) dt \right) + \int_0^\infty V(t) \dot{V}(x+t) dt, \quad (16)$$

где функция V определена вторым равенством в (15). Из (16) следует

$$\int_x^\infty \dot{V}(t) dt = \left(\int_x^\infty \dot{K}(t) dt - \alpha \int_x^\infty dt \int_t^\infty \dot{K}(s) ds \right) + \int_0^\infty V(t) dt \int_{x+t}^\infty \dot{V}(s) ds.$$

Умножив последнее равенство на α и сложив с (16), приходим к равенству (7).

При чисто мнимом $\alpha: \alpha = i\omega$ равенства (15) принимают вид

$$K(x) = \dot{K}(x) + \omega^2 \cdot \int_x^\infty dt \int_t^\infty \dot{K}(s) ds, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (17)$$

и

$$V(x) = \dot{V}(x) + i\omega \cdot \int_x^\infty \dot{V}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (18)$$

ЛЕММА 2. Пусть K – функция, удовлетворяющая условиям

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C^{(1)}(\mathbb{R}^+), \quad K^{(1)} \leq 0 \quad \text{на } \mathbb{R}^+, \quad (19)$$

а $\omega \in \mathbb{R}^+$. Тогда функция $\dot{K}$ (необязательно консервативная), определяемая равенством

$$\dot{K}(x) = K(x) - \omega \cdot \int_0^\infty K(x+t) \sin \omega t dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (20)$$

принадлежит $L_1(\mathbb{R}^+)$, причем $\int_0^\infty t \dot{K}(t) dt < +\infty$ и удовлетворяет уравнению (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условий (19) имеет место

$$K(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = 0.$$

Интегрируя по частям интеграл в правой части равенства (20) и используя равенство $K(+\infty) = 0$, получаем

$$\dot{K}(x) = - \int_0^\infty K^{(1)}(x+t) \cos \omega t dt. \quad (21)$$

Последний интеграл представляет суммируемую на $\mathbb{R}^+$ функцию от x , ибо с учетом $K(+\infty) = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \left| \int_0^\infty K^{(1)}(x+t) \cos \omega t dt \right| &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |K^{(1)}(x+t)| dx dt \\ &= - \int_0^\infty \int_0^\infty K^{(1)}(x+t) dx dt = \int_0^\infty K(x) dx < +\infty. \end{aligned}$$

Интегрирование равенства (21) с использованием теоремы Фубини дает

$$\int_x^\infty \dot{K}(t) dt = \int_0^\infty K(x+t) \cos \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \cdot \int_0^\infty K^{(1)}(x+t) \sin \omega t dt. \quad (22)$$

Аналогичными соображениями доказывается, что функция $\chi(x) = \int_x^\infty \dot{K}(t) dt$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}^+)$, откуда следует конечность интеграла $\int_0^\infty t \dot{K}(t) dt$.

Из (22) получаем также

$$\int_x^\infty dt \int_t^\infty \dot{K}(s) ds = \frac{1}{\omega} \cdot \int_0^\infty K(x+t) \sin \omega t dt.$$

Умножив последнее равенство на ω^2 и сложив с (20), приходим к соотношению (17).

Рассмотрим теперь задачу факторизации (5) в закритическом симметрическом случае (12), (13). Эта задача равносильна разрешимости уравнения (7) при условиях

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^\infty K(t) dt > \frac{1}{2}. \quad (23)$$

Дополнительно потребуем, чтобы ядро K удовлетворяло условиям

$$K \in C^{(2)}(\mathbb{R}^+), \quad K^{(1)} \leq 0, \quad K^{(2)} \geq 0, \quad K^{(2)} \downarrow \quad \text{на } \mathbb{R}^+. \quad (24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко убедиться, что функции, допускающие представление (14) удовлетворяют условиям (24).

Очевидно, что для функции K при выполнении условий (23), (24) имеют место соотношения (19). Поэтому справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Если K – произвольная функция, удовлетворяющая условиям (23), (24), то функция $\dot{K}$ из (20) является решением уравнения (17).

ТЕОРЕМА 1. Пусть действительная функция K удовлетворяет условиям (23), (24), а число $\omega > 0$ определяется из (характеристического) уравнения

$$\int_0^\infty K(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{2}. \quad (25)$$

Тогда

- (а) определяемая равенством (20) функция $\dot{K}$ будет обладать свойствами (8) и (11);
- (в) уравнение (7) при данном K обладает комплексным решением вида (18), где вещественная функция $\dot{V}$ есть решение консервативного уравнения (9) с функцией $\dot{K}$, определяемой равенством (20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых покажем, что при условиях (23) уравнение (25) имеет положительное решение $\omega > 0$. Действительно, функция $F(\omega)$, определяемая левой частью равенства (25)

$$F(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty K(t) \cos \omega t dt,$$

представляет непрерывную функцию параметра ω на $\mathbb{R}^+$, причем $F(0) > 1/2$ и $F(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow +\infty$. Поэтому существует положительное решение ω уравнения (25). В последующих рассуждениях под ω будем подразумевать положительный корень уравнения (25).

Теперь покажем, что при условиях (23)–(25) функция $\dot{K}$, определяемая равенством (20), является консервативной (т.е. обладает свойствами (8)). Действительно, при $K \in L_1(\mathbb{R}^+)$ имеем $\dot{K} \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Из условий $K^{(1)} \leq 0$ и $K^{(2)} \geq 0$ на $\mathbb{R}^+$ следует существование предела $K^{(1)}(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} K^{(1)}(x)$, причем $K^{(1)}(+\infty) = 0$, ибо $K(+\infty) = 0$ (см. доказательство леммы 2) и

$$\int_\tau^\infty |K^{(1)}(t)| dt = - \int_\tau^\infty K^{(1)}(t) dt = K(\tau) < +\infty$$

при $\tau > 0$.

Как было отмечено выше, при выполнении условий (23) и (24) имеют место соотношения (19) и, следовательно, справедливо равенство (21). Интегрируя это равенство по частям и учитывая, что $K^{(1)}(+\infty) = 0$, получаем

$$\dot{K}(x) = \frac{1}{\omega} \cdot \int_0^\infty K^{(2)}(x+t) \sin \omega t dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (26)$$

Поскольку $0 \leq K^{(2)} \downarrow$ на $\mathbb{R}^+$, для любого $x \in \mathbb{R}^+$ имеет место неравенство $\dot{K}(x) \geq 0$ (см. [17, с. 544]). Интегрированием равенства (21) в силу (25) получаем

$$\int_0^\infty \dot{K}(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Теперь покажем, что при выполнении условий (23), (24) функция $\dot{K}$ из (20) обладает конечным вторым моментом. Согласно лемме 2 для функций $\dot{K}$ и K из (20) имеет место соотношение (17), откуда с учетом неравенства $\dot{K} \geq 0$ получаем

$$\int_x^\infty dt \int_t^\infty \dot{K}(s) ds \leq \frac{1}{\omega^2} K(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

что совместно с условием $K \in L_1(\mathbb{R}^+)$ дает $\int_0^\infty t^2 \dot{K}(t) dt < +\infty$.

Итак, при выполнении условий (23)–(25) функция $\dot{K}$, определяемая равенством (20), удовлетворяет уравнению (17) и условиям (8) и (11). Пусть $\dot{V}$ – решение уравнения (9), соответствующее построенной посредством равенства (20) функции $\dot{K}$. Тогда функция V из (18) согласно лемме 1 будет удовлетворять уравнению (7).

СЛЕДСТВИЕ. Для оператора Винера–Хопфа K с симметрическим (т.е. удовлетворяющим условию (13)) ядром K при условиях (23), (24) существует факторизация (5), где ядра операторов $\mathcal{V}_\pm$ совпадают: $V_\pm = V$, причем V – комплекснозначная суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция.

В доказательстве нуждается лишь последнее утверждение: достаточно показать, что $\Psi \in L_1(\mathbb{R}^+)$, где $\Psi(x) = \int_x^\infty \dot{V}(t) dt$. По теореме 1 $\int_0^\infty t^2 \dot{K}(t) dt < +\infty$. Тогда согласно результатам работы [11] имеет место неравенство $\int_0^\infty t \dot{V}(t) dt < +\infty$, что равносильно включению $\Psi \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

2. Однородное уравнение в закритическом случае. Рассмотрим однородное уравнение

$$S(x) = \int_0^\infty K(x-t)S(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (27)$$

где ядро K – четная на $\mathbb{R}_1$ функция, удовлетворяющая условиям (23), (24). Факторизация (5) сводит это уравнение к следующим двум уравнениям:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty V(t-x)\varphi(t) dt, \quad (28)$$

$$S(x) = \varphi(x) + \int_0^x V(x-t)S(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (29)$$

Теорема 1 указывает на следующий путь нахождения ядра V этих уравнений через ядро K исходного уравнения (27): после определения из уравнения (25) параметра $\omega > 0$ посредством (20) определяется консервативное ядро $\dot{K}$, что порождает функцию $\dot{V}$ – решение уравнения (9) и, наконец, равенством (18) определяется функция V . Учитывая указанную связь между функциями V и $\dot{V}$, а также соотношения (10), легко усмотреть, что уравнению (28) удовлетворяет функция $\varphi(x) = \exp(-i\omega x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Тогда решение уравнения (27) с условиями (13), (23), (24) можно определить из следующего уравнения типа Вольтерры:

$$S(x) = e^{-i\omega x} + \int_0^x V(x-t)S(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Этому уравнению, в свою очередь, удовлетворяет вещественное решение соответствующего консервативного уравнения с ядром $\dot{V}$:

$$S(x) = \cos \omega x + \int_0^x \dot{V}(x-t)S(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (30)$$

Пусть $\dot{\Phi}$ – решение уравнения

$$\dot{\Phi}(x) = \dot{V}(x) + \int_0^x \dot{V}(x-t)\dot{\Phi}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда искомое решение S уравнения (30) и, следовательно, решение уравнения (27) с условиями (13), (23), (24) можно представить в виде (см. [11])

$$S(x) = \cos \omega x \cdot \left(1 + \int_0^x \dot{\Phi}(t) \cos \omega t dt\right) + \sin \omega x \cdot \int_0^x \dot{\Phi}(t) \sin \omega t dt. \quad (31)$$

Используя оценку (см. [11])

$$\int_0^x \dot{\Phi}(t) dt = O(x) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

из (31) получаем

$$S(x) = O(x) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (32)$$

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Скалярное однородное интегральное уравнение (27) в симметрическом закритическом случае (13), (23), (24) обладает вещественным решением S вида (31) с оценкой (32).*

В заключение выражаю благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wiener N., Hopf E. Über eine Klasse singulaer Integralgleichungen // Sitzung Preuss. Akad. Wiss. 1931. P. 696–706.
- [2] Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. № 5. С. 3–120.
- [3] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. № 2. С. 3–72.
- [4] Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Наука, 1979.
- [5] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
- [6] Амбарцумян В. А. Научные труды. Ереван, 1960.
- [7] Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1967.
- [8] Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

- [9] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
- [10] Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А. Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения // Матем. сб. 1975. Т. 97. № 5. С. 35–76.
- [11] Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1984. С. 175–244.
- [12] Крейн М. Г., Шмультян Ю. Л. Уравнения Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1982. Т. 17. № 4. С. 307–327; // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1982. Т. 17. № 5. С. 335–374.
- [13] Енгибарян Н. Б., Енгибарян Б. Н. Интегральные уравнения свертки на полупрямой со вполне монотонными ядрами // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 53–72.
- [14] Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [15] Григорян Г. А. Уравнения Винера–Хопфа в закритическом случае // Изв. НАН Армении. Сер. матем. 1997. Т. 32. № 1.
- [16] Колмогоров А. Л., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
- [17] Фихтенгольд Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1973.

Армянский государственный педагогический университет
им. Х. Абовяна, г. Ереван

Поступило
28.08.2000
Исправленный вариант
12.09.2003