Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Абросимов, О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 5, 643–650

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 08:01:54

О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов

М. Б. Абросимов

Исследуется вычислительная сложность задач, связанных с построением k -расширений графов. Доказывается, что задачи распознавания вершинного и реберного k -расширения являются NP-полными. Рассматривается сложность распознавания неприводимых, минимальных, точных вершинных и реберных k -расширений.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В 1976 г. Хейз в работе [1] предложил основанную на графах модель для исследования отказоустойчивости. Технической системе Σ сопоставляется помеченный граф G , вершины которого соответствуют элементам системы Σ , ребра (или дуги) – связям между элементами, а метки указывают тип элементов. Под *отказом* элемента системы Σ понимается удаление соответствующей вершины из графа системы G и всех связанных с ней ребер. Говорят, что система Σ^* является *k -отказоустойчивой реализацией* системы Σ , если отказ любых k элементов системы Σ^* приводит к графу, в который можно вложить граф системы Σ с учетом меток вершин. Построение *k -отказоустойчивой реализации* системы можно представить себе как введение в нее определенного числа новых элементов и связей. При этом предполагается, что в нормальном режиме работы избыточные элементы и связи *маскируются*, а в случае отказа происходит *реконфигурация* системы до исходной структуры.

Пусть в системе Σ встречается t различных типов элементов. Очевидно, что любая ее k -отказоустойчивая реализация должна содержать не менее k дополнительных элементов каждого типа. Легко видеть, что такого числа дополнительных элементов достаточно для построения k -отказоустойчивой реализации системы Σ . В самом деле, добавим k элементов каждого типа и соединим их все между собой и с элементами системы Σ . Тогда любой отказавший элемент можно будет заменить одним из добавленных элементов соответствующего типа. Построенную таким образом (*тривиальную*) k -отказоустойчивую реализацию можно использовать для оценки числа дополнительных вершин и ребер k -отказоустойчивых реализаций.

k -Отказоустойчивая реализация Σ^* системы Σ , состоящей из элементов t различных типов, называется *оптимальной*, если система Σ^* отличается от системы Σ на k элементов каждого из t типов системы Σ , и среди всех k -отказоустойчивых реализаций с тем же числом элементов система Σ^* имеет наименьшее число связей.

Если элементы технической системы однотипны, то метки элементов опускаются, и в качестве графа системы рассматривается граф без меток. В этом случае

оптимальная k -отказоустойчивая реализация будет содержать в точности k дополнительных элементов.

Хейз предложил процедуры построения оптимальной k -отказоустойчивой реализации для цепи, цикла и помеченного дерева. Позднее Хейз и Харари в работе [2] обобщили модель на случай отказов связей между элементами, предложив понятие *реберной отказоустойчивости*. Модель отказоустойчивости, в которой рассматриваются отказы элементов, в работе [3] было предложено называть *вершинной отказоустойчивостью*. В той же работе было введено понятие *точной k -отказоустойчивой реализации*.

Последующие исследования отказоустойчивых реализаций в основном были связаны с аналитическим решением задачи построения оптимальной k -отказоустойчивой реализации для различных классов графов: циклов, деревьев и некоторых других. Далее мы покажем, что эти задачи действительно являются сложными и вряд ли имеют общее эффективное решение. В работе мы будем использовать традиционные понятия теории графов (преимущественно по [4]) и теории вычислительной сложности (по [5], [6]). Если исключить понятие “отказа”, то все рассмотренные ранее понятия могут быть естественным образом сформулированы с использованием обычных терминов теории графов. Впервые это было предложено автором в работе [7] и далее мы дадим формальные определения именно в таком виде. Салий в работе [8] ввел понятие неприводимого расширения.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *вершинным (реберным) k -расширением* (k натуральное) графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый подграф графа G^* , получающийся удалением любых его k вершин (ребер). Будем использовать обозначение $G - u$ для графа, получающегося из графа G удалением вершины u и всех ее ребер, а также обозначение $G - \{u, v\}$ для графа, получающегося из графа G удалением ребра $\{u, v\}$. Очевидно, что k -расширение должно содержать не менее k дополнительных элементов – вершин или ребер соответственно. Для построения вершинного k -расширения этого оказывается и достаточно: если к произвольному графу G добавить k вершин и соединить их ребрами (дугами) между собой и с остальными вершинами графа G , то построенный граф, как можно заметить, будет являться вершинным (и реберным) k -расширением графа G . Такое расширение называется *тривиальным k -расширением*. Вершину, смежную со всеми остальными вершинами графа, будем называть *полной*.

Рассмотрим далее оптимизационную задачу: будем уменьшать количество ребер в произвольном k -расширении до тех пор, пока у него будет сохраняться свойство “быть k -расширением”. Получившийся граф назовем *неприводимым k -расширением*. Если в качестве исходного k -расширения было выбрано тривиальное, то неприводимое k -расширение называется *T -неприводимым k -расширением*. Среди всех неприводимых k -расширений можно выбрать *минимальные* – те, которые будут иметь минимально возможное число вершин и ребер.

Вершинное (реберное) k -расширение (k натуральное) графа $G = (V, \alpha)$ называется *неприводимым*, если никакая его собственная часть не является вершинным (реберным) k -расширением графа G .

Граф G_t называется *точным вершинным (реберным) k -расширением* графа G , если любой граф, получающийся удалением произвольных k вершин (ребер) графа G_t , изоморфен графу G .

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k -расширением n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$* , если выполняются следующие условия:

- 1) G^* является вершинным k -расширением G ;
- 2) G^* содержит $n + k$ вершин, т.е. $|V^*| = |V| + k$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k -расширением n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$* , если выполняются следующие условия:

- 1) G^* является реберным k -расширением G ;
- 2) G^* содержит n вершин, т.е. $|V^*| = |V|$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность среди всех графов, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

2. Вершинные k -расширения. Сформулируем задачу о вершинном k -расширении как задачу распознавания свойств, т.е. задачу, ответом на которую может быть “да” или “нет”.

Задача 1 (“Вершинное k -расширение”).

Условие. Даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.

Вопрос. Верно ли, что граф G является вершинным k -расширением графа H ?

ТЕОРЕМА 1. *Задача “Вершинное k -расширение” является NP-полной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для наглядности доказательство будем проводить при $k = 1$, однако идея доказательства остается справедливой при любом натуральном k . Для доказательства в соответствии с традиционной схемой (см. [5], [6]) нужно показать:

- 1) задача “Вершинное k -расширение” $\in$ NP;
- 2) некоторая известная NP-полная задача может быть полиномиально сведена к задаче “Вершинное k -расширение” (сводимость по Карпу).

Покажем, что задача “Вершинное 1-расширение” $\in$ NP. Для этого нужно показать, что с помощью алгоритма полиномиальной сложности можно убедиться в правильности решения, которое было найдено с помощью некоторого недетерминированного алгоритма. Пусть граф G содержит n , а граф H — m вершин; очевидно, что если G является вершинным 1-расширением, то $n \geq m + 1$. Обозначим вершины графа G через $v_1, \dots, v_n$. Тогда недетерминированному алгоритму необходимо угадать n последовательностей V_i по m вершин из множеств $V \setminus \{v_i\}$, для каждой из которых далее за полиномиальное время можно проверить, что определяемая этой последовательностью биекция является вложением. В общем случае для произвольного k необходимо будет указать C_n^k последовательностей для всех возможных наборов из k удаляемых вершин графа G : для фиксированного k эта величина будет полиномом от n и может быть оценена как $O(n^k)$.

Рассмотрим следующую известную NP-полную задачу.

Задача 2 (“Изоморфизм подграфу”).

Условие. Даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.

Вопрос. Верно ли, что в графе G есть часть изоморфная графу H ?

Покажем, что задача “Изоморфизм подграфу” сводится к задаче “Вершинное k -расширение”. Для этого необходимо указать функцию f , которая сводит каждую задачу “Изоморфизм подграфу” к задаче “Вершинное k -расширение” и удовлетворяет двум условиям полиномиальной сводимости.

Пусть графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$ определяют условие задачи “Изоморфизм подграфу”. Соответствующая задача “Вершинное k -расширение” строится следующим образом. Первым графом берется граф $G + K_1$, т.е. к графу G добавляется одна вершина и соединяется с остальными вершинами, а вторым графом берется граф H . Под *соединением* двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, не имеющих общих вершин, понимается граф

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1).$$

Под *объединением* двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ понимается граф

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2).$$

Очевидно, что указанная сводимость осуществляется за полиномиальное время. Для проверки второго требования необходимо показать, что граф $G + K_1$ тогда и только тогда является вершинным k -расширением графа H , когда граф H вкладывается в граф G .

Необходимость. Обозначим полную вершину графа $G + K_1$ через v . Если граф $G + K_1$ является вершинным 1-расширением графа H , то граф H вкладывается в граф, получающийся из $G + K_1$ удалением вершины v , т.е. в G .

Достаточность. С другой стороны, если граф H вкладывается в граф G , то граф $G + K_1$ является вершинным 1-расширением графа H . Действительно, обозначим полную вершину графа $G + K_1$ через v и рассмотрим граф G^* , получающийся из графа $G + K_1$ удалением произвольной вершины u . Если $u = v$, то граф G^* изоморфен графу G , а если $u \neq v$, то вершина u в графе G может быть заменена вершиной v , так как вершина v смежна со всеми остальными вершинами. Таким образом, и в том и в другом случае граф H может быть вложен в граф $G^* - u$.

3. Реберные k -расширения. Аналогично предыдущему разделу, сформулируем задачу о реберном k -расширении как задачу распознавания свойств, т.е. задачу, ответом на которую может быть “да” или “нет”.

ЗАДАЧА 3 (“Реберное k -расширение”).

Условие. Даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.

Вопрос. Верно ли, что граф G является реберным k -расширением графа H ?

Прежде чем перейти к основному утверждению, докажем вспомогательное.

ЛЕММА 1. *Граф H вкладывается в граф G тогда и только тогда, когда граф $H + K_1$ вкладывается в граф $G + K_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$. Графы $H + K_1$ и $G + K_1$ получаются из G и H добавлением одной вершины и соединением со всеми остальными. Обозначим эти добавленные вершины через v и u соответственно, а отношения смежности графов $G + K_1$ и $H + K_1$ — через α^* и β^* .

Необходимость. Пусть граф H вкладывается в граф G и $\varphi: U \rightarrow V$ — соответствующая инъекция. Доопределим φ , положив $\varphi(u) = v$. Очевидно, что построенная инъекция $U \cup \{u\} \rightarrow V \cup \{v\}$ определяет вложение графа $H + K_1$ в граф $G + K_1$.

Достаточность. Пусть граф $H + K_1$ вкладывается в граф $G + K_1$ и $\varphi: U \cup \{u\} \rightarrow V \cup \{v\}$ соответствующая инъекция. Покажем, что граф H вкладывается в граф G . Рассмотрим три случая.

1) Пусть v не является образом никакой вершины графа $H + K_1$ при отображении φ . Это означает, что граф $H + K_1$ вкладывается в граф G , но тогда и любая часть $H + K_1$ вкладывается в G , в том числе и сам граф H .

2) Пусть $\varphi(u) = v$. Тогда очевидно, что отображение $\varphi: U \rightarrow V$ будет определять вложение графа H в граф G .

3) Пусть $\varphi(u') = v$, $u' \neq u$. Для определенности обозначим $\varphi(u) = v'$. Так как φ является вложением, то $v' \neq v$. Построим новое отображение φ^* , определив его следующим образом:

$$\varphi^*(w) = \begin{cases} v, & \text{если } w = u, \\ v', & \text{если } w = u', \\ \varphi(w), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

То есть φ^* отличается от φ только перестановкой образов вершин u и u' , а на множестве $U \setminus \{u'\}$ значения этих функций совпадают. Покажем, что φ^* также определяет вложение графа $H + K_1$ в граф $G + K_1$. Очевидно, что φ^* является инъекцией. Покажем, что если $x, y \in U \cup \{u\}$, то выполняется условие

$$(x, y) \in \alpha^* \implies (\varphi^*(x), \varphi^*(y)) \in \beta^*.$$

Заметим, что так как φ определяет вложение графа $H + K_1$ в граф $G + K_1$, то для любых $x, y \in U \cup \{u\}$ выполняется условие

$$(x, y) \in \alpha^* \implies (\varphi^*(x), \varphi^*(y)) \in \beta^*.$$

Рассмотрим в графе $H + K_1$ две произвольные смежные вершины x и y : $\{x, y\} \subset U \cup \{u\}$. Тогда вершины $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ тоже смежны в графе $G + K_1$. Требуется показать, что в графе $G + K_1$ смежны также вершины $\varphi^*(x)$ и $\varphi^*(y)$.

Рассмотрим 4 возможных случая.

а) Случай $\{x, y\} \subset U \setminus \{u'\}$. Так как на множестве $U \setminus \{u'\}$ значения функций φ^* и φ совпадают, то вершины $\varphi^*(x)$ и $\varphi^*(y)$ смежны в графе $G + K_1$.

б) Случай $\{x, y\} = \{u, u'\}$. Так как вершина u полная, то она смежна со всеми остальными вершинами в графе $H + K_1$. По определению отображения φ^* образом вершин u и u' являются вершины v и v' графа $G + K_1$. Вершина v по условию является полной и, значит, вершины v и v' смежны.

в) Одна из вершин x, y есть u , а вторая отлична от u' . Пусть для определенности $y = u$, а $x \in U \setminus \{u'\}$. Аналогично случаю б) образом полной вершины u графа $H + K_1$ является полная вершина v графа $G + K_1$; следовательно, вершины $\varphi^*(x)$ и $\varphi^*(y) = v$ смежны в графе $G + K_1$.

г) Одна из вершин x, y есть u' , а вторая – отлична от u . Пусть, для определенности, $y = u'$, а $x \in U$. Так как φ вложение, то $\varphi(x)$ и $\varphi(y) = v$ смежны. С другой стороны, в графе $H + K_1$ вершины x и u смежны в силу того, что вершина u полная. Значит, $\varphi(x)$ и $\varphi(u) = v'$ смежны. Однако, по определению $\varphi^*(u') = v'$.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях граф H вкладывается в граф G .

Теперь мы готовы приступить к доказательству основного результата.

ТЕОРЕМА 2. *Задача “Реберное k -расширение” является NP-полной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По-прежнему доказательство для наглядности будем проводить при $k = 1$, однако идея доказательства остается справедливой при любом натуральном k . Для доказательства утверждения нужно показать:

- 1) задача “Реберное k -расширение” $\in \text{NP}$;
- 2) некоторая известная NP -полная задача может быть полиномиально сведена к задаче “Реберное k -расширение” (сводимость по Карпу).

Покажем, что задача “Реберное 1-расширение” $\in \text{NP}$. Пусть граф G содержит n вершин и m ребер, а граф H — p вершин; очевидно, что положительный ответ в задаче возможен лишь при $n \geq p$. Обозначим ребра графа G через $e_1, \dots, e_m$. Тогда недетерминированному алгоритму необходимо угадать m последовательностей V_i по p вершин из множества V , для каждой из которых далее за полиномиальное время можно проверить, что определяемая этой последовательностью инъекция является вложением графа H в граф $G - e_i$. В общем случае для произвольного k необходимо будет указать последовательности для всех возможных наборов из k удаляемых ребер графа G : для фиксированного k эта величина будет полиномом от n и может быть оценена как $O(m^k) = O(n^{2k})$.

Покажем, что задача “Изоморфизм подграфу” сводится к задаче “Реберное k -расширение”. Для этого необходимо указать функцию f , которая сводит каждую задачу “Изоморфизм подграфу” к задаче “Реберное k -расширение” и удовлетворяет двум условиям полиномиальной сводимости.

Пусть графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$ определяют условие задачи “Изоморфизм подграфу”. Соответствующая задача “Вершинное k -расширение” строится следующим образом. Первым графом берется граф $G + K_1 \cup H + K_1$, а вторым графом берется граф $H + K_1$. Очевидно, что сводимость осуществляется за полиномиальное время. Для проверки второго требования необходимо показать, что $G + K_1 \cup H + K_1$ тогда и только тогда является реберным k -расширением графа $H + K_1$, когда граф H вкладывается в граф G . С учетом леммы достаточно доказать, что $G + K_1 \cup H + K_1$ тогда и только тогда является реберным k -расширением графа $H + K_1$, когда граф $H + K_1$ вкладывается в граф $G + K_1$.

Необходимость. Если граф $(G + K_1) \cup (H + K_1)$ является реберным 1-расширением графа $H + K_1$, то граф $H + K_1$ будет вкладываться в любой граф, получающийся из $(G + K_1) \cup (H + K_1)$ удалением произвольного ребра. Если в качестве ребра взять некоторое ребро из компоненты $H + K_1$ графа $(G + K_1) \cup (H + K_1)$, то, очевидно, граф $H + K_1$ должен вкладываться в оставшуюся компоненту, т.е. в $G + K_1$.

Достаточность. С другой стороны, если граф $H + K_1$ вкладывается в граф $G + K_1$, то граф $(G + K_1) \cup (H + K_1)$ является реберным 1-расширением графа $H + K_1$. Действительно, рассмотрим граф G^* , получающийся из $(G + K_1) \cup (H + K_1)$ удалением произвольного ребра e . Если ребро e входит в компоненту $G + K_1$, то графа G^* имеет вид $((G + K_1) - e) \cup (H + K_1)$, а если ребро e входит в компоненту $H + K_1$, то графа G^* имеет вид $(G + K_1) \cup ((H + K_1) - e)$. И в том, и в другом случае граф $H + K_1$ может быть вложен в граф $G^* - e$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Схему сужения задачи реберного k -расширения из доказательства теоремы 2 также можно использовать и в доказательстве теоремы 1.

4. Неприводимые k -расширения. Сформулируем задачу о неприводимом k -расширении как задачу распознавания свойств, т.е. задачу, ответом на которую может быть “да” или “нет”.

ЗАДАЧА 4 (“Неприводимое вершинное (реберное) k -расширение”).

Условие. Даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.

Вопрос. Верно ли, что граф G является неприводимым вершинным (реберным) k -расширением графа H ?

Задача “Неприводимое вершинное (реберное) k -расширение” является, очевидно, не менее сложной, чем задача “Вершинное (реберное) k -расширение”, так как для проверки того, что граф G является неприводимым вершинным k -расширением графа H необходимо установить, что

- 1) G является вершинным (реберным) k -расширением графа H (NP-полная задача);
- 2) никакая часть G , получающаяся удалением одного ребра, не является вершинным (реберным) k -расширением H (задача из co-NPC).

В некоторых случаях можно избежать проверки пункта 2, используя аналитические оценки на минимальное количество дополнительных ребер в k -расширении графа. Так, например, в работе [9] доказываются утверждения, позволяющие получить такую оценку для минимальных вершинных и реберных k -расширений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть наибольшая из степеней вершин графа G есть s и в точности t вершин имеют такую степень. Тогда минимальное вершинное k -расширение графа G содержит, по крайней мере, $k + t$ вершин степени не ниже s .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если максимальная степень вершины графа G есть $s > 0$, то его минимальное вершинное k -расширение содержит не менее ks дополнительных дуг.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное вершинное k -расширение не содержит вершин степени ниже $d + k$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное реберное k -расширение не содержит вершин степени ниже $d + k$.

Однако в общем случае, если количество ребер в предъявляемом графе окажется выше некоторой аналитической оценки на минимальное число дополнительных ребер, то необходимо будет проверить, что никакая часть графа G не является k -расширением графа H . В этом случае, если $P \neq \text{NP}$, то мы не сможем за полиномиальное время убедиться в истинности того, является ли предложенный граф G неприводимым вершинным (реберным) k -расширением графа H . Это означает, что если $P \neq \text{NP}$, то задача “Неприводимое k -расширение” $\notin \text{NP}$. Легко увидеть, что и обратная задача, также не допускает полиномиальной проверки, поэтому задача “Неприводимое k -расширение” $\notin \text{co-NP}$. Аналогичные рассуждения применимы и к задаче “Минимальное k -расширение”. Рассмотрим в заключение последнюю задачу на расширения графов.

5. Точные k -расширения. Сформулируем задачу о точном k -расширении как задачу распознавания свойств.

ЗАДАЧА 5 (“Точное вершинное (реберное) k -расширение”).

Условие. Даны графы $G = (V, \alpha)$ и $H = (U, \beta)$.

Вопрос. Верно ли, что граф G является точным вершинным (реберным) k -расширением графа H ?

В работах [10], [11] было показано, что для неориентированных графов при $k > 1$ только полные и вполне несвязные графы являются точными вершинными k -расширениями, а при $k = 1$, графы, являющиеся точными вершинными 1-расширениями являются в точности вершинно-симметрическими графами. Таким образом, задача “Точное k -расширение” при $k > 1$ сводится к определению, являются ли графы G и H полными или вполне несвязными. Сложность задачи в этом случае составит $O(n^2)$.

В работе [11] доказывается, что однородный граф является точным реберным 1-расширением тогда и только тогда, когда он является реберно-симметрическим. Таким образом, с точки зрения нахождения графов, которые являются точными 1-расширениями, задача сводится к построению вершинно- и реберно-симметрических графов. А проверка, является ли граф G точным 1-расширением графа H , очевидно, принадлежит классу NP, но не сложнее задачи проверки изоморфизма. В самом деле, чтобы получить ответ на поставленный в задаче вопрос достаточно проверить изоморфизм графа H с каждым графом, получающимся удалением одной вершины или одного ребра из графа G .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. P. Hayes, “A graph model for fault-tolerant computing systems”, *IEEE Trans. Computers*, **C-25**, 1976, 875–884.
- [2] F. Harary, J. P. Hayes, “Edge fault tolerance in graphs”, *Networks*, **23**, 1993, 135–142.
- [3] F. Harary, J. P. Hayes, “Node fault tolerance in graphs”, *Networks*, **27**, 1996, 19–23.
- [4] А. М. Богомолов, В. Н. Салий, *Алгебраические основы теории дискретных систем*, Наука, М., 1997.
- [5] М. Гэри, Д. Джонсон, *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, М., 1982.
- [6] Х. Пападимитриу, К. Стайглиц, *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность*, Мир, М., 1985.
- [7] М. Б. Абросимов, “Минимальные расширения графов”, *Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур*, ТНЦ СО РАН “Спектр”, Томск, 2000, 59–64.
- [8] В. Н. Салий, “Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение*, 2003, 63–65.
- [9] М. Б. Абросимов, “Минимальные расширения транзитивных турниров”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение*, 2006, 187–190.
- [10] М. Б. Абросимов, “Минимальные расширения дополнений графов”, *Теоретические проблемы информатики и ее приложений*, Вып. 4, СГУ, Саратов, 2001, 11–19.
- [11] М. Б. Абросимов, “Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов”, *Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **6**, 2006, 86–91.

М. Б. Абросимов

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: mic@rambler.ru

Поступило

10.01.2009

Исправленный вариант

13.02.2010