Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Ф. Ахмерова, Асимптотика спектра негладких возмущений дифференциальных операторов $2m$ -го порядка, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 6, 833–844

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:30:13

Асимптотика спектра негладких возмущений дифференциальных операторов $2m$ -го порядка

Э. Ф. Ахмерова

На конечном отрезке получена асимптотика собственных чисел дифференциального оператора $2m$ -го порядка, возмущенного дифференциальным оператором порядка $2m - 2$, заданным квазидифференциальным выражением. Рассматривается также случай кратных собственных чисел.

Библиография: 11 названий.

Пусть H^0 – самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ с дискретным спектром $\sigma(H^0) = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, и соответствующими собственными проекторами P_k , причем

$$\inf_{k \geq 1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0, \quad R^0(\lambda) = (H^0 - \lambda)^{-1}.$$

Рассмотрим возмущенный оператор $H = H^0 + V$, где возмущение V таково, что оператор $VR^0(\lambda)$ компактен для всех $\lambda \notin \sigma(H^0)$ и $VR^0(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда области определения операторов H^0 и H совпадают. В самом деле, из представления

$$H - \lambda = H^0 - \lambda + V = [I + V(H^0 - \lambda)^{-1}](H^0 - \lambda)$$

следует, что

$$R(\lambda) = (H - \lambda)^{-1} = [I + VR^0(\lambda)]^{-1} R^0(\lambda).$$

Поскольку $[I + VR^0(\lambda)]^{-1}$ – гомеоморфизм, то для любого $\lambda \notin \sigma(H^0)$ оператор $R(\lambda)$ имеет область значений $D(H^0)$.

Согласно рассуждениям работы [1] спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ оператора H определяется из уравнения

$$\mu_n = \lambda_n + P_n V P_n - P_n V R_n(\mu_n) V P_n, \quad (1)$$

где

$$R_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [R_n^0(\lambda) V]^k R_n^0(\lambda), \quad R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - \frac{P_n}{\lambda_n - \lambda}. \quad (2)$$

Таким образом, задача асимптотического разложения собственных значений возмущенного оператора $H = H^0 + V$ сводится к исследованию поведения части $R_n^0(\lambda)$ резольвенты $R^0(\lambda)$ невозмущенного оператора H^0 в окрестности $\lambda = \lambda_n$.

Нахождению асимптотики спектра и формул следов оператора $H = H^0 + V$, где H^0 – дифференциальный оператор, а V – оператор умножения на вещественную гладкую функцию $V(x)$, посвящено очень много работ. В последние годы все чаще появляются работы, связанные с отказом от гладкости потенциала $V(x)$. Глубокие результаты в этом направлении для дифференциальных операторов второго порядка получены в работах Шкаликова, Савчука [2]–[4] и Садовнического, Винокурова [5], [6]. Значительным продвижением для дифференциальных операторов высокого порядка является работа Садовнического и Подольского [7].

Указанная методика использовалась нами для нахождения асимптотики спектра дифференциальных операторов $2m$ -го порядка на конечном отрезке, где в качестве возмущения взят дифференциальный оператор второго порядка [8]; дифференциальных операторов с неограниченными коэффициентами [9]; одномерного гармонического осциллятора, возмущенного негладким потенциалом на всей оси [10], [11]. Цель настоящей работы – получить асимптотику спектра дифференциального оператора $2m$ -го порядка, возмущенного дифференциальным оператором порядка $2m - 2$, заданным квазидифференциальным выражением. В качестве второго примера рассматривается случай кратных собственных чисел.

1. В пространстве $L^2[0, \pi]$ рассмотрим возмущенный оператор $H = H^0 + V$, порожденный дифференциальным выражением порядка $2m$

$$(-1)^m u^{(2m)} + Vu = (-1)^m u^{(2m)} + \sum_{k=1}^{m-1} (p_k u^{(k)})^{(k)} + qu, \quad (3)$$

где $p_k(x)$, $q(x)$ – вещественные функции, $p_k(x) \in W_k^2[0, \pi]$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, $m \geq 2$, $q(x) \in L^2[0, \pi]$, с областью определения

$$D(H^0) = \{u(x) \in W_{2m}^2[0, \pi], u(0) = u''(0) = \dots = u^{(2m-2)}(0) = 0, \\ u(\pi) = u''(\pi) = \dots = u^{(2m-2)}(\pi) = 0\}.$$

Известно, что оператор H^0 имеет простой спектр $\{\lambda_n\} = \{n^{2m}\}_{n=1}^\infty$, а соответствующие нормированные собственные функции суть $f_n(x) = \sqrt{2/\pi} \sin nx$. Найдем асимптотику спектра оператора H . Для этого получим представление резольвенты $R^0(\mu) = (H^0 - \mu)^{-1}$ оператора H^0 .

Пусть L – самосопряженный оператор, порожденный дифференциальным выражением $lu = -u''$ и граничными условиями Дирихле $u(0) = u(\pi) = 0$. Тогда оператор H^0 можем представить в виде $H^0 = L^m$, $m \geq 2$. Отсюда резольвента $R^0(\mu)$ оператора H^0 имеет вид

$$R^0(\mu) = (L^m - \mu)^{-1} = \mu^{(1-m)/m} \sum_{k=0}^{m-1} b_k G(\mu^{1/m} \varepsilon_k), \quad b_k = \frac{1}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{m-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_n)}, \quad (4)$$

где $G(\lambda)$ – резольвента оператора L , ε_k принимает все значения корня m -й степени из единицы, $\varepsilon_k = e^{2\pi ki/m}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Таким образом, задача о представлении резольвенты $R^0(\mu)$ оператора L^m свелась к задаче о представлении резольвенты $G(\lambda)$ оператора L . В частности, из формулы (4) при $m = 2$ следует, что

$$R^0(\mu) = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}(G(\sqrt{\mu}) - G(-\sqrt{\mu})).$$

Получим представление для ядра $G(x, t, \lambda)$ резольвенты $G(\lambda)$. Справедлива

ЛЕММА 1. *Резольвента $G(\lambda)$ оператора L имеет вид*

$$G(x, t, \lambda) = M(x, t, \lambda) - \frac{\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} t, \quad (5)$$

где

$$M(x, t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{cases} \cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} t, & t \leq x, \\ \cos \sqrt{\lambda} t \sin \sqrt{\lambda} x, & t > x. \end{cases} \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $u(x, \lambda) = [G(\lambda)h](x)$, где $\lambda \neq n^2$, $n \geq 1$, $h(x) \in L^2[0, \pi]$. Тогда $u(x, \lambda)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$-y''(x) - \lambda y(x) = h(x) \quad (7)$$

и условиям

$$y(0, \lambda) = 0, \quad y(\pi, \lambda) = 0. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что функция

$$w(x, \lambda) = \int_0^\pi M(x, t, \lambda) h(t) dt$$

удовлетворяет уравнению (7) и условию $w(0, \lambda) = 0$. Поэтому функция $f(x, \lambda) = u(x, \lambda) - w(x, \lambda)$ удовлетворяет однородному уравнению $-y''(x) = \lambda y(x)$, причем $f(0, \lambda) = 0$. Отсюда заключаем, что функция $f(x, \lambda)$ имеет вид

$$f(x, \lambda) = u(x, \lambda) - w(x, \lambda) = A \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Постоянную A найдем из условия $u(\pi, \lambda) = 0$:

$$A = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} \pi \int_0^\pi \sin \sqrt{\lambda} t h(t) dt.$$

Таким образом, имеем уравнение

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi G(x, t, \lambda) h(t) dt - \int_0^\pi M(x, t, \lambda) h(t) dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} \pi \sin \sqrt{\lambda} x \int_0^\pi \sin \sqrt{\lambda} t h(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда для ядра $G(x, t, \lambda)$ резольвенты $G(\lambda)$ получим представление (5). Лемма доказана.

Отметим, что спектр оператора L состоит из чисел $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$, соответствующие нормированные собственные функции суть $f_n(x) = \sqrt{2/\pi} \sin nx$. Тогда из формул (5), (6) для части ядра $G_n(x, t, \lambda)$ имеем представление

$$\begin{aligned} G_n(x, t, \lambda) &= G(x, t, \lambda) - \frac{f_n(x)f_n(t)}{\lambda_n - \lambda} \\ &= M(x, t, \lambda) - \frac{\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} t - \frac{2}{\pi} \frac{\sin nx \sin nt}{n^2 - \lambda}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$G_n(x, t, n^2) = M(x, t, n^2) - \frac{1}{\pi n} [x \cos nx \sin nt + t \cos nt \sin nx] + \frac{\sin nx \sin nt}{2\pi n^2}. \quad (10)$$

Получим оценку части ядра $R_n^0(x, t, \mu)$ в окрестности $\mu = n^{2m}$.

ЛЕММА 2. При $|\mu - n^{2m}| \leq n^{2m-1}/2$ ядро $R_n^0(x, t, \mu)$ оператора $R_n^0(\mu)$ ограничено:

$$|R_n^0(x, t, \mu)| \leq \frac{C}{n^{2m-1}}, \quad (11)$$

где $C > 0$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (4), (5) ядро $R_n^0(x, t, \mu)$ имеет вид

$$\begin{aligned} R_n^0(x, t, \mu) &= \frac{1}{\mu^{(m-1)/m}} b_0 M(x, t, \mu^{1/m}) - \frac{b_0 \operatorname{ctg} \mu^{1/(2m)} \pi}{\mu^{(2m-1)/(2m)}} \sin \mu^{1/(2m)} x \sin \mu^{1/(2m)} t \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \frac{\sin nt \sin nx}{n^{2m} - \mu} + \frac{1}{\mu^{(m-1)/m}} \sum_{k=1}^{m-1} b_k G(x, t, \mu^{1/m} \varepsilon_k) \end{aligned} \quad (12)$$

Первое и последнее слагаемое в формуле (12) в окрестности собственных значений особенностей не имеет, задача сводится к исследованию поведения функции

$$g(x, t, \mu) = -\frac{b_0 \operatorname{ctg} \mu^{1/(2m)} \pi}{\mu^{(2m-1)/(2m)}} \sin \mu^{1/(2m)} x \sin \mu^{1/(2m)} t - \frac{2}{\pi} \frac{\sin nt \sin nx}{n^{2m} - \mu}$$

в окрестности $\mu = n^{2m}$. Обозначим через $\gamma = \mu^{1/(2m)}$ и представим функцию $g(x, t, \mu)$ в виде

$$\begin{aligned} g(x, t, \mu) &= -b_0 \frac{[\cos \gamma \pi - \cos n\pi]}{\sin \gamma \pi} \frac{\sin \gamma x \sin \gamma t}{\gamma^{2m-1}} \\ &\quad - \left\{ \frac{[\sin \gamma x - \sin nx]}{\sin \gamma \pi} \sin \gamma t + \frac{[\sin \gamma t - \sin nt]}{\sin \gamma \pi} \sin nx \right\} \frac{b_0 \cos n\pi}{\gamma^{2m-1}} \\ &\quad - \frac{\sin nx \sin nt}{\gamma^{2m-1}} \left\{ \frac{b_0 \cos n\pi}{\sin \gamma \pi} - \frac{2\gamma^{2m-1}}{\pi(\gamma^{2m} - n^{2m})} \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функции

$$\psi_n^{(1)}(\gamma) = \frac{\cos \gamma \pi - \cos n\pi}{\sin \gamma \pi}, \quad \psi_n^{(2)}(\gamma) = \frac{\sin \gamma x - \sin nx}{\sin \gamma \pi},$$

$$\psi_n^{(3)}(\gamma) = \frac{b_0 \cos n\pi}{\sin \gamma\pi} - \frac{2\gamma^{2m-1}}{(\pi(\gamma^{2m} - n^{2m}))}.$$

По теореме Коши

$$\psi_n^{(1)}(\gamma) = -\frac{\sin \xi\pi}{\cos \xi\pi}, \quad \text{где } \xi \in (\gamma, n).$$

Отсюда следует, что $\psi_n^{(1)}(\gamma)$ ограничена в некотором промежутке $|\gamma - n| \leq 1/2 - \delta$, $0 < \delta < 1/2$, т.е. $|\mu^{1/(2m)} - n| \leq 1/2 - \delta$. Иначе, для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, существует $C_0 = C(\varepsilon)$ – постоянная такая, что $|\psi_n^{(1)}(\sqrt{\lambda})| \leq C_0$, лишь только $|\mu - n^{2m}| \leq (1 - \varepsilon)n^{2m-1}$. В силу произвольности ε можем положить, что $\varepsilon = 1/2$. Аналогично оцениваются функции $\psi_n^{(2)}(\gamma)$ и $\psi_n^{(3)}(\gamma)$. Отсюда следует (11). Лемма доказана.

Из формулы (12) несложно получить представление ядра оператора $R_n^0(n^{2m})$:

$$R_n^0(x, t, n^{2m}) = \frac{1}{n^{2m-2}} \left[b_0 G_n(x, t, n^2) + \sum_{k=1}^{m-1} b_k G(x, t, n^2 \varepsilon_k) \right], \quad (13)$$

где функции $G_n(x, t, n^2)$ и $G(x, t, n^2 \varepsilon_k)$ определены формулами (10) и (5) соответственно. Например, для дифференциального оператора четвертого порядка имеем следующее представление:

$$R_n^0(x, t, n^4) = \frac{1}{2n^2} M(x, t, n^2) - \frac{G(x, t, -n^2)}{2n^2} - \frac{1}{2\pi n^3} [x \cos nx \sin nt + t \cos nt \sin nx] - \frac{1}{4\pi n^4} \sin nx \sin nt,$$

где функция $M(x, t, n^2)$ определена формулой (6), $G(x, t, -n^2)$ – ядро резольвенты $G(-n^2) = (L + n^2)^{-1}$.

Из леммы 2 следует

ТЕОРЕМА 1. *Спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ оператора $H = H^0 + V$ имеет следующую асимптотику:*

$$\begin{aligned} \mu_n = n^{2m} &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^k C_k^i \int_0^\pi p_k^{(k-i)}(x) (\sin nx)^{(k+i)} \sin nx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q(x) \sin^2 nx \, dx \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l C_k^i C_l^j \int_0^\pi p_k^{(k-i)}(x) (\sin nx)^{(k+i)} \\ &\quad \times \int_0^\pi p_l^{(l-j)}(t) (\sin nt)^{(l+j)} R_n^0(x, t, n^{2m}) \, dt \, dx \\ &+ \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^k C_k^i \int_0^\pi p_k^{(k-i)}(x) (\sin nx)^{(k+i)} \int_0^\pi R_n^0(x, t, n^{2m}) q(t) \sin nt \, dt \, dx \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q(x) \sin nx \int_0^\pi R_n^0(x, t, n^{2m}) q(t) \sin nt \, dt \, dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

где

$$R_n^0(x, t, n^{2m}) = \frac{1}{n^{2m-2}} \left[b_0 G_n(x, t, n^2) + \sum_{k=1}^{m-1} b_k G(x, t, n^2 \varepsilon_k) \right],$$

$$G_n(x, t, n^2) = M(x, t, n^2) - \frac{1}{\pi n} [x \cos nx \sin nt + t \cos nt \sin nx] + \frac{\sin nx \sin nt}{2\pi n^2},$$

$$G(x, t, n^2 \varepsilon_k) = M(x, t, n^2 \varepsilon_k) - \frac{\operatorname{ctg} n \sqrt{\varepsilon_k} \pi}{n \sqrt{\varepsilon_k}} \sin n \sqrt{\varepsilon_k} x \sin n \sqrt{\varepsilon_k} t,$$

$$M(x, t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{cases} \cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} t, & t \leq x, \\ \cos \sqrt{\lambda} t \sin \sqrt{\lambda} x, & t > x, \end{cases} \quad b_k = \left(\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{m-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_n) \right)^{-1},$$

ε_k принимает все значения корня m -й степени из единицы, $\varepsilon_k = e^{2\pi k i/m}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $C_k^i = k!/[i!(k-i)!]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$\|R_n^0(\mu)V\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mu - n^{2m}| \leq n^{2m-1}/2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Действительно, пусть $f(x) \in W_{2k}^2[0, \pi]$, $\|f\|_{W_{2k}^2} = 1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, тогда, используя лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} & |[R_n^0(\mu)Vf](x)|^2 \\ &= \left| \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^\pi R_n^0(x, t, \mu) (p_k(t)f^{(k)}(t))^{(k)} dt + \int_0^\pi R_n^0(x, t, \mu) q(t)f(t) dt \right|^2 \\ &\leq C \sum_{k=1}^{m-1} \left| \int_0^\pi R_n^0(x, t, \mu) (p_k(t)f^{(k)}(t))^{(k)} dt \right|^2 + \left| \int_0^\pi R_n^0(x, t, \mu) q(t)f(t) dt \right|^2 \\ &\leq C_1 \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^k \left| \int_0^\pi R_n^0(x, t, \mu) p_k^{(k-i)}(t) f^{(k+i)}(t) dt \right|^2 + \left| \int_0^\pi R_n^0(x, t, \mu) q(t)f(t) dt \right|^2 \\ &\leq \frac{C_2}{n^{4m-2}} \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^k \int_0^\pi |p_k^{(k-i)}(t)|^2 dt \int_0^\pi |f^{(k+i)}(t)|^2 dt + \int_0^\pi |q(t)|^2 dt \int_0^\pi |f(t)|^2 dt \right\} \\ &\leq \frac{C_3}{n^{4m-2}}. \end{aligned}$$

И поэтому при $n \gg 1$, $m \geq 1$, $|\mu - n^{2m}| \leq n^{2m-1}/2$ будем иметь

$$\|R_n^0(\mu)V\| \leq \frac{C}{n^{2m-1}}. \quad (14)$$

Тогда имеет место формула (1), которая при $\dim \operatorname{Ran} P_n = 1$ приобретает вид

$$\mu_n = n^{2m} + (Vf_n, f_n) - (VR_n(\mu_n)Vf_n, f_n), \quad (15)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L^2[0, \pi]$, резольвента $R_n(\mu)$ определена формулой (2), $f_n(x)$ – нормированные собственные функции невозмущенного оператора H^0 , $f_n(x) = \sqrt{2/\pi} \sin nx$.

Введем функцию

$$\phi_n(\mu) = n^{2m} + (Vf_n, f_n) - (VR_n(\mu)Vf_n, f_n) \quad (16)$$

и заметим, что

$$\phi'_n(\mu) = -(VR_n^2(\mu)Vf_n, f_n) = -\|R_n(\mu)Vf_n\|^2. \quad (17)$$

Из леммы 2 имеем

$$\|R_n^0(\mu_n)Vf_n\| \leq \frac{C_1}{n^{2m-1}} \|Vf_n\| \leq \frac{C_2}{n}, \quad (18)$$

поскольку

$$\|Vf_n\|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[\sum_{k=1}^{m-1} (p_k(x)(\sin nx)^{(k)})^{(k)} + q(x) \sin nx \right]^2 dx \leq Cn^{4m-4}. \quad (19)$$

Из соотношений (2), (14), (18) получим

$$\|R_n(\mu_n)Vf_n\| \leq \frac{C_3}{n}. \quad (20)$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\phi_n(\mu_n) - \phi_n(n^{2m}) = (\mu_n - n^{2m})\phi'_n(\xi), \quad \text{где } \xi \in (\mu_n, n^{2m}).$$

Отсюда и из равенств (15), (16) имеем

$$\mu_n - n^{2m} - (Vf_n, f_n) + (VR_n(n^{2m})Vf_n, f_n) = (\mu_n - n^{2m})\phi'_n(\xi). \quad (21)$$

Из соотношения (2) и оценки (14) следует, что

$$R_n(n^{2m}) = R_n^0(n^{2m}) + O\left(\frac{1}{n^{4m-2}}\right). \quad (22)$$

Тогда из соотношений (21), (22), (17), (20), (19) будем иметь

$$\mu_n = n^{2m} + (Vf_n, f_n) - (VR_n^0(n^{2m})Vf_n, f_n) + O(n^{-2}). \quad (23)$$

Представленная в теореме асимптотика – развернутая форма записи формулы (23). Действительно, первая поправка имеет вид

$$\begin{aligned} (Vf_n, f_n) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^\pi (p_k(x)(\sin nx)^{(k)})^{(k)} \sin nx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q(x) \sin^2 nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^k C_k^i \int_0^\pi p_k^{(k-i)}(x)(\sin nx)^{(k+i)} \sin nx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q(x) \sin^2 nx \, dx, \end{aligned}$$

где $C_k^i = k!/[i!(k-i)!]$. Аналогично распишем вторую поправку в правой части формулы (23):

$$\begin{aligned} &(VR_n^0(n^{2m})Vf_n, f_n) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{m-1} \int_0^\pi (p_k(x)(f_n(x))^{(k)})^{(k)} \int_0^\pi (p_l(t)(f_n(t))^{(l)})^{(l)} R_n^0(x, t, n^{2m}) \, dt \, dx \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^\pi (p_k(x)(f_n(x))^{(k)})^{(k)} \int_0^\pi R_n^0(x, t, n^{2m}) q(t) f_n(t) \, dt \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\pi q(x) f_n(x) \int_0^\pi R_n^0(x, t, n^{2m}) q(t) f_n(t) dt dx \\
& = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l C_k^i C_l^j \int_0^\pi p_k^{(k-i)}(x) (\sin nx)^{(k+i)} \\
& \quad \times \int_0^\pi p_l^{(l-j)}(t) (\sin nt)^{(l+j)} R_n^0(x, t, n^{2m}) dt dx \\
& + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^k C_k^i \int_0^\pi p_k^{(k-i)}(x) (\sin nx)^{(k+i)} \int_0^\pi R_n^0(x, t, n^{2m}) q(t) \sin nt dt dx \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q(x) \sin nx \int_0^\pi R_n^0(x, t, n^{2m}) q(t) \sin nt dt dx,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_n^0(x, t, n^{2m}) &= \frac{1}{n^{2m-2}} \left[b_0 G_n(x, t, n^2) + \sum_{k=1}^{m-1} b_k G(x, t, n^2 \varepsilon_k) \right], \\
G_n(x, t, n^2) &= M(x, t, n^2) - \frac{1}{\pi n} [x \cos nx \sin nt + t \cos nt \sin nx] + \frac{\sin nx \sin nt}{2\pi n^2}, \\
G(x, t, n^2 \varepsilon_k) &= M(x, t, n^2 \varepsilon_k) - \frac{\operatorname{ctg} n\sqrt{\varepsilon_k} \pi}{n\sqrt{\varepsilon_k}} \sin n\sqrt{\varepsilon_k} x \sin n\sqrt{\varepsilon_k} t, \\
M(x, t, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{cases} \cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} t, & t \leq x, \\ \cos \sqrt{\lambda} t \sin \sqrt{\lambda} x, & t > x, \end{cases} \quad b_k = \left(\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{m-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_n) \right)^{-1},
\end{aligned}$$

ε_k принимает все значения корня m -й степени из единицы, $\varepsilon_k = e^{2\pi ki/m}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

В частности, если V – оператор умножения на вещественную функцию $V(x) \in L^2[0, \pi]$, то спектр оператора $H = H^0 + V$ имеет следующую асимптотику:

- при $m = 1$:

$$\begin{aligned}
\mu_n &= n^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V(x) \cos 2nx dx \\
&\quad - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi V(x) \sin 2nx \int_0^x V(t) \sin^2 nt dt dx \\
&\quad + \frac{2}{\pi^2 n} \int_0^\pi V(x) \sin^2 nx dx \int_0^\pi t V(t) \sin 2nt dt + O(n^{-2});
\end{aligned}$$

- при $m \geq 2$:

$$\mu_n = n^{2m} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V(x) \cos 2nx dx + O(n^{-2}).$$

Отметим, что полученные результаты при $m = 1$ согласуются с ранее полученными результатами Винокурова и Садовниченко [5].

2. В качестве второго примера в пространстве $L^2[0, 2\pi]$ рассмотрим оператор $H = H^0 + V$, где V – оператор умножения на вещественную функцию $V(x) \in L^2[0, 2\pi]$, H^0 – оператор, порожденный дифференциальным выражением $lu = -u''$ с областью определения

а) $D(H^0) = \{u(x) \in W_2^2[0, 2\pi], u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi)\}$;

б) $D(H^0) = \{u(x) \in W_2^2[0, 2\pi], u(0) = -u(2\pi), u'(0) = -u'(2\pi)\}$.

Проводя аналогичные рассуждения, как в лемме 1, для ядра $R_n^0(x, t, \lambda)$ оператора $R_n^0(\lambda)$ будем иметь следующее представление:

$$R_n^0(x, t, \lambda) = M(x, t, \lambda) - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x+t)}{2\sqrt{\lambda}} + \frac{\alpha \cos \sqrt{\lambda}(x-t)}{2\sqrt{\lambda}} (\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} \pi)^\alpha - \frac{1}{\pi} \frac{\cos \sqrt{\lambda_n}(x-t)}{\lambda_n - \lambda},$$

причем

$$R_n^0(x, t, \lambda_n) = M(x, t, \lambda_n) - \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}(x+t)}{2\sqrt{\lambda_n}} + \frac{(x-t)}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}(x-t) + \frac{1}{4\pi\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}(x-t), \quad (24)$$

где $M(x, t, \lambda)$ определено формулой (6),

а) $\alpha = -1$, спектр оператора H^0 состоит из чисел $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$, причем при $n \geq 1$ кратность λ_n равна двум, а соответствующие ортонормированные собственные функции суть

$$f_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad f_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx}, \quad n \geq 1, \quad f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}};$$

б) $\alpha = 1$, $\lambda_n = (n+1/2)^2$,

$$f_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(n+1/2)x}, \quad f_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(n+1/2)x}, \quad n \geq 0.$$

Для ядра $R_n^0(x, t, \lambda)$ при $|\lambda - \lambda_n| \leq n/2$ имеет место оценка вида (11) (заметим, что в данном случае $m = 1$). Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $V(x) \in L^2[0, 2\pi]$, тогда при $n \gg 1$ собственные значения оператора $H^0 + V$ представляются в виде

$$\begin{aligned} \mu_n^\pm = \lambda_n + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(x) dx \pm \frac{\sqrt{A_n}}{2\pi} + \frac{B_n}{\pi\sqrt{\lambda_n}} \\ \pm \left[\frac{2B_n}{\pi^2\sqrt{\lambda_n} A_n} \int_0^{2\pi} V(x) dx + \frac{C_n}{2\pi^2\sqrt{\lambda_n} A_n} \int_0^{2\pi} V(x) \cos 2\sqrt{\lambda_n} x dx \right. \\ \left. + \frac{D_n}{2\pi^2\sqrt{\lambda_n} A_n} \int_0^{2\pi} V(x) \sin 2\sqrt{\lambda_n} x dx \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \left(\int_0^{2\pi} V(x) \cos 2\sqrt{\lambda_n} x dx \right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} V(x) \sin 2\sqrt{\lambda_n} x dx \right)^2, \\ B_n &= \int_0^{2\pi} V(x) \cos \sqrt{\lambda_n} x \int_0^x V(t) \cos \sqrt{\lambda_n} (t-x) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t) \cos \sqrt{\lambda_n}(t-x) \sin \sqrt{\lambda_n}(x+t) dt dx \\
& + \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t)(x-t) \sin 2\sqrt{\lambda_n}(x-t) dt dx, \\
C_n = & \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t) \sin 2\sqrt{\lambda_n}(x+t) dt dx \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t)(x-t) \cos \sqrt{\lambda_n}(t+x) \sin \sqrt{\lambda_n}(x-t) dt dx \\
& - 2 \int_0^{2\pi} V(x) \cos \sqrt{\lambda_n} x \int_0^x V(t) \cos \sqrt{\lambda_n}(t+x) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt dx, \\
D_n = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t) \sin^2 \sqrt{\lambda_n}(x+t) dt dx \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t)(x-t) \sin \sqrt{\lambda_n}(t+x) \sin \sqrt{\lambda_n}(x-t) dt dx \\
& - 2 \int_0^{2\pi} V(x) \cos \sqrt{\lambda_n} x \int_0^x V(t) \sin \sqrt{\lambda_n}(t+x) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt dx.
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\dim \operatorname{Ran} P_n = 2$, формула (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{vmatrix} t_n^{(1,1)} - \mu_n + \lambda_n & t_n^{(1,2)} \\ t_n^{(2,1)} & t_n^{(2,2)} - \mu_n + \lambda_n \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$t_n^{(i,j)} = ([V - VR_n(\mu_n)V]f_n^{(i)}, f_n^{(j)}), \quad i, j = 1, 2.$$

Отсюда для собственных чисел оператора $H = H^0 + V$ имеем уравнение

$$\mu_n = \lambda_n + \frac{b(\mu_n) \pm \sqrt{b^2(\mu_n) - 4c(\mu_n)}}{2}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
b(\mu_n) &= ([V - VR_n(\mu_n)V]f_n^{(1)}, f_n^{(1)}) + ([V - VR_n(\mu_n)V]f_n^{(2)}, f_n^{(2)}), \\
c(\mu_n) &= ([V - VR_n(\mu_n)V]f_n^{(1)}, f_n^{(1)})([V - VR_n(\mu_n)V]f_n^{(2)}, f_n^{(2)}) \\
&\quad - |([V - VR_n(\mu_n)V]f_n^{(1)}, f_n^{(2)})|^2.
\end{aligned}$$

Рассуждая аналогично теореме 1, можно показать, что

$$R_n(\mu_n) = R_n^0(\lambda_n) + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (26)$$

Тогда из формулы (26) и представления собственных функций, после несложных вычислений, получим асимптотику выражений $b(\mu_n)$ и $c(\mu_n)$:

$$\begin{aligned}
b(\mu_n) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(x) dx \\
&+ \frac{2}{\pi \sqrt{\lambda_n}} \int_0^{2\pi} V(x) \cos \sqrt{\lambda_n} x \int_0^x V(t) \sin \sqrt{\lambda_n} t \cos \sqrt{\lambda_n}(t-x) dt dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t) \sin \sqrt{\lambda_n} (x+t) \cos \sqrt{\lambda_n} (t-x) dt dx \\
& + \frac{1}{4\pi^2\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t)(x-t) \sin 2\sqrt{\lambda_n} (x-t) dt dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right); \\
c(\mu_n) = & \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} V(x) dx \right)^2 - \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} V(x) \cos 2\sqrt{\lambda_n} x dx \right)^2 \\
& - \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} V(x) \sin 2\sqrt{\lambda_n} x dx \right)^2 - \frac{1}{\pi^2\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{2\pi} V(x) dx \\
& \times \left[\int_0^{2\pi} V(x) \cos \sqrt{\lambda_n} x \int_0^x V(t) \cos \sqrt{\lambda_n} (t-x) \sin \sqrt{\lambda_n} t dt dx \right. \\
& - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t) \sin \sqrt{\lambda_n} (t+x) \cos \sqrt{\lambda_n} (t-x) dt dx \\
& \left. + \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t)(x-t) \sin 2\sqrt{\lambda_n} (x-t) dt dx \right] \\
& - \frac{1}{2\pi^2\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{2\pi} V(x) \cos 2\sqrt{\lambda_n} x dx \\
& \times \left[\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t) \sin 2\sqrt{\lambda_n} (x+t) dt dx \right. \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t) \sin \sqrt{\lambda_n} (x-t) \cos \sqrt{\lambda_n} (x+t) dt dx \\
& - 2 \int_0^{2\pi} V(x) \cos \sqrt{\lambda_n} x \int_0^x V(t) \sin \sqrt{\lambda_n} t \cos \sqrt{\lambda_n} (x+t) dt dx \left. \right] \\
& - \frac{1}{2\pi^2\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{2\pi} V(x) \sin 2\sqrt{\lambda_n} x dx \\
& \times \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t) \sin^2 \sqrt{\lambda_n} (x+t) dt dx \right. \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(x) \int_0^{2\pi} V(t)(x-t) \sin \sqrt{\lambda_n} (x-t) \sin \sqrt{\lambda_n} (x+t) dt dx \\
& - 2 \int_0^{2\pi} V(x) \cos \sqrt{\lambda_n} x \int_0^x V(t) \sin \sqrt{\lambda_n} t \sin \sqrt{\lambda_n} (x+t) dt dx \left. \right] \\
& + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Подставляя выражения $b(\mu_n)$ и $c(\mu_n)$ в формулу (25), получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Ф. Ахмерова, Х. Х. Муртазин, “Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов”, *Докл. РАН*, **388**:6 (2003), 731–733.

- [2] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 897–912.
- [3] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **69**:3 (2001), 427–442.
- [4] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева”, *Матем. заметки*, **80**:6 (2006), 864–884.
- [5] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “Собственные значения и след оператора Штурма–Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала”, *Докл. РАН*, **365**:3 (1999), 295–297.
- [6] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ -функции”, *Докл. РАН*, **376**:4 (2001), 445–448.
- [7] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, “Следы операторов с относительно компактным возмущением”, *Матем. сб.*, **193**:2 (2002), 129–152.
- [8] Э. Ф. Ахмерова, “Асимптотика спектра для негладких возмущений дифференциальных операторов $2n$ -го порядка”, *Вестн. Башкирск. ун-та*, **1** (2005), 28–32.
- [9] Х. Х. Муртазин, В. А. Садовничий, Р. З. Тулькубаев, “Асимптотика спектра и формулы следов для дифференциальных операторов с неограниченными коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **44**:12 (2008), 1628–1637.
- [10] Э. Ф. Ахмерова, “Асимптотика спектра гармонического осциллятора, возмущенного негладким потенциалом”, *Изв. вузов. Матем.*, 2007, № 11, 71–74.
- [11] Э. Ф. Ахмерова, “Асимптотика спектра негладких возмущений гармонического осциллятора”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:6 (2008), 1216–1234.

Э. Ф. Ахмерова

Башкирский государственный университет, г. Уфа

E-mail: eakhmerova@yandex.ru

Поступило

27.04.2009

Исправленный вариант

25.02.2010