Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Лесик, Аттрактор неавтономного гиперболического уравнения с малым параметром, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 308–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm841>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 03:07:20

АТТРАКТОР НЕАВТОНОМНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

С. Л. Лесик

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассматривается гиперболическое уравнение вида

$$\varepsilon \partial_t^2 u + \gamma(t) \partial_t u - \Delta u + f(u, t) + \varphi(x, t) = 0 \quad (1)$$

при граничном условии Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ – малый параметр; функции $\gamma(t)$, $f(u, t)$, $\varphi(x, t)$ являются трансляционно-компактными функциями (см [1]) в пространствах, определяемых ниже.

Полагая малый параметр ε в уравнении (1) равным нулю, получаем параболическое уравнение вида

$$\gamma(t) \partial_t u - \Delta u + f(u, t) + \varphi(x, t) = 0. \quad (3)$$

В автономном случае уравнения типа (1) и (3) изучались в [2]–[4].

Введем некоторые обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим через Ξ_1 пространство $H^{1, \text{loc}}(\mathbb{R})$. *Топология в пространстве* Ξ_1 определяется следующим образом: последовательность $\{\gamma_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $\gamma(t)$ в Ξ_1 , если для любого интервала $[t_1, t_2]$

$$\|\gamma_n(s) - \gamma(s)\|_{H^1[t_1, t_2]}^2 ds \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через Ξ_2 пространство $C^{1, \text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Топология в пространстве* Ξ_2 задается следующим образом: последовательность $\{f_n(u, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $f(u, t)$ в Ξ_2 , если для любого компакта $K \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ имеет место сходимость $\|f_n(u, t) - f(u, t)\|_{C^1(K)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим через Ξ_3 пространство $W_2^{1, \text{loc}}(\mathbb{R}, L_2(\Omega))$. Последовательность $\{\varphi_n(x, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к $\varphi(x, t)$ в Ξ_3 , если для любого интервала $[t_1, t_2]$ имеет место сходимость

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\varphi_n(x, s) - \varphi(x, s)\|^2 ds \rightarrow 0, \quad \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t \varphi_n(x, s) - \partial_t \varphi(x, s)\|^2 ds \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $\gamma(t)$, принадлежащая пространству Ξ_1 , называется *трансляционно компактной* в Ξ_1 , если ее оболочка

$$\mathcal{H}_1(\gamma) = [T(t)\gamma(s) \mid t \in \mathbb{R}]_{\Xi_1}$$

компактна в Ξ_1 , где $[\cdot]_{\Xi_1}$ – замыкание в пространстве Ξ_1 , $T(t)\gamma(s) = \gamma(s+t)$ (см. [5], [6]).

Трансляционная компактность функций $f \in \Xi_2$ и $\varphi \in \Xi_3$, а также их оболочек $\mathcal{H}_2(f)$ и $\mathcal{H}_3(\varphi)$ определяются аналогично.

Предполагается, что функции $\gamma(t)$, $f(u, t)$, $\varphi(x, t)$ обладают следующими свойствами:

- i) $\gamma(t)$ – трансляционно компактна в Ξ_1 , $0 < \gamma_0 \leq \gamma(t) \leq \Gamma \ \forall t \in \mathbb{R}$ и $\dot{\gamma}(t) = \partial\gamma(t)/\partial t$ такова, что $|\dot{\gamma}(t)| \leq C$, где C некоторая положительная константа;
- ii) функция $\varphi(x, t)$ – трансляционно-компактна в пространстве Ξ_3 ;
- iii) функция $f(u, t)$ трансляционно-компактна в Ξ_2 и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} f(u, t) \cdot u &\geq -C - (\lambda_1 - \delta_1)u^2, & |f'_u(u, t)| &\leq C(1 + |u|)^p, \\ |f'_t(u, t)| &\leq C(1 + |u|)^{(p+1)}, \end{aligned}$$

где $p < 2$, $t \in \mathbb{R}$, $C > 0$; здесь λ_1 – первое собственное число оператора $-\Delta$ с однородным условием Дирихле на границе;

- iv) функция $F(u, t) = \int_0^u f(v, t) dv$ удовлетворяет неравенствам:

$$1) \quad F(u, t) \geq -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \delta_1)u^2 - \frac{1}{2}C_1,$$

где C_1, δ_1 – положительные константы;

$$2) \quad \alpha f(u, t)u \geq \delta_2 F(u, t) + F'_t(u, t) - C,$$

а константы δ_2 и α таковы, что

$$\alpha = \frac{\gamma_0 \lambda_1}{2\Gamma^2}, \quad \delta_2 < \gamma_0 \min \left(\frac{1}{\Gamma^2}; \frac{1}{\varepsilon_0} \right).$$

Обозначим через Ξ пространство $(\Xi_1 \times \Xi_2 \times \Xi_3)$. Вектор $\sigma(t) = (\gamma(t), f(u, t), \varphi(x, t))$ назовем *символом* уравнения (1). Рассмотрим оболочку функции $\sigma(t)$ в Ξ

$$\mathcal{H}(\sigma) = [T(t)\sigma(s) \mid t \in \mathbb{R}]_{\Xi},$$

где $[\cdot]_{\Xi}$ – замыкание в пространстве Ξ , $T(t)\sigma(s) = \sigma(s+t)$. Множество $\mathcal{H}(\sigma)$ назовем *оболочкой символа* σ . Так как $\mathcal{H}(\sigma) \subset \mathcal{H}_1(\gamma) \times \mathcal{H}_2(f) \times \mathcal{H}_3(\varphi)$, оболочка $\mathcal{H}(\sigma)$ компактна в Ξ .

Следуя [6], далее будем рассматривать семейство уравнений следующего вида:

$$\varepsilon \partial_t^2 u + \beta(t) \partial_t u - \Delta u + g(u, t) + \psi(x, t) = 0 \tag{4}$$

при граничном условии Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

где символ $\rho(t) = (\beta(t), g(u, t), \psi(x, t))$ уравнения (4) принадлежит оболочке $\mathcal{H}(\sigma)$.

Компоненты любого символа ρ из оболочки $\mathcal{H}(\sigma)$ удовлетворяет тем же условиям i)–iv) что и компоненты символа σ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть компоненты символа $\sigma = (\gamma(t), f(u, t), \varphi(x, t))$ удовлетворяют условиям i)–iv) и начальные условия

$$u|_{t=\tau} = u_\tau; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=\tau} = p_\tau \quad (6)$$

таковы, что $u_\tau \in H_0^1(\Omega)$ и $p_\tau \in L_2(\Omega)$. Тогда задача (4)–(6) однозначно разрешима в классе $C([\tau; T], H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)) \quad \forall T > \tau$ для любого $\rho(t) \in \mathcal{H}(\sigma)$.

Доказательство этой теоремы можно произвести методом, предложенным в [7].

Таким образом, корректно определен оператор $\mathcal{U}_\rho^\varepsilon(t, \tau)$ сдвига по траекториям решения задачи (4)–(6). Оператор $\mathcal{U}_\rho^\varepsilon(t, \tau)$, $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathcal{H}(\sigma)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, действует в пространстве $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ по формуле

$$\mathcal{U}_\rho^\varepsilon(t, \tau) \left(u(\tau), \frac{\partial u_\rho^\varepsilon}{\partial t}(\tau) \right) = \left(u_\rho^\varepsilon(t), \frac{\partial u_\rho^\varepsilon}{\partial t}(t) \right).$$

Кроме того, выполняется трансляционное тождество

$$\mathcal{U}_\rho^\varepsilon(t + s, \tau + s) = \mathcal{U}_{T(s)\rho}^\varepsilon(t, \tau)$$

для всякого $s \geq 0$.

Построим оператор $S_t(\varepsilon)$, по следующей формуле:

$$S_t(\varepsilon)(u_0, p_0, \rho) = \left(u_\rho^\varepsilon(t), \frac{\partial u_\rho^\varepsilon}{\partial t}(t), T(t)\rho \right),$$

где $u_\rho^\varepsilon(t)$ – решение задачи (4)–(6) с символом ρ и $\tau = 0$.

Нетрудно проверить, что таким образом определенный оператор $S_t(\varepsilon)$ является полугруппой, действующей из пространства $(E \times \Xi)$ в $(E \times \Xi)$, где $E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 2. При выполнении условий i)–iv) полугруппа $S_t(\varepsilon)$, определенная выше, для всякого ε , $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0$, обладает максимальным компактным в $(E \times \Xi)$ аттрактором $\mathcal{A}(\varepsilon)$. Кроме того, семейство аттракторов $\mathcal{A}(\varepsilon)$ равномерно по $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0$ ограничено в $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \Xi)$.

Рассмотрим семейство уравнений (4) при $\varepsilon = 0$:

$$\beta(t)\partial_t u - \Delta u + g(u, t) + \psi(x, t) = 0 \quad (7)$$

при граничном условии Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (8)$$

и начальном условии

$$u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad (9)$$

где $u_\tau \in H_0^1(\Omega)$, символ $\rho(t) = (\beta(t), g(u, t), \psi(x, t))$ принадлежит оболочке $\mathcal{H}(\sigma)$. Аналогично автономному случаю (см. [2]) для задачи (7)–(9) доказываются теорема о существовании решения. По процессу $\mathcal{U}_\rho$, соответствующему оператору сдвига по траекториям решений задачи (7), (8), строится полугруппа S_t , действующая в пространстве $H_0^1(\Omega) \times \Xi$.

ТЕОРЕМА 3. При выполнении условий i)–iv) полугруппа S_t обладает аттрактором $\mathcal{A}$, компактным в $H^2(\Omega) \cap H_0^1 \times \Xi$.

Определим множество $\mathcal{A}(0)$ следующим образом:

$$\mathcal{A}(0) = \left\{ (u(0), p(0), \rho(\cdot)) \mid u(t) \text{ — решение задачи (7), (8), лежащее на аттракторе } \mathcal{A}, \text{ т.е. } (u(0), \rho) \in \mathcal{A}; \quad p(t) = \frac{1}{\beta(t)}(\Delta u - g(u, t) - \psi) \right\}.$$

Тогда из теоремы 3 следует, что $\mathcal{A}(0)$ компактно в $H_0^1 \times L_2(\Omega) \times \Xi$.

ТЕОРЕМА 4. Семейство аттракторов $\mathcal{A}(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$, полунепрерывно сверху в точке $\varepsilon = 0$:

$$\text{dist}_{(E_1 \times \Xi)}(\mathcal{A}(\varepsilon), \mathcal{A}(0)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где через E_1 обозначено пространство $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Здесь

$$\text{dist}_{(E_1 \times \Xi)}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |a - b|_{(E_1 \times \Xi)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Обозначим через Π_1 оператор проектирования $E_1 \times \Xi$ на первую компоненту E_1 .

ТЕОРЕМА 5. Проекция $\Pi_1 \mathcal{A}(\varepsilon) = \mathcal{A}_1(\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, является равномерным по $\rho \in \mathcal{H}(\sigma)$ аттрактором для процесса $\mathcal{U}_\rho^\varepsilon$. Кроме того, семейство аттракторов $\mathcal{A}_1(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$, полунепрерывно сверху в точке $\varepsilon = 0$:

$$\text{dist}_{E_1}(\mathcal{A}_1(\varepsilon), \mathcal{A}_1(0)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М. И., Чепыжев В. В. // УМН. 1995. Т. 50. № 4. С. 151.
2. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
3. Hale J. K. Raugel G. // Annali Mat. Pura Appl. (IV). 1989. V. CLIV. P. 201–326.
4. Hale J. K. Raugel G. // J. Differential Equations. 1988. V. 73. № 2. P. 197–214.
5. Hale J. K. Raugel G. // J. Dynamics Differential Equations. 1990. V. 2. № 1. P. 19–67.
6. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. № 3. P. 279–333.
7. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.