Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бунина, Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:41:04

Аutomорфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами

Е. И. Бунина

В работе описываются автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц размера два над коммутативным частично упорядоченным кольцом с обратимой двойкой.

Библиография: 3 названия.

Пусть R – упорядоченное кольцо, $G_n(R)$ – подполугруппа группы $GL_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными элементами. В работе [1] Михалев и Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geq 2$. В работе [2] Бунина и Михалев описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, если R – произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geq 3$. В работе [3] Бунина и Семенов описали автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является коммутативным частично упорядоченным кольцом, содержащим $\mathbb{Q}$, $n \geq 3$.

В этой работе мы описываем автоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ для частично упорядоченных коммутативных колец с $1/2$. Полное описание (совпадающее с описанием при $n \geq 3$) получается для кольца, в котором каждый элемент является суммой конечного числа обратимых.

1. Необходимые определения и понятия, формулировка основной теоремы. Пусть R – ассоциативное (коммутативное) кольцо с 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Кольцо R называется *частично упорядоченным*, если на нем задано отношение частичного порядка $\leq$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\forall x, y, z \in R (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$;
- 2) $\forall x, y \in R (0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy)$.

Мы будем рассматривать такие частично упорядоченные кольца, в которых $1/2 \geq 0$.

Такие элементы r кольца R , для которых $0 \leq r$, называются *неотрицательными*. Множество всех неотрицательных элементов кольца R обозначается через R_+ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть R – частично упорядоченное кольцо. Через $G_n(R)$ обозначается подполугруппа группы $GL_n(R)$, состоящая из всех матриц с неотрицательными элементами.

Множество всех обратимых элементов кольца R обозначается через R^* . Если $1/2 \in R$, то множество R^* бесконечно, так как оно содержит все $1/2^n$ для $n \in \mathbb{N}$. Множество $R_+ \cap R^*$ обозначается через R_+^* . Если $1/2 \in R$, то оно также бесконечно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $I = I_2$, $\Gamma_2(R)$ – группа, состоящая из всех обратимых в $G_2(R)$ матриц, $\Sigma_2 = \{e, (12)\}$ – симметрическая группа порядка 2, S_σ – матрица перестановки $\sigma \in \Sigma_2$, в нашем случае таких матриц всего две: I и $S = S_{(12)}$; $S_2 = \{S_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_2\} = \{I, S\}$, $\text{diag}[d_1, d_2]$ – диагональная матрица с элементами d_1, d_2 на диагонали, $d_1, d_2 \in R_+^*$. Через $D_2(R)$ обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $G_2(R)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – подмножества в $G_2(R)$, то положим

$$C_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \{a \in \mathcal{A} \mid \forall b \in \mathcal{B} (ab = ba)\}.$$

Пусть E_{ij} – матричная единица.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Через $B_{ij}(x)$, $i \neq j$, обозначим матрицу $I + xE_{ij}$. Через $\mathbf{P}$ обозначаем подполугруппу в $G_2(R)$, порожденную матрицами S , $B_{ij}(x)$ ($x \in R_+$, $i \neq j$) и $\text{diag}[\alpha_1, \alpha_2] \in D_2(R)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Две матрицы $A, B \in G_2(R)$ называются $\mathcal{P}$ -эквивалентными (см. [1]), если существуют матрицы $A_j \in G_2(R)$, $j = 0, \dots, k$, $A = A_0, B = A_k$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \dots, k-1$, такие, что $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Через $\text{GE}_2^+(R)$ обозначим подполугруппу в $G_2(R)$, порожденную всеми матрицами, $\mathcal{P}$ -эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Если G – некоторая полугруппа, то гомоморфизм $\lambda(\cdot): G \rightarrow G$ называется *центральной гомоморфизмом* G , если $\lambda(G) \subset Z(G)$. Отображение $\Omega(\cdot): G \rightarrow G$ такое, что $\forall X \in G$

$$\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X,$$

где $\lambda(\cdot)$ – центральный гомоморфизм, называется *центральной гомотетией*.

Для каждой матрицы $M \in \Gamma_2(R)$ пусть Φ_M обозначает автоморфизм полугруппы $G_2(R)$ такой, что $\forall X \in G_2(R)$ $\Phi_M(X) = MXM^{-1}$. Для каждого $y(\cdot) \in \text{Aut}(R_+)$ через Φ^y обозначим автоморфизм полугруппы $G_2(R)$ такой, что $\forall X = (x_{ij}) \in G_2(R)$ $\Phi^y(X) = \Phi^y((x_{ij})) = (y(x_{ij}))$.

Основным результатом этой работы является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть Φ – автоморфизм полугруппы $G_2(R)$, $1/2 \in R$, R – коммутативное частично упорядоченное кольцо, для которого R_+ порождается неотрицательными обратимыми элементами кольца R . Тогда на полугруппе $\text{GE}_2^+(R)$

$$\Phi = \Phi_M \circ \Phi^c \circ \Omega,$$

где $M \in \Gamma_2(R)$, $c(\cdot) \in \text{Aut}(R_+)$, а $\Omega(\cdot)$ – центральная гомотетия полугруппы $\text{GE}_2^+(R)$.

2. Построение автоморфизма Φ' . В этом пункте мы предполагаем, что фиксирован некоторый автоморфизм $\Phi \in \text{Aut}(G_2(R))$, $1/2 \in R$, и с помощью него строим новый автоморфизм $\Phi' \in \text{Aut}(G_2(R))$ такой, что $\Phi' = \Phi_{M'} \circ \Phi$ для некоторой матрицы $M' \in \Gamma_2(R)$ и $\Phi'(S) = S$.

ЛЕММА 1 [3]. Имеем $\forall x, y \in R_+ (x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0)$.

ЛЕММА 2 (ср. с леммой 2 работы [3]). Если Φ – автоморфизм полугруппы $G_2(R)$, $1/2 \in R$, то

- 1) $\Phi(\Gamma_2(R)) = \Gamma_2(R)$,
- 2) $\Phi(D_2(R)) = D_2(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $\Gamma_2(R)$ является подгруппой всех обратимых матриц полугруппы $G_2(R)$, то $\Phi(\Gamma_2(R)) = \Gamma_2(R)$.

2) Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ всех матриц $A \in \Gamma_2(R)$, коммутирующих со всеми матрицами, сопряженными к A .

Рассмотрим

$$B = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2] \in D_2(R).$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma_2(R), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma_2(R).$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^2 a'_{ik} \cdot a_{kj} = 0 \quad \text{для } i \neq j.$$

Значит, $a'_{ik} \cdot a_{kj} = 0$ для $i \neq j$ (по лемме 1). Тогда $A^{-1}BA \in D_2(R)$ – диагональная матрица, поэтому $D_2(R) \subset \mathcal{F}$.

Пусть существует матрица $C \in \mathcal{F} \setminus D_2(R)$,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Сопряжем C с помощью матрицы $\text{diag}[d, 1]$. Сопряженная матрица (C') имеет вид

$$C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}d^{-1} \\ c_{21}d & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Используя соотношение $CC' = C'C$, получаем $c_{11}^2 + c_{12}c_{21}d = c_{11}^2 + c_{21}c_{12}d^{-1}$. Если взять $d = 2$, то получим

$$0 = 3 \cdot (c_{12}c_{21}) = c_{12}c_{21} + c_{12}c_{21} + c_{12}c_{21},$$

откуда $c_{12}c_{21} = 0$. Пусть

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$0 = \gamma_{11}c_{12} + \gamma_{12}c_{22},$$

откуда

$$\gamma_{11}c_{12} = 0.$$

Кроме того,

$$1 = \gamma_{11}c_{11} + \gamma_{12}c_{21}.$$

Домножив это равенство на c_{12} , получим $c_{12} = 0$. Аналогично, $c_{21} = 0$. Таким образом, $\mathcal{F} = D_2(R)$ и, значит, $\Phi(D_2(R)) = D_2(R)$.

ЛЕММА 3. *Если Φ является автоморфизмом полу группы $G_2(R)$, то существует матрица $M \in \Gamma_2(R)$ такая, что $\Phi_M \Phi(S) = S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \Phi(S),$$

для нее $A^2 = I$. Следовательно, $ab + db = 0$, откуда (по лемме 1) $ab = 0$. С другой стороны, $a^2 + bc = 1$. Домножив это равенство на a^2 , получим $(a^2)^2 = a^2$. Значит, a^2 является идемпотентом, а следовательно, $e_1 = a^2$ и $e_2 = bc$ — это ортогональные идемпотенты, в сумме дающие 1 (может быть, какой-то из этих идемпотентов нулевой). Мы знаем, что $S \cdot \text{diag}[\alpha, \beta] \neq \text{diag}[\alpha, \beta] \cdot S$ ни для каких обратимых $\alpha \neq \beta$ (так как сопряжение матрицей S диагональной матрицы меняет местами элементы диагонали). Значит, так как по лемме 2 диагональные матрицы переходят в диагональные, то же самое верно для матрицы A . Возьмем $\alpha = 1 = a^2 + bc$ и $\beta = a^2/2 + bc$. Тогда α и β обратимы и $A \cdot \text{diag}[\alpha, \beta] = \text{diag}[\alpha, \beta] \cdot A$. Значит, $\alpha = \beta$, т.е. $a^2 = 0$. Следовательно, $bc = 1$. Так как $abc = 0$, то $a = 0$. Аналогично, $d = 0$. Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

После сопряжения матрицы A с помощью диагональной матрицы $M^{-1} = \text{diag}[b, 1]$, мы получим матрицу S . Таким образом, мы нашли матрицу $M \in \Gamma_2(R)$ такую, что $\Phi_M \Phi(S) = S$.

По нашему автоморфизму Φ мы построили новый автоморфизм $\Phi' = \Phi_M \Phi$ такой, что $\Phi'(S) = S$. Предположим, что такой автоморфизм Φ' фиксирован.

ЛЕММА 4. *В наших предположениях для любых $x_1, x_2 \in R_+^*$ таких, что $x_1 \neq x_2$,*

$$\Phi'(A_1) = \Phi'(\text{diag}[x_1, 1]) = \text{diag}[\xi_1, \eta_1],$$

$$\Phi'(A_2) = \Phi'(\text{diag}[x_2, 1]) = \text{diag}[\xi_2, \eta_2],$$

где $\xi_1\eta_1^{-1} \neq \xi_2\eta_2^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторых различных $x_1, x_2 \in R_+^*$ имеет место $\xi_1\eta_1^{-1} = \xi_2\eta_2^{-1}$, т.е.

$$\Phi'(A_1) = \Phi'(\text{diag}[x_1, 1]) = \text{diag}[\xi, \eta] = A'_1,$$

$$\Phi'(A_2) = \Phi'(\text{diag}[x_2, 1]) = \alpha \cdot \text{diag}[\xi, \eta] = A'_2.$$

Значит, $\Phi'^{-1}(\alpha I) = \Phi'^{-1}(A'_1 A'_2{}^{-1}) = \text{diag}[x_1 x_2^{-1}, 1] = \text{diag}[\beta, 1]$, где $1 \neq \beta \in R_+^*$, что невозможно. Таким образом, $\xi_1\eta_1^{-1} \neq \xi_2\eta_2^{-1}$.

3. Основная теорема. В этом пункте мы докажем основную теорему.

ЛЕММА 5. В наших предположениях для автоморфизма $\Phi' \in \text{Aut}(G_2(R))$ тако-
го, что $\Phi'(S) = S$, $\lambda \in R_+$,

$$\Phi'(B_{12}(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & b_\lambda \\ c_\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } b_\lambda c_\lambda = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\Phi'(B_{12}(\lambda)) = \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \in G_2(R).$$

Пусть для каждого $x \in R_+^*$

$$\Phi'(\text{diag}[x, 1]) = \text{diag}[\xi(x), \eta(x)], \quad \xi(x), \eta(x) \in R_+^*.$$

Тогда для любого $x \in (R_+)^*$

$$\begin{aligned} \Phi'(B_{12}(x\lambda)) &= \Phi'(\text{diag}[x, 1]B_{12}(\lambda)\text{diag}[x^{-1}, 1]) \\ &= \text{diag}[\xi(x), \eta(x)] \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \text{diag}[\xi(x)^{-1}, \eta(x)^{-1}] = \begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(x)b_\lambda \\ \nu(x)^{-1}c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

для $\nu(x) = \xi(x)\eta(x)^{-1}$.

По лемме 4 для $x_1 \neq x_2$ имеем $\nu(x_1) \neq \nu(x_2)$. Для каждого $x \in R_+$ $\Phi'(B_{12}(\lambda))$ и $\Phi'(B_{12}(x\lambda))$ коммутируют. Напишем это условие в матричной форме для $x \in (R_+)^*$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(x)b_\lambda \\ \nu(x)^{-1}c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(x)b_\lambda \\ \nu(x)^{-1}c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a_\lambda^2 + \frac{b_\lambda c_\lambda}{\nu(x)} & \nu(x)a_\lambda b_\lambda + b_\lambda d_\lambda \\ a_\lambda c_\lambda + \frac{c_\lambda d_\lambda}{\nu(x)} & \nu(x)c_\lambda b_\lambda + d_\lambda^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_\lambda^2 + \nu(x)b_\lambda c_\lambda & a_\lambda b_\lambda + \nu(x)b_\lambda d_\lambda \\ \frac{a_\lambda c_\lambda}{\nu(x)} + c_\lambda d_\lambda & \frac{b_\lambda c_\lambda}{\nu(x)} + d_\lambda^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\nu(x)^{-1}b_\lambda c_\lambda = \nu(x)b_\lambda c_\lambda$ для различных $x \in R_+^*$. Так как в том числе $\nu(x) = 2$ для некоторого x , то

$$0 = \frac{3}{2} b_\lambda c_\lambda = \frac{1+1+1}{2} b_\lambda c_\lambda,$$

откуда $b_\lambda c_\lambda = 0$.

Используем условие $(B_{12}(\lambda))^2 = \text{diag}[2, 1] \cdot B_{12}(\lambda) \cdot \text{diag}[1/2, 1]$:

$$\begin{pmatrix} a_\lambda^2 & b_\lambda(a_\lambda + d_\lambda) \\ c_\lambda(a_\lambda + d_\lambda) & d_\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(2)b_\lambda \\ \nu(2)^{-1}c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix},$$

из которого следует $a_\lambda^2 = a_\lambda$, $d_\lambda^2 = d_\lambda$.

Таким образом,

$$\Phi'(B_{12}(\lambda)) = \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_\lambda^2 = a_\lambda, \quad d_\lambda^2 = d_\lambda, \quad b_\lambda c_\lambda = 0.$$

Вспомним, что эта матрица обратима во всем матричном кольце $M_2(R)$, т.е. существуют (не обязательно неотрицательные) элементы $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ такие, что

$$\begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} = I.$$

Следовательно, $a_\lambda \alpha + c_\lambda \beta = a_\lambda \alpha + b_\lambda \gamma = 1$. Значит, $(a_\lambda \alpha) b_\lambda = b_\lambda$, $(a_\lambda \alpha) c_\lambda = c_\lambda$. Домножая эти равенства на a_λ , мы получаем $a_\lambda b_\lambda = b_\lambda$, $a_\lambda c_\lambda = c_\lambda$. Домножая теперь равенство $a_\lambda \alpha + c_\lambda \beta = 1$ на a_λ , мы получим $a_\lambda = 1$. Аналогично, $d_\lambda = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Для любых $\lambda, \mu \in R_+$

$$b_\lambda c_\mu = b_\mu c_\lambda = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & b_\lambda \\ c_\lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & b_\mu \\ c_\mu & 1 \end{pmatrix}$$

является образом матрицы $B_{12}(\lambda + \mu)$, поэтому тоже должно иметь единицы на диагонали. Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 7. Существуют такие ортогональные идемпотенты $\theta, 1 - \theta \in R_+$, что

$$\Phi'(B_{12}(\theta)) = B_{12}(b_1), \quad \Phi'(B_{12}(1 - \theta)) = B_{21}(c_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим все матрицы полугруппы $G_2(R)$, коммутирующие с $B_{12}(1)$ и сопряженные своему квадрату. Очевидно, что это как раз матрицы $B_{12}(x)$, $x \in R_+$, и только они. Значит, все матрицы, коммутирующие с $\Phi'(B_{12}(1))$ и сопряженные своему квадрату, должны иметь прообраз при автоморфизме Φ' вида $B_{12}(y)$. Заметим, что матрица $B_{12}(b_1)$ коммутирует с $\Phi'(B_{12}(1))$ и сопряжена своему квадрату. Значит, $B_{12}(b_1) = \Phi'(B_{12}(\theta))$. Аналогично, $B_{21}(c_1) = \Phi'(B_{12}(\theta'))$. Так как $B_{12}(b_1)B_{21}(c_1) = \Phi'(B_{12}(1))$, то $\theta + \theta' = 1$. Матрица $B_{12}(c_1) = SB_{21}(c_1)S$ коммутирует с матрицей $B_{12}(b_1)$, откуда следует, что $B_{21}(\theta')$ коммутирует с $B_{12}(\theta)$. Значит, $\theta \cdot \theta' = 0$. Следовательно, θ и $1 - \theta$ являются идемпотентами, что и требовалось.

ЛЕММА 8. Существует такая обратимая матрица $M' \in \Gamma_2(R)$, что для автоморфизма $\Phi'' = \Phi_{M'} \circ \Phi'$ выполнены следующие условия:

- 1) $\Phi''(S) = S$;
- 2) существует такое $\lambda \in R_+$, что $\Phi''(B_{12}(\lambda)) = B_{12}(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что рассматриваемый нами в предыдущих леммах автоморфизм Φ' удовлетворял только одному условию: $\Phi'(S) = S$. Очевидно, что и обратный автоморфизм Φ'^{-1} удовлетворяет тому же условию, а значит, для него выполняется утверждение леммы 7. Это означает, что существуют элементы $b, c \in R_+$, для которых

$$\Phi'(B_{12}(b)) = B_{12}(\theta), \quad \Phi'(B_{12}(c)) = B_{21}(1 - \theta),$$

где $\theta, 1 - \theta$ – неотрицательные идемпотенты кольца R .

Рассмотрим матрицу

$$M' = \begin{pmatrix} \theta & 1 - \theta \\ 1 - \theta & \theta \end{pmatrix}.$$

Она обратима (обратна самой себе) и композиция $\Phi'' = \Phi_{M'} \circ \Phi'$ обладает указанным в условии леммы свойством. Лемма доказана.

Теперь мы можем считать фиксированным автоморфизм Φ'' со свойствами из леммы 8.

ЛЕММА 9. *Для автоморфизма Φ'' и элемента λ из предыдущей леммы выполнены следующие условия:*

- 1) λ не является делителем нуля в R_+ ;
- 2) $\Phi''(\text{diag}[2, 1/2]) = \text{diag}[2, 1/2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря возможности для каждого автоморфизма рассматривать обратный, мы можем считать, что $B_{12}(1)$ переходит в $B_{12}(\lambda)$. Заметим, что централизатор матрицы $B_{12}(1)$ состоит из матриц вида $aB_{12}(b)$, $a \in R_+^*$, $b \in R_+$. Централизатор любой матрицы, коммутирующей с $B_{12}(1)$, обязательно содержит в себе централизатор матрицы $B_{12}(1)$. Понятно, что это свойство должно сохраняться и для образа матрицы $B_{12}(1)$, т.е. для матрицы $B_{12}(\lambda)$. С матрицей $B_{12}(\lambda)$ коммутирует матрица $B_{12}(1)$, значит, их централизаторы должны совпадать. Таким образом, не существует матрицы, не имеющей вид $aB_{12}(b)$ и коммутирующей с $B_{12}(\lambda)$. Однако если существует такое ненулевое $\mu \in R_+$, что $\mu\lambda = 0$, то $B_{21}(\mu)$ и $B_{12}(\lambda)$ коммутируют. Значит, λ не может быть делителем нуля в R_+ .

Теперь рассмотрим матрицу $\Phi''(\text{diag}[2, 1])$. Это некоторая диагональная матрица $\text{diag}[\alpha, \beta]$. Благодаря свойству

$$\text{diag}[2, 1]B_{12}(1)\text{diag}[2, 1]^{-1} = B_{12}(1)^2$$

имеем

$$\text{diag}[\alpha, \beta]B_{12}(\lambda)\text{diag}[\alpha, \beta]^{-1} = B_{12}(\lambda)^2,$$

откуда

$$\frac{\alpha\lambda}{\beta} = 2\lambda.$$

Так как λ по доказанному не является делителем нуля, то $\alpha = 2\beta$. Таким образом, $\Phi''(\text{diag}[2, 1]) = \text{diag}[2\beta, \beta]$.

Значит,

$$\begin{aligned} \Phi''\left(\text{diag}\left[2, \frac{1}{2}\right]\right) &= \Phi''(\text{diag}[2, 1] \cdot (S \text{diag}[2, 1]S)^{-1}) = \text{diag}[2\beta, \beta](S \text{diag}[2\beta, \beta]S)^{-1} \\ &= \text{diag}[2\beta, \beta] \text{diag}\left[\beta^{-1}, \frac{\beta^{-1}}{2}\right] = \text{diag}\left[2, \frac{1}{2}\right], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 10. *Элемент λ , построенный в леммах 8, 9, удовлетворяет условию $\lambda^2 = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В полугруппе $G_2(R)$ выполняется равенство

$$B_{12}(1)B_{21}(1) = \text{diag}\left[2, \frac{1}{2}\right] B_{21}(2)B_{12}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Значит (благодаря доказанному в предыдущей лемме условию $\Phi''(\text{diag}[2, 1/2]) = \text{diag}[2, 1/2]$), имеем

$$B_{12}(\lambda)B_{21}(\lambda) = \text{diag}\left[2, \frac{1}{2}\right] B_{21}(2\lambda)B_{12}\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

что дает условие $1 + \lambda^2 = 2$, т.е. $\lambda^2 = 1$.

Начиная с этого момента, мы будем считать, что полукольцо R_+ порождается своими обратимыми неотрицательными элементами (они могут быть обратимы даже не в полукольце R_+ , а только во всем кольце R).

ЛЕММА 11. Для рассматриваемого автоморфизма Φ'' существуют автоморфизм $\gamma: R_+ \rightarrow R_+$ полукольца R_+ и гомоморфизм $\beta: R_+^* \rightarrow R_+^*$ полугруппы R_+^* всех неотрицательных обратимых элементов кольца R такие, что

- 1) $\Phi''(S) = S$;
- 2) $\Phi''(B_{12}(x)) = B_{12}(\lambda\gamma(x))$;
- 3) $\Phi''(\text{diag}[a, b]) = \text{diag}[\gamma(a)\beta(ab), \gamma(b)\beta(ab)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим образ произвольной матрицы $\text{diag}[a, 1]$, $a \in R_+^*$. Это некоторая матрица $\text{diag}[\alpha, \beta]$. Обозначим соответствующие отображения $a \mapsto \alpha$ и $a \mapsto \beta$ через $\alpha, \beta: R_+^* \rightarrow R_+^*$. Понятно, что оба этих отображения мультипликативны.

По построению

$$\begin{aligned} \Phi''(\text{diag}[a, b]) &= \Phi''(\text{diag}[a, 1] \text{diag}[1, b]) = \Phi''(\text{diag}[a, 1]S \text{diag}[b, 1]S) \\ &= \text{diag}[\alpha(a), \beta(a)] \text{diag}[\beta[b], \alpha(b)] = \text{diag}[\alpha(a)\beta(b), \alpha(b)\beta(a)]. \end{aligned}$$

Кроме того, нам известно, что для любого $x \in R_+$ $\Phi''(B_{12}(x)) = B_{12}(y)$ для некоторого $y \in R_+$. Обозначим отображение $x \mapsto y/\lambda$ через $\gamma: R_+ \rightarrow R_+$. Мы знаем, что

- 1) отображение γ биективно (так как Φ'' биективно);
- 2) $\gamma(1) = 1$;
- 3) γ аддитивно, так как из $B_{12}(x_1 + x_2) = B_{12}(x_1)B_{12}(x_2)$ следует

$$B_{12}(\lambda\gamma(x_1 + x_2)) = B_{12}(\lambda\gamma(x_1))B_{12}(\lambda\gamma(x_2)) = B_{12}(\lambda(\gamma(x_1) + \gamma(x_2))).$$

Пусть $x \in R_+^*$. Тогда имеем

$$\text{diag}[x, x]B_{12}(x) = \text{diag}[x, 1]B_{12}(1) \text{diag}[1, x],$$

откуда

$$\text{diag}[\alpha(x)\beta(x), \alpha(x)\beta(x)]B_{12}(\lambda\gamma(x)) = \text{diag}[\alpha(x), \beta(x)]B_{12}(\lambda) \text{diag}[\beta(x), \alpha(x)],$$

т.е.

$$\alpha(x)\beta(x)\lambda\gamma(x) = \alpha(x)^2\lambda.$$

Следовательно,

$$\gamma(x) = \alpha(x)\beta(x)^{-1}$$

и для каждого элемента $x \in R_+^*$ мы можем теперь писать

$$\Phi''(\text{diag}[x, 1]) = \text{diag}[\gamma(x)\beta(x), \beta(x)].$$

Так как отображения α и β мультипликативны, отображение γ мультипликативно на обратимых (в кольце R) элементах. Так как неотрицательные обратимые элементы кольца R по нашему условию порождают полукольцо R_+ , а отображение γ по доказанному аддитивно, то γ мультипликативно на всех элементах полукольца R_+ , а значит, является его автоморфизмом.

Таким образом, все пункты леммы доказаны.

ЛЕММА 12. *На полугруппе $\text{GE}_2^+(R)$ автоморфизм Φ'' является композицией автоморфизма, индуцированного автоморфизмом полукольца R_+ , центральной гомотетии и внутреннего автоморфизма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим автоморфизм $\Phi''' = \Phi^{\gamma^{-1}} \circ \Phi''$. Пусть $\gamma^{-1}(\lambda) = \xi$. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi'''(S) &= S, & \Phi'''(B_{12}(x)) &= \Phi^{\gamma^{-1}}(B_{12}(\lambda\gamma(x))) = B_{12}(\gamma^{-1}(\lambda)x) = B_{12}(\xi x), \\ \Phi'''(\text{diag}[a, b]) &= \Phi^{\gamma^{-1}}(\text{diag}[\gamma(a)\beta(ab), \gamma(b)\beta(ab)]) = \text{diag}[a\gamma^{-1}\beta(ab), b\gamma^{-1}\beta(ab)].\end{aligned}$$

Обозначим $\gamma^{-1}\beta$ через μ . Тогда $\Phi'''(\text{diag}[a, b]) = \mu(ab) \text{diag}[a, b]$.

Теперь рассмотрим новый автоморфизм $\Phi'''' = \Phi_{\text{diag}[\xi, 1]} \circ \Phi'''$. Ясно, что

$$\Phi''''(S) = \xi S, \quad \Phi''''(B_{12}(x)) = B_{12}(x), \quad \Phi''''(\text{diag}[a, b]) = \mu(ab) \text{diag}[a, b].$$

Ясно, что на полугруппе $\text{GE}_n^+(R)$ автоморфизм Φ'''' является центральной гомотетией. Мы не приводим подробное доказательство этого факта, потому что полностью аналогичные (и подробные) доказательства проводились в работах [1]–[3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Теперь основная теорема легко следует из леммы 12, если учесть, что переход от изначального автоморфизма Φ к автоморфизму Φ'' происходил с помощью сопряжения матрицей из $\Gamma_n(R)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Михалёв, М. А. Шаталова, “Аutomорфизмы и антиавтоморфизмы, полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами”, *Матем. сб.*, **81:4** (1970), 600–609.
- [2] Е. И. Бунина, А. В. Михалёв, “Аutomорфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11:2** (2005), 3–23.
- [3] Е. И. Бунина, П. П. Семёнов, “Аutomорфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над коммутативными частично упорядоченными кольцами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14:2** (2008), 69–100.

Е. И. Бунина

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: helenbunina@yandex.ru

Поступило

02.02.2009

Исправленный вариант

13.03.2011