Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ботиров, Периодические основные состояния одного гамильтониана на дереве Кэли, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 624–627

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:17:46

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Периодические основные состояния одного гамильтониана на дереве Кэли

Г. И. Ботиров

Дерево Кэли. Дерево Кэли $\mathfrak{Z}^k$ порядка $k \geq 1$ – бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Пусть $\mathfrak{Z}^k = (V, L, i)$, где V – множество вершин $\mathfrak{Z}^k$, L – его множество ребер и i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями* и обозначаются $\langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V : \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}.$$

Известно, что существует взаимнооднозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , представляющее собой свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ [1].

Пространство конфигураций. Пусть $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$. Тогда *конфигурация* s на V определяется как функция $x \in V \rightarrow s(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A , принимающих значения из $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$.

Мы определяем F_k – *периодическую конфигурацию* как конфигурацию $\sigma(x)$, которая является инвариантной относительно подгруппы $F_k \subset G_k$ конечного индекса, т.е.

$$\sigma(yx) = \sigma(x) \quad \text{для всех } x \in G_k, y \in F_k.$$

Для данной периодической конфигурации индекс подгруппы называется *периодом конфигурации*. Конфигурация, которая является инвариантной относительно всех сдвигов, называется *трансляционно-инвариантной*.

Модель. В работе Розикова [2] вводится обобщенный символ Кронекера как функция

$$U(\sigma_A): \Omega_A \rightarrow \{|A| - 1, |A| - 2, \dots, |A| - \min\{|A|, |\Phi|\}\},$$

определенная следующим образом:

$$U(\sigma_A) = |A| - |\sigma_A \cap \Phi|, \tag{1}$$

где $A \subset V$ и $|\sigma_A \cap \Phi|$ – число различных значений $\sigma_A(x)$, $x \in A$. Например, если σ_A является постоянной конфигурацией, то $|\sigma_A \cap \Phi| = 1$.

Отметим, что если $|A| = 2$, скажем $A = \{x, y\}$, то $U(\{\sigma(x), \sigma(y)\}) = \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$,

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} = \begin{cases} 1, & \sigma(x) = \sigma(y), \\ 0, & \sigma(x) \neq \sigma(y). \end{cases}$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $r' = [(r+1)/2]$, где $[a]$ – целая часть a . Обозначим через M_r множество всех шаров $b_r(x) = \{y \in V \mid d(x, y) \leq r'\}$ с радиусом r' , т.е. $M_r = \{b_r(x) \mid x \in V\}$.

Гамильтониан модели Розикова [2] определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = -J \sum_{b \in M_r} U(\sigma_b), \quad (2)$$

где $J \in \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Конфигурация φ называется *основным состоянием* для H , если

$$U(\varphi_b) = U^{\min} = \min\{U(\sigma_b) \mid \sigma_b \in \Omega_b\} \quad \text{для всех } b \in M_r.$$

Основная проблема для данного гамильтониана – это описание всех отвечающих ему основных состояний и меры Гиббса. Эта проблема полностью решается лишь в отдельных, сравнительно простых, случаях [3], [4].

В работах [5], [6] рассмотрены модели Изинга и Поттса с тремя значениями спина и с конкурирующими взаимодействиями радиуса два на дереве Кэли порядка два. Дано полное описание множества основных состояний этих моделей. Данная работа посвящена описанию периодических основных состояний модели (2) при $r = 2$.

Пусть $GS(H)$ – множество всех основных состояний, а $GS_p(H)$ – множество всех периодических основных состояний.

ТЕОРЕМА 1. а) Если $J > 0$, то для любых $r \geq 1$ и $k \geq 2$ множество $GS(H)$ имеет вид

$$\{\sigma^{(i)}, i = 1, 2, \dots, s\}, \quad \text{где } \sigma^{(i)} \equiv i,$$

для всех $x \in V$.

б) Пусть $r = 2$, $J < 0$, $q \geq 2^m$ и $k \in \{2^{m-1} - 1, \dots, q - 2\}$, $m = 3, 4, \dots$; тогда существует нормальный делитель F индекса 2^m такой, что любая F -периодическая конфигурация σ будет основным состоянием для гамильтониана H , т.е. $\sigma \in GS_p(H)$.

в) Пусть $J < 0$; тогда существует нормальный делитель F_0 индекса r (где r удовлетворяет $(2 \cdot 3^k)^{k+1} \leq r \leq (2 \cdot 6^k)^{k+1}$) такой, что любая F_0 -периодическая конфигурация σ будет основным состоянием для гамильтониана H , т.е. $\sigma \in GS_p(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Легко следует из (1), (2) в силу определения 1.

б) Так как $J < 0$, то для того, чтобы получить основное состояние, надо рассмотреть конфигурации σ с условием, что $U(\sigma_b) = 0$ для всех $b \in M$, т.е. на любом шаре $b \in M$ конфигурация должна принимать различные значения. Поэтому мы построим нормальный делитель индекса 2^m такой, что классы элементов множества $S_1(e) = \{e, a_1, \dots, a_{k+1}\}$ различны, т.е. разбиение на смежные классы любого $b \in M$ относительно H содержит $|b| = k + 2$ различных класса. Так как $k + 2 \leq q$, то имеем $k \leq q - 2$. Рассмотрим нормальный делитель F индекса 2^m , имеющий вид

$$F = F_{A_1} \cap \dots \cap F_{A_m}, \quad \text{где } F_{A_i} = \left\{ x \in G_k \mid \sum_{j \in A_i} \omega_j(x) \text{ чётно} \right\},$$

и число букв a_i , $i = 1, \dots, k + 1$, участвующих в несократимой записи слова x , обозначим через $\omega_j(x)$, $A_i \subset \{1, \dots, k + 1\}$, $i = 1, \dots, m$. Теперь построим A_i , $i = 1, \dots, m$, так, чтобы все элементы любого шара $b \in M$ были из различных классов.

Рассмотрим все возможные конфигурации $\alpha: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{\text{ч}, \text{н}\}$ (где “ч” обозначает “чётно” и “н” обозначает “нечётно”). Заметим, что число таких конфигураций равно 2^m . Из них выберем половину, т.е. 2^{m-1} штук, конфигураций со следующими свойствами:

либо число букв “ч” в конфигурации больше числа букв “н”, либо число букв “ч” в конфигурации равно числу букв “н” и среди последних не существует совпадающих при замене букв “ч” на буквы “н”. Обозначим эти 2^{m-1} штук конфигураций через

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \{\text{ч}, \text{ч}, \text{ч}, \dots, \text{ч}\} = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{0m}), \\ \alpha_1 &= \{\text{н}, \text{ч}, \text{ч}, \dots, \text{ч}\} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1m}), \\ \alpha_2 &= \{\text{ч}, \text{н}, \text{ч}, \dots, \text{ч}\} = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2m}), \\ \alpha_3 &= \{\text{ч}, \text{ч}, \text{н}, \dots, \text{ч}\} = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \dots, \alpha_{3m}), \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_{2^{m-1}-1} &= \{\text{н}, \text{ч}, \text{ч}, \dots, \text{н}\} = (\alpha_{2^{m-1}-1,1}, \alpha_{2^{m-1}-1,2}, \dots, \alpha_{2^{m-1}-1,m}).\end{aligned}$$

Множества A_i , $i = 1, 2, \dots, m$, можно определить следующим образом:

$$A_i = \{j \in \{1, 2, \dots, k\} \mid \alpha_{ji} \text{ нечетно}\} \cup \{k+1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Заметим, что A_i , $i = 1, 2, \dots, m$, имеют смысл, если $k+1 \geq 2^{m-1}$, т.е. $k \geq 2^{m-1} - 1$. Проверим, что $F = F_{A_1} \cap \dots \cap F_{A_m}$, построенное на основе множеств (3), удовлетворяет всем условиям теоремы. Сначала докажем, что $S_1(e)$ разбивается на различные классы.

Обозначим

$$S_1(x) = \{y \in V \mid d(x, y) = 1\} = \{x, xa_1, \dots, xa_{k+1}\}, \quad \gamma_i(x) = |S_1(x) \cap F_i|.$$

Достаточно доказать, что $\gamma_i(x) = 0$ или 1 для любого $x \in V$ и $i = 1, \dots, m$. По построению ясно, что $\gamma_i(e) \in \{0, 1\}$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$. Следовательно, классы элементов множества $S_1(e)$ различны и эти классы не совпадают с классом, содержащим e (т.е. H_0). Тогда в силу теоремы 3 [7] элементы множества $S_1(x)$ будут из различных классов. В силу теоремы 1 [7] имеем $x \sim xa_i$ (т.е. x и xa_i принадлежат одному классу) тогда и только тогда, когда $e \sim a_i$. Так как по нашему построению $e \sim a_i$ для всех $i = 1, \dots, k+1$, то имеем $x \sim xa_i$; следовательно, все элементы $S_1(x) \cup \{x\}$ из различных классов, т.е. $\gamma_i(x) = 0$ или 1.

в) Известно, что для любого $x \in G_k \setminus \{e\}$ существует нормальный делитель F_x конечного индекса группы G_k такой, что $x \notin F_x$. Для $A \in G_k$ мы обозначим

$$A^* = \{z \in G_k \mid \exists x, y \in A : z = xy^{-1}\}.$$

Пусть $A = \{e, a_1, \dots, a_{k+1}\}$, тогда

$$A^* = A \cup \{a_i a_j, i \neq j, i = 1, \dots, k+1, j = 1, \dots, k+1\}.$$

Обозначим

$$F_0 = \bigcap_{x \in A^* \setminus \{e\}} F_x;$$

в силу утверждения 5.1 работы [8] F_0 удовлетворяют всем условиям, указанным в пункте в). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r = 2$, тогда

$$|GS_p(H)| = \begin{cases} q, & \text{если } J > 0, \\ C_q^{k+2}(k+2)!, & \text{если } J < 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый случай тривиален. Во втором случае для данной конфигурации φ_b , при которой энергия $U(\varphi_b)$ минимальна, с помощью теоремы 1 можно построить периодическую конфигурацию σ с периодом 2^m . Для каждого случая точное число таких основных состояний совпадает с числом различных конфигураций σ_b таких, что энергия $U(\sigma)$ минимальна для любого $b \in M$. Теорема доказана.

Основные результаты данной работы получены в International Center for Theoretical Physics (ICTP). Автор благодарит ICTP (Триест, Италия) за финансовую поддержку пребывания в ICTP с 6 по 20 июля 2008 г.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Ганиходжаев, С. Р. Азизова, *Докл. АН УзССР*, 1990, № 4, 3–5. [2] U. A. Rozikov, *J. Stat. Phys.*, **130**:4, (2008), 801–813. [3] R. A. Minlos, *Introduction to Mathematical Statistical Physics*, Univ. Lecture Ser., **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. [4] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980. [5] Г. И. Ботиров, У. А. Розиков, *ТМФ*, **153**:1, (2007), 86–97. [6] U. A. Rozikov, *J. Stat. Phys.*, **122**:2, (2006), 217–235. [7] У. А. Розиков, *ТМФ*, **112**:1, (1997), 170–175. [8] U. A. Rozikov, *Ground Subgroups*, arXiv: [math.GR/0904.1850](https://arxiv.org/abs/math/0904.1850).

Г. И. Ботиров

Институт математики и информационных технологий

НАН Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан

E-mail: botirovg@yandex.ru

Поступило

12.05.2009

Исправленный вариант

19.10.2009