Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Филиновский, Убывание энергии решений первой смешанной задачи для волнового уравнения в областях с некомпактными границами, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 311–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:34:14

УБЫВАНИЕ ЭНЕРГИИ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТЯХ С НЕКОМПАКТНЫМИ ГРАНИЦАМИ

А. В. Филиновский

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – неограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$. Рассмотрим первую смешанную задачу для волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (t, x) \in Q = (t > 0) \times \Omega, \quad (1)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Начальные функции будем предполагать вещественнозначными, гладкими в $\overline{\Omega}$, согласованными с граничным условием (3) и обладающими конечным интегралом

$$\int_{\Omega} (f^2 + |\nabla f|^2 + g^2) dx < \infty.$$

Хорошо известно, что для решения задачи (1)–(3) справедлив закон сохранения энергии

$$E_{\Omega}(t) = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u(t, x)|^2 dx = \operatorname{Const}, \quad t > 0, \quad \operatorname{grad} u = (u_t, \nabla_x u) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-15-96177 и № 98-01-1000).

В работе изучается скорость убывания локальной энергии решения

$$E_{\Omega'}(t) = \int_{\Omega'} |\text{grad } u(t, x)|^2 dx$$

при $t \rightarrow \infty$ ($\Omega' \subset \Omega$ – произвольная ограниченная область).

Отметим, что исследованию скорости убывания решения задачи (1)–(3) при $t \rightarrow \infty$ (особенно для компактной поверхности Γ) посвящено большое количество работ (подробный обзор результатов см. в [1]). Настоящая статья продолжает работы [1], [2], в которых был рассмотрен случай некомпактной незвездной поверхности Γ .

Пусть $\varphi(x)$ – положительная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$. Будем считать, что

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2,$$

где $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m < \alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 1$, $1 \leq m \leq n-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Область Ω называется *областью класса G_φ* , если

$$(\nu, \nabla \varphi(x)) \leq 0, \quad x \in \Gamma, \quad (4)$$

и существует положительная постоянная C_1 такая, что

$$\sum_{j=1}^m x_j^2 \leq C_1 \left(\sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right)^{\alpha_m}, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Геометрически условия (4), (5) характеризуют скорость расширения области Ω на бесконечности. При $0 < \alpha_1 < 1$ граница области $\Omega \in G_\varphi$ расположена между параболоидами, скорость расширения которых увеличивается с возрастанием α_1 . Предельному случаю $\alpha_1 = 1$ соответствуют области со звездными границами, содержащими конус.

Далее будем предполагать, что $\sum_{j=m+1}^n x_j^2 > 1$ в Ω . Пусть

$$\Pi_{\varphi, t_0} = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t - t_0 = \sqrt{\varphi(x)} \right\}, \quad -\infty < t_0 < \infty,$$

– поверхности в $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$N = \frac{(1, -\nabla \varphi / (2\sqrt{\varphi}))}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2 / (4\varphi)}}$$

– единичный вектор нормали к Π_{φ, t_0} , $u_N = \partial u / \partial N$, $\text{grad}_\Pi u(t, x) = \text{grad } u(t, x) - N u_N(t, x)$.

Для $\beta > 0$ положим

$$\mathcal{E}_\beta(h) = \int_\Omega (h^2 + |\nabla h|^2 + |\Delta h|^2) r^\beta dx, \quad r = |x|.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \alpha_1 < 1$ и $\gamma \in (\max\{1 - 2\alpha_1, 2\alpha_m - 1\}, 1)$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что для всех областей $\Omega \in G_\varphi$ с $C_1 < C_0$ справедлива оценка

$$\int_Q \left(|\text{grad}_\Pi u(t, x)|^2 + \frac{u^2(t, x)}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dt dx}{r^\gamma} \leq C_2 (\mathcal{E}_\beta(f) + \mathcal{E}_\beta(\Delta f) + \mathcal{E}_\beta(g)), \quad (6)$$

$$\beta = \beta(\alpha_1, \alpha_m, \gamma).$$

Постоянные C_0 и C_2 зависят от n , α_1 , α_m и γ .

Из (6) следует оценка локальной энергии решения задачи (1)–(3) при $t \rightarrow \infty$ для областей $\Omega \in G_\varphi$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \alpha_1 < 1$ и $\gamma \in (\max\{1 - 2\alpha_1, 2\alpha_m - 1\}, 1)$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что для всех областей $\Omega \in G_\varphi$ с $C_1 < C_0$ справедлива оценка

$$\int_0^\infty E'_\Omega(t) dt \leq C_3(\mathcal{E}_\beta(f)) + \mathcal{E}_\beta(\Delta f) + \mathcal{E}_\beta(g) + \mathcal{E}_\beta(\Delta g),$$

$$\beta = \beta(\alpha_1, \alpha_m, \gamma). \quad (7)$$

Доказательство теоремы 1 использует полученные в работе оценки решения первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца

$$\Delta v(x, k) + k^2 v(x, k) = h(x), \quad x \in \Omega, \quad k = \omega + i\mu, \quad (8)$$

$$v|_\Gamma = 0 \quad (9)$$

при больших значениях спектрального параметра k в верхней полуплоскости $\{\text{Im } k > 0\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < \alpha_1 < 1$ и $\gamma \in (\max\{1 - 2\alpha_1, 2\alpha_m - 1\}, 1)$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что для всех областей $\Omega \in G_\varphi$ с $C_1 < C_0$ справедлива оценка

$$\int_\Omega \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_\tau v|^2 + \frac{|v|^2}{r^{2\alpha_m}} \right) \frac{dx}{r^\gamma} \leq C_4(\omega^2 + 1) \int_\Omega |h|^2 r^\beta dx,$$

$$-\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0, \quad (10)$$

$$|\nabla_\tau v|^2 = |\nabla v|^2 - \frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2}, \quad \beta = \beta(\alpha_1, \alpha_m, \gamma).$$

Постоянная C_4 зависит от n , α_1 , α_m и γ .

Доказательство теоремы 3 проведем методом, предложенным в работе [1]. Пусть $w(x, k) = v(x, k)e^{-i\omega\sqrt{\varphi(x)}}$, $k = \omega + i\mu$, $-\infty < \omega < +\infty$, $\mu > 0$, где $v(x, k)$ – решение задачи (8), (9). Функция $w(x, k)$ является решением краевой задачи

$$\Delta w + \frac{i\omega}{\sqrt{\varphi}} \left((\nabla w, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) w \right) + \left(\omega^2 \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) - \mu^2 \right) w = h e^{-i\omega\sqrt{\varphi}}, \quad x \in \Omega, \quad (11)$$

$$w|_\Gamma = 0. \quad (12)$$

Докажем вначале следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $0 < \alpha_1 < 1$ и $\gamma \in (\max\{1/2 - \alpha_1, \alpha_m - 1/2\}, 1/2)$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что для всех областей $\Omega \in G_\varphi$ с $C_1 < C_0$ справедлива оценка

$$\int_\Omega \left(|\nabla w|^2 + \frac{|w|^2}{\varphi^{\alpha_m}} \right) \frac{dx}{\varphi^\gamma} \leq C_5(\omega^2 + 1) \int_\Omega |h|^2 \varphi^\beta dx,$$

$$-\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0, \quad \beta = \beta(\alpha_1, \alpha_m, \gamma). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (11) на

$$\varphi^{-\gamma} \left((\nabla \bar{w}, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \bar{w} \right)$$

и проинтегрируем по Ω с учетом того, что $w \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ при $\text{Im } k > 0$. В результате получим равенство

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \varphi^{-\gamma} (\nu, \nabla \varphi) \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 ds + \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - (1-2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 \right. \\
 & \quad - \gamma \frac{|(\nabla w, \nabla \varphi)|^2}{\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} |\nabla w|^2 + \left(\frac{1}{2} \Delta \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) + \frac{\gamma}{\varphi} \left(\frac{(\Delta \varphi)^2}{4} \right) \right. \\
 & \quad + 2(\gamma+1) \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right)^2 - \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) - \left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \Delta \varphi \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \Bigg) \\
 & \quad + \omega^2 \left((1-2\gamma) \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} - \frac{1}{2} \left(\nabla \varphi, \nabla \left(\frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) \right) \right) \\
 & \quad - 2\omega^2 \mu\sqrt{\varphi} \left(1 - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} \right) - \mu^2 (1-2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu^3 \sqrt{\varphi} \Bigg) |w|^2 \\
 & \quad + (1-2\gamma) \frac{\mu}{\sqrt{\varphi}} \Re \left(\overline{w} (\nabla w, \nabla \varphi) \right) dx \\
 & = - \int_{\Omega} \varphi^{-\gamma} \Re \left(\left((\nabla \overline{w}, \nabla \varphi) + \left(\frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} + 2\mu\sqrt{\varphi} \right) \overline{w} \right) h e^{-i\omega\sqrt{\varphi}} \right) dx. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Соотношение (14) является исходным для получения неравенства (13), при этом доказательство проводится методами работы [1]. Так как случай $\alpha_1 > 1/2$ исследован в [1], достаточно рассмотреть случай $0 < \alpha_1 \leq 1/2$.

Из условия (4) следует, что поверхностный интеграл в левой части (14) неотрицателен. Опеним снизу слагаемые, содержащие квадраты производных функции w в объемном интеграле в левой части (14).

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - (1-2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 - \gamma \frac{|(\nabla w, \nabla \varphi)|^2}{\varphi} = \sum_{j=1}^n (2\alpha_j + 2\gamma - 1) |w_{x_j}|^2 \\
 & \quad - \frac{1}{\varphi} \left((2\gamma - 1) \sum_{j=1}^m \alpha_j (1 - \alpha_j) x_j^2 |\nabla w|^2 + 4\gamma \left(\left| \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j w_{x_j} \right|^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j \overline{w}_{x_j} \sum_{j=m+1}^n x_j w_{x_j} + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j w_{x_j} \sum_{j=m+1}^m x_j \overline{w}_{x_j} + \left| \sum_{j=m+1}^n x_j w_{x_j} \right|^2 \right) \right) \\
 & \geq \sum_{j=1}^m \left(2\alpha_j + 2\gamma - 1 - \left(1 - \gamma \left(6 + \frac{4}{\varepsilon} \right) \right) \frac{1}{\varphi} \sum_{j=1}^m x_j^2 \right) |w_{x_j}|^2 \\
 & \quad + \sum_{j=m+1}^n \left(1 - 2\gamma - \frac{1}{\varphi} \left((1-2\gamma) \sum_{j=1}^m x_j^2 + 4\gamma \varepsilon \sum_{j=m+1}^n x_j^2 \right) \right) |w_{x_j}|^2 \\
 & \geq \sum_{j=1}^m \left(2\alpha_j + 2\gamma - 1 - \left(1 - \gamma \left(6 + \frac{4}{\varepsilon} \right) \right) C_1 \right) |w_{x_j}|^2 \\
 & \quad + \sum_{j=m+1}^n (1 - 2\gamma(1 + 2\varepsilon) - (1-2\gamma)C_1) |w_{x_j}|^2, \quad x \in \Omega, \quad \varepsilon > 0. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Полагая $\varepsilon = 1/8\gamma - \gamma/4$, при достаточно малых C_1 из (15) выводим оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} |w_{x_j}|^2 - (1-2\gamma) \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |\nabla w|^2 - \gamma \frac{|(\nabla w, \nabla \varphi)|^2}{\varphi} \\ & \geq \sum_{j=1}^m \left(2\alpha_j + 2\gamma - 1 - C_1 \left(1 - 2\gamma \left(3 + \frac{16\gamma}{1-2\gamma^2} \right) \right) \right) |w_{x_j}|^2 \\ & + (1-2\gamma) \left(\frac{1}{2} - C_1 \right) \sum_{j=m+1}^n |w_{x_j}|^2 \geq C_6 |\nabla w|^2, \quad x \in \Omega, \quad C_6 > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (14), (16) и установленных в [1] неравенств

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |w|^2 dx \leq \frac{C_1(C_1+1)}{\mu^2} \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^{\alpha_m} dx, \\ & \omega^2 \int_{\Omega} \frac{|w|^2 dx}{\varphi^{\gamma}} \leq 2 \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \varphi^{\gamma} + \frac{|\omega|}{\frac{1}{2}-\gamma} \int_{\Omega} |h| |w| \varphi^{\frac{1}{2}-\gamma} dx \right), \\ & -\infty < \omega < \infty, \quad \mu > 0, \end{aligned}$$

выводим требуемую оценку (13). Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу равенства

$$|\nabla w|^2 = \left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla_{\tau} v|^2$$

и оценки $\alpha_1 r^2 \leq \varphi(x) \leq r^2$, $x \in \Omega$, из (13) следует неравенство (10). Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Оценка (6) устанавливается применением неравенства (10) и теоремы Пэли–Винера [3, с. 20] к функциям u и v . Подробный вывод неравенства (6) из соотношения (10) содержится в § 3 работы [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из (6) следуют неравенства

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx \leq C_6 (\mathcal{E}_{\beta}(f) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta f) + \mathcal{E}_{\beta}(g)) - 2 \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} \frac{(\nabla u, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} u_t \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} dx \\ & \leq C_6 (\mathcal{E}_{\beta}(f) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta f) + \mathcal{E}_{\beta}(g)) + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx + 2 \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} u^2 dx. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx \leq 2C_6 (\mathcal{E}_{\beta}(f) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta f) + \mathcal{E}_{\beta}(g)) + 4 \int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} u_t^2 dx. \quad (17)$$

Так как $u_t(0, x) = g(x)$, $u_{tt}(0, x) = \Delta f(x)$, из (6) следует оценка

$$\int_0^{\infty} dt \int_{\Omega'} u_t^2 dx \leq C_6 (\mathcal{E}_{\beta}(\Delta f) + \mathcal{E}_{\beta}(g) + \mathcal{E}_{\beta}(\Delta g)). \quad (18)$$

Объединяя (17) и (18), получаем (10). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиновский А. В. // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 8. С. 141–160. 2. Филиновский А. В. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 6. С. 131–160. 3. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964.