Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, О восстановлении пучков дифференциальных операторов на полуоси, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm843>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:31:01

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУОСИ

В. А. Юрко

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell y := y'' + (\rho^2 + i\rho q_1(x) + q_0(x))y = 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

и линейную форму

$$U(y) := y'(0) + (i\rho h_1 + h_0)y(0). \quad (2)$$

Здесь $q_j(x) \in W_1^j(0, \infty)$ – комплекснозначные функции; h_j – комплексные числа, $h_1 \neq \pm 1$. В работе получено решение обратной задачи восстановления коэффициентов дифференциального пучка (1) и линейной формы (2) по так называемой функции Вейля, порожденной парой $L = (\ell, U)$ и являющейся аналогом классической функции Вейля для оператора Штурма–Лиувилля.

Если для оператора Штурма–Лиувилля обратная задача достаточно полно изучена (см. [1], [2]), то в теории обратных задач для пучков имеются лишь отдельные фрагменты, не составляющие общей картины и относящиеся в основном к случаю конечного отрезка [3]–[7]. В данной работе при решении обратной задачи для пучка (1) на полуоси используется метод, связанный с развитием идей метода контурного интеграла [8], [9]. При этом обнаружены новые качественные эффекты, характерные для пучков дифференциальных операторов. Основными результатами работы являются теорема единственности решения обратной задачи и конструктивная процедура ее решения. Необходимые и достаточные условия на функцию Вейля пучка предполагается исследовать в отдельной статье.

Отметим, что прямые задачи спектрального анализа для уравнения (1) на конечном интервале и для более общих пучков операторов достаточно полно изучены в [10]–[15] и других работах. Отметим также, что к виду (1) могут быть приведены более общие дифференциальные уравнения вида

$$y'' + P_1(x, \rho)y' + P_0(x, \rho)y = 0, \quad \text{где } P_j(x, \rho) = \sum_{k=0}^j \rho^k p_{jk}(x).$$

Полученные в статье результаты и методы позволяют исследовать также обратные задачи для уравнений с частными производными. В качестве примера в п. 4 рассматривается важная для приложений обратная задача для волнового уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} + q_1(x)u_t + q_0(x)u = 0 \quad (3)$$

с сосредоточенным источником в начале координат. Обратным задачам для уравнений с частными производными посвящена обширная литература (см. монографии [16]–[18] и библиографию в них). В частности, получено локальное решение обратной задачи для уравнения (3) в окрестности начала координат. В данной статье установлена связь между обратной задачей для уравнения (3) и обратной спектральной задачей для пучка (1). Используя эту связь, удастся получить глобальное решение обратной задач для уравнения (3).

2. Обозначим

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_0^x q_1(s) ds, \quad \Pi_{\pm} = \{\rho : \pm \operatorname{Im} \rho > 0\}.$$

Пусть функция $\Phi(x, \rho)$ является решением дифференциального уравнения (1) при условиях $U(\Phi) = 1$, $\Phi(x, \rho) = O(\exp(\pm i\rho x))$, $x \rightarrow \infty$, $\rho \in \Pi_{\pm}$. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, \rho) = 0$ при каждом фиксированном невещественном ρ . Положим $M(\rho) := \Phi(0, \rho)$. Функцию $M(\rho)$ будем

называть *функцией Вейля* для пары $L = (\ell, U)$. Обратная задача ставится следующим образом: по заданной функции Вейля найти коэффициенты пучка (1), (2).

Функция $M(\rho)$ является регулярной в $\bar{\Pi}_{\pm}$ за исключением не более чем счетного ограниченного множества полюсов $\Lambda'_{\pm}$ и непрерывна в $\bar{\Pi}_{\pm}$ за исключением ограниченных множеств $\Lambda_{\pm}$. При $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \bar{\Pi}_{\pm}$,

$$M(\rho) = \frac{1}{(h_1 \pm 1)i\rho} \left(1 + \frac{M_1^{\pm}}{(h_1 \pm 1)i\rho} \right) + \frac{\kappa^{\pm}(\rho)}{\rho}, \quad M_1^{\pm} = -h_0 \pm \frac{q_1(0)}{2},$$

где $\kappa^{\pm}(\rho) = o(1)$. Если $q_j(x) \in W_2^j(0, \infty)$, то $\kappa^{\pm}(\rho) \in L_2$.

Ясно, что

$$\Phi(x, \rho) = S(x, \rho) + M(\rho)\varphi(x, \rho),$$

где функции $\varphi(x, \rho)$ и $S(x, \rho)$ являются решениями уравнения (1) при начальных условиях $\varphi(0, \rho) = 1$, $U(\varphi) = 0$, $S(0, \rho) = 0$, $S'(0, \rho) = 1$. При $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \bar{\Pi}_{\pm}$, равномерно по $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \varphi^{(\nu)}(x, \rho) &= \frac{1+h_1}{2}(-i\rho)^{\nu} \exp(-i\rho x + Q(x)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1-h_1}{2}(i\rho)^{\nu} \exp(i\rho x - Q(x)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \\ \Phi^{(\nu)}(x, \rho) &= \frac{(\pm i\rho)^{\nu}}{(h_1 \pm 1)i\rho} \exp(\pm(i\rho x - Q(x))) \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Наряду с L будем рассматривать пару $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$ того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde{q}_j(x)$, $\tilde{h}_j$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к L , то $\tilde{\alpha}$ обозначает соответствующий объект, относящийся к $\tilde{L}$, и $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$.

Сформулируем теперь теорему единственности решения обратной задачи.

ТЕОРЕМА 1. Если $M(\rho) = \tilde{M}(\rho)$, то $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет коэффициенты пучка (1), (2).

3. В этом пункте приводится конструктивная процедура решения обратной задачи. Центральным местом здесь является получение и исследование так называемого основного уравнения обратной задачи, которое является линейным уравнением в соответствующем банаховом пространстве относительно специально выбранного решения уравнения (1). При выводе основного уравнения мы опираемся на интегральную формулу Коши и на аналитическую структуру функции Вейля. Исследована разрешимость основного уравнения и предложен алгоритм построения коэффициентов пучка с использованием решения основного уравнения.

Положим

$$D(x, \rho, \theta) = \frac{\langle \varphi(x, \rho), \varphi(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta},$$

где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$. Так как в силу (1)

$$\frac{d}{dx} \langle \varphi(x, \rho), \varphi(x, \theta) \rangle = (\rho - \theta)(\rho + \theta + iq_1(x)) \varphi(x, \rho) \varphi(x, \theta),$$

то

$$D(x, \rho, \theta) = ih_1 + \int_0^x (\rho + \theta + iq_1(s)) \varphi(s, \rho) \varphi(s, \theta) ds.$$

Используя асимптотическую формулу (4), получаем оценку

$$|D(x, \rho, \theta)| \leq C_x \frac{|\rho| + |\theta| + 1}{|\rho - \theta| + 1} \exp(|\operatorname{Im} \rho|x) \exp(|\operatorname{Im} \theta|x).$$

Обозначим

$$M^{\pm}(\rho) = \lim_{z \rightarrow 0, \operatorname{Re} z > 0} M(\rho \pm iz), \quad \rho \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_{\pm}.$$

Пусть L и $\tilde{L}$ выбраны так, что при достаточно большом $\rho^* > 0$

$$\int_{|\rho| \geq \rho^*} |\widehat{M}^{\pm}(\rho)|^2 \rho^4 d\rho < \infty.$$

Положим

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \frac{1}{2}(\exp(\widehat{Q}(x)) + \exp(-\widehat{Q}(x))), & \Lambda(x) &= -\frac{1}{2i}(\exp(\widehat{Q}(x)) - \exp(-\widehat{Q}(x))), \\ r(x, \rho, \theta) &= D(x, \rho, \theta)\widehat{M}(\theta), & \tilde{r}(x, \rho, \theta) &= \tilde{D}(x, \rho, \theta)\widehat{M}(\theta), \end{aligned}$$

и пусть $\gamma = \gamma_{-1} \cup \gamma_0 \cup \gamma_1$ – контур в ρ -плоскости (с обходом против часовой стрелки), где γ_0 – ограниченный замкнутый контур, охватывающий множества $\Lambda_{\pm}$, $\{\tilde{\Lambda}_{\pm}\}$, $\{0\}$ (т.е. $\Lambda_{\pm}$, $\tilde{\Lambda}_{\pm}$, $\{0\} \subset \operatorname{int} \gamma_0$), а $\gamma_{\pm 1}$ – двусторонний разрез вдоль луча $\{\rho : \pm \rho > 0, \rho \notin \operatorname{int} \gamma_0\}$.

При каждом фиксированном $x \geq 0$ рассмотрим следующие линейные ограниченные операторы в $C(\gamma)$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}y(\rho) &= y(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \rho, \theta)y(\theta) d\theta, & \rho \in \gamma, \\ Ay(\rho) &= y(\rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} r(x, \rho, \theta)y(\theta) d\theta, & \rho \in \gamma. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы соотношения*

$$\tilde{A}\varphi(x, \rho) = \Omega(x)\tilde{\varphi}(x, \rho), \quad A\tilde{\varphi}(x, \rho) = \Omega(x)\varphi(x, \rho), \quad (5)$$

$$\begin{cases} \tilde{A}Ay(\rho) = y(\rho) - \Lambda(x)\tilde{\varphi}(x, \rho)\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(x, \rho)\widehat{M}(\theta)y(\theta) d\theta, \\ A\tilde{A}y(\rho) = y(\rho) - \Lambda(x)\varphi(x, \rho)\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{\varphi}(x, \rho)\widehat{M}(\theta)y(\theta) d\theta. \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что для частного случая уравнения Штурма–Лиувилля ($q_1(x) \equiv 0$) имеем $\Omega(x) \equiv 1$, $\Lambda(x) \equiv 0$ и, следовательно, операторы A и $\tilde{A}$ являются взаимно обратными.

Обозначим $\omega = \{x : \Omega(x) \neq 0\}$, $\omega_0 = \{x : \Omega(x) = 0\}$. Используя (5) и (6), приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3. 1) Пусть $x \in \omega$. Тогда однородное уравнение

$$\tilde{A}y(\rho) = 0, \quad y(\rho) \in C(\gamma), \quad (7)$$

имеет только нулевое решение.

2) Пусть $x \in \omega_0$. Тогда однородное уравнение (7) имеет бесконечное множество решений (и только их) $y(\rho) = C\varphi(x, \rho)$, где C – константа.

Пусть L и $\tilde{L}$ таковы, что $\omega_0 = \emptyset$. Например, это всегда имеет место если $\hat{q}_1(x)$ – вещественна. При каждом фиксированном $x \geq 0$ рассмотрим линейное уравнение в $C(\gamma)$

$$\tilde{\varphi}(x, \rho) = z(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \rho, \theta)z(x, \theta) d\theta \quad (8)$$

относительно $z(x, \rho)$. Уравнение (8) называется *основным уравнением обратной задачи*. Из теорем 2, 3 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. При каждом фиксированном $x \geq 0$ уравнение (8) имеет единственное решение, а именно, $z(x, \rho) = \varphi(x, \rho)/\Omega(x)$.

Обозначим

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{\varphi}(x, \rho) z(x, \rho) \widehat{M}(\theta) d\theta,$$

где $z(x, \rho)$ – решение основного уравнения (8). Тогда $\lambda^2(x) + 1 \neq 0$ и справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Коэффициенты пучков L и $\tilde{L}$ связаны соотношениями

$$q_j(x) = \tilde{q}_j(x) + \varepsilon_j(x), \quad h_j = \tilde{h}_j, \quad j = 0, 1, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= -\frac{2i\lambda'(x)}{\lambda^2(x) + 1}, \quad \varepsilon_0(x) = c(x) + \frac{a'(x)}{2} - \frac{a^2(x)}{4}, \quad a(x) = i\lambda(x)\varepsilon_1(x), \\ c(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} ((a(x)(\theta + i\tilde{q}_1(x)) + i\tilde{q}_1'(x))\tilde{\varphi}(x, \theta)z(x, \theta) \\ &\quad + 2(\theta + i\tilde{q}_1(x))(\tilde{\varphi}(x, \theta)z(x, \theta))' + i\varepsilon_1(x)\tilde{\varphi}'(x, \theta)z(x, \theta))\widehat{M}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Опираясь на полученные факты, приходим к следующей процедуре решения обратной задачи.

Дана $M(\rho)$ – функция Вейля пучка L . Выбираем $\tilde{L}$ и строим $\tilde{\varphi}(x, \rho)$ и $\tilde{r}(x, \rho, \theta)$. Решая основное уравнение (8), находим $z(x, \rho)$ и строим L по формулам (9).

4. Рассмотрим следующую задачу Коши для волнового уравнения:

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{tt} &= \pm q_1(x)u_t - q_0(x)u, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = 2\delta(x), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $q_j(-x) = q_j(x)$, $q_j(x) \in W_1^j(0, \infty)$. Обозначим $r^{\pm}(t) := u^{\pm}(0, t)$, где $u^{\pm}(x, t)$ – решение (10). В этом пункте исследуется следующая обратная задача: по заданным $r^{\pm}(t)$, $t \geq 0$, найти $q_1(x)$ и $q_0(x)$.

Отметим, что задача Коши (10) равносильна краевой задаче

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{tt} &= \pm q_1(x)u_t - q_0(x)u, \quad 0 \leq x \leq t, \\ u_{x|_{x=0}} &= 0, \quad u(x, x) = \exp(\mp Q(x)), \end{aligned} \quad (11)$$

и $u(x, t) = 0$ при $0 \leq t < x$, $u(-x, t) = u(x, t)$. Решение задачи (11) $u^{\pm}(x, t)$ существует, единственно и $|u^{\pm}(x, t)| \leq C \exp(Ct)$, $0 \leq x \leq t$, где C – константа.

Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi(x, \rho) &= -\int_x^\infty u^{\pm}(x, t) \exp(\pm i\rho t) dt, \quad M(\rho) = -\int_0^\infty r^{\pm}(t) \exp(\pm i\rho t) dt, \\ x &\geq 0, \quad \pm \operatorname{Im} \rho > C. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $\Phi(x, \rho)$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям $\Phi'(0, \rho) = 1$, $\Phi(x, \rho) = O(\exp(\pm i\rho x))$, $x \rightarrow \infty$. Таким образом, $M(\rho)$ является функцией Вейля для пары $L = (\ell, U^0)$, где $U^0(y) := y'(0)$, и, следовательно, наша обратная задача для волнового уравнения сводится к изученной выше обратной задаче восстановления L по функции Вейля $M(\rho)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 3. Баранова Е. А. // Дифференц. уравнения. 1972. № 8. С. 2130–2139. 4. Гасымов М. Г., Гусейнов Г. Ш. // Докл. АН АзССР. 1981. Т. 37. № 2. С. 19–23. 5. Юрко В. А. // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1984. Т. 19. № 5. С. 398–409. 6. Юрко В. А. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 3. С. 390–395. 7. Yamamoto M. // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 152. № 1. P. 20–34. 8. Юрко В. А. // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 3. С. 431–456. 9. Yurko V. A. Inverse Problems for Differential Operators and their Applications. New York: Gordon and Breach, 1999. 10. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917. 11. Келдыш М. В. // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. С. 11–14. 12. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев, 1986. 13. Шкаликов А. А. // Матем. заметки. 1981. Т. 30. № 3. С. 371–385. 14. Шкаликов А. А. // Тр. сем. им. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229. 15. Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. // Функцион. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 2. С. 38–61. 16. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 17. Romanov V. G., Kabanikhin S. I. Inverse problems for Maxwell's equations. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 1994. 18. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential equations. New-York: Springer-Verlag, 1998.