Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Вараксин, Квазитождества и квазивербальные подалгебры, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 323–328

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:18:18

УДК 512.54.01

КВАЗИТОЖДЕСТВА И КВАЗИВЕРБАЛЬНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ

С. В. Вараксин

Дано описание квазивербальной подалгебры универсальной алгебры в терминах замыкания относительно функциональных операций. По базисам квазитожеств сомножителей строится базис квазитожеств произведения двух квазимногообразий универсальных алгебр.

Библиография: 4 названия.

1. Квазивербальные конгруэнции. Рассмотрим класс $\mathcal{L}$ универсальных алгебр сигнатуры Ω и алгебру $\mathfrak{A}$ из $\mathcal{L}$. Для отношения $\rho \subset \mathfrak{A}^2$ записи $a\rho b$ и $(a, b) \in \rho$ равнозначны. Определения отношений эквивалентности и конгруэнции рассматриваются по А. И. Мальцеву [1]. Конгруэнция ϑ на $\mathfrak{A}$ называется *квазивербальной*, если найдется такое квазимногообразие $\mathfrak{Q}$, что произвольный гомоморфизм φ из $\mathfrak{A}$ в любую $\mathfrak{Q}$ -систему $\mathfrak{B}$ представим в виде $\varphi = \varepsilon\psi$, где ε – естественный гомоморфизм $\varepsilon: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/\vartheta$. Если $\mathfrak{Q}$ – это многообразие, то ϑ называется *вербальной конгруэнцией*. Для вербальной конгруэнции на алгебре есть описание.

Через $\vartheta(\rho)$ обозначим наименьшую конгруэнцию, содержащую отношение ρ . Отношение $\zeta = \{(a, a) \mid a \in \mathfrak{A}\}$. Если τ и ρ – два отношения на $\mathfrak{A}$, то $a\rho^{-1}b$ и $a\tau b$ означает $b\rho a$ и $\exists s \ a\rho s \ \& \ s\tau b$ соответственно. Отношение $\rho^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$ называется *транзитивным замыканием отношения* ρ (Д. М. Смирнов [2]).

Определение трансляций из [2] дается по индукции:

0-трансляция – это термальное постоянное либо тождественное отображение:

$\exists c \ \forall x \ g(x) = c$ либо $\forall x \ g(x) = x$;

1-трансляция – это 0-трансляция либо отображение вида $g(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$, $f \in \Omega$, $a_j \in \mathfrak{A}$;

k -трансляция – это композиция k 1-трансляций.

Трансляцией называется k -трансляция для некоторого k . Множество трансляций обозначается через $\text{Tr}(\mathfrak{A})$.

Если ρ – отношение на $\mathfrak{A}$, то через $\Gamma(\rho)$ обозначено отношение $\Gamma(\rho) = \{(f(a), f(b)) \mid (a, b) \in \rho \cup \rho^{-1}, f \in \text{Tr}(\mathfrak{A})\}$ при $\rho \neq \emptyset$ и $\Gamma(\emptyset) = \zeta$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00088, и гранта № 5 Грантового центра Новосибирского университета Госкомитета РФ по высшему образованию.

ТЕОРЕМА [2]. Имеем $\vartheta(\rho) = (\Gamma(\rho))^t$.

В частности, для многообразия $\mathfrak{A}$, задаваемого системой тождеств

$$\{v_{\sigma,l}(\bar{x}) = v_{\sigma,r}(\bar{x})\}_{\sigma \in \Sigma},$$

соответствующая вербальная конгруэнция совпадает с $(\Gamma(\eta))^t$, где

$$\eta = \{(v_{\sigma,l}(\bar{a}), v_{\sigma,r}(\bar{a})) \mid \sigma \in \Sigma, \bar{a} \in \mathfrak{A}\}.$$

Рассмотрим в классе алгебр $\mathfrak{L}$ квазимногообразие $\mathfrak{Q}$, задаваемое системой квазитожеств $\Sigma(\mathfrak{Q}) = \{\Phi_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$. Квазитожество Φ_σ записывается в виде

$$\Phi_\sigma \equiv \forall \bar{x} \left(\bigwedge_{i=1}^{k(\sigma)} u_{\sigma,i,l}(\bar{x}) = u_{\sigma,i,r}(\bar{x}) \right) \rightarrow v_{\sigma,l}(\bar{x}) = v_{\sigma,r}(\bar{x}),$$

где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n(\sigma)})$. Обозначим для отношения ρ через $\mathfrak{Q}^\rho(\mathfrak{A})$ наименьшую конгруэнцию на $\mathfrak{A}$ с условиями:

- 1) $\rho \subset \mathfrak{Q}^\rho(\mathfrak{A})$;
- 2) $\mathfrak{A}/\mathfrak{Q}^\rho(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{Q}$ (т.е. $\mathfrak{Q}^\rho(\mathfrak{A})$ является $\mathfrak{Q}$ -конгруэнцией на $\mathfrak{A}$).

В частности, $\mathfrak{Q}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Q}^\zeta(\mathfrak{A})$.

Определим отношения $\mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A})$ по индукции:

$$\mathfrak{Q}_0^\rho(\mathfrak{A}) = \rho;$$

$$\mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A}) = \vartheta(\mathfrak{Q}_{n-1}^\rho(\mathfrak{A})) \cup \{(v_{\sigma,l}(\bar{a}), v_{\sigma,r}(\bar{a})) \mid (u_{\sigma,i,l}(\bar{a}), u_{\sigma,i,r}(\bar{a})) \in \vartheta(\mathfrak{Q}_{n-1}^\rho(\mathfrak{A})), \\ i = 1, \dots, k(\sigma), \bar{a} = (a_1, \dots, a_{n(\sigma)}) \in \mathfrak{A}^{n(\sigma)}, \sigma \in \Sigma\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Имеем $\mathfrak{Q}^\rho(\mathfrak{A}) = \bigcup_{n=0}^\infty \mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\bigcup_{n=0}^\infty \mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A}) = \bigcup_{n=0}^\infty \vartheta(\mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A}))$. Поэтому отношение $\bigcup_{n=0}^\infty \mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A})$ является конгруэнцией как объединение возрастающей цепочки конгруэнций.

Если для элементов $a_1, \dots, a_{n(\sigma)}$ выполнены условия

$$(u_{\sigma,1,l}(\bar{a}), u_{\sigma,1,r}(\bar{a})), \dots, (u_{\sigma,k(\sigma),l}(\bar{a}), u_{\sigma,k(\sigma),r}(\bar{a})) \in \bigcup_{n=0}^\infty \mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A}),$$

то для некоторого n $(u_{\sigma,1,l}(\bar{a}), u_{\sigma,1,r}(\bar{a})), \dots, (u_{\sigma,k(\sigma),l}(\bar{a}), u_{\sigma,k(\sigma),r}(\bar{a})) \in \mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A})$, и тогда

$$(v_{\sigma,l}(\bar{a}), v_{\sigma,r}(\bar{a})) \in \mathfrak{Q}_{n+1}^\rho(\mathfrak{A}) \subset \bigcup_{n=0}^\infty \mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A}).$$

Поэтому $\mathfrak{A}/\bigcup_{n=0}^\infty \mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{Q}$.

Пусть ξ – произвольная $\mathfrak{Q}$ -конгруэнция на $\mathfrak{A}$, содержащая отношение ρ . Тогда по определению $\mathfrak{Q}_0^\rho(\mathfrak{A}) \subset \xi$.

Допустим, что $\mathfrak{Q}_{n-1}^\rho(\mathfrak{A}) \subset \xi$. Тогда и $\vartheta(\mathfrak{Q}_{n-1}^\rho(\mathfrak{A})) \subset \xi$. Если

$$(b, c) \in \mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A}) \setminus \vartheta(\mathfrak{Q}_{n-1}^\rho(\mathfrak{A})),$$

то $(b, c) = (v_{\sigma,l}(\bar{a}), v_{\sigma,r}(\bar{a}))$ для некоторых $\sigma \in \Sigma, a_1, \dots, a_{n(\sigma)} \in \mathfrak{A}$, причем

$$(u_{\sigma,1,l}(\bar{a}), u_{\sigma,1,r}(\bar{a})), \dots, (u_{\sigma,k(\sigma),l}(\bar{a}), u_{\sigma,k(\sigma),r}(\bar{a})) \in \vartheta(\mathfrak{Q}_{n-1}^\rho(\mathfrak{A})).$$

Но тогда $(b, c) \in \xi$. Поэтому $\bigcup_{n=0}^\infty \mathfrak{Q}_n^\rho(\mathfrak{A}) \subset \xi$.

2. Квазитождества произведения квазимногообразий. Как известно, класс квазимногообразий конечной сигнатуры замкнут относительно произведений [3]. Предыдущие построения позволяют по квазитождествам сомножителей выписывать квазитождества произведения квазимногообразий при некотором дополнительном условии на класс алгебр $\mathfrak{L}$.

Полярной операцией в алгебре $\mathfrak{A}$ называется заданная термом унарная операция $c(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\forall x, y \quad c(x) = c(y) = c, \quad f(c, \dots, c) = c, \quad f \in \Omega.$$

Элемент c называется *поллюсом* системы $\mathfrak{A}$. Унарный терм, представляющий в каждой $\mathfrak{L}$ -системе полярную операцию, называется *полярной*. Если класс $\mathfrak{L}$ обладает хотя бы одной полярной, он называется *поляризованным* [1].

Пусть Ω и $\mathfrak{R}$ – два квазимногообразия алгебр класса $\mathfrak{L}$ сигнатуры Ω , заданные множествами квазитождеств $\Sigma = \{\Phi_\sigma\}$ и $\Delta = \{\Psi_\delta\}$ соответственно. По определению алгебра $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{L}$ лежит в $\Omega \overset{\circ}{*} \mathfrak{R}$, если найдется конгруэнция ϑ такая, что $\mathfrak{A}/\vartheta \in \mathfrak{R}$, и если $a\vartheta \in \mathfrak{L}$, то $a\vartheta \in \Omega$.

Допустим, что класс $\mathfrak{L}$ поляризован. Тогда подалгеброй некоторой алгебры $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{L}$ может являться только смежный класс $c\vartheta$, содержащий полюс c алгебры $\mathfrak{A}$. Если $c\vartheta \in \Omega$, то и $c\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) \in \Omega$. Поэтому условие $\mathfrak{A} \in \Omega \overset{\circ}{*} \mathfrak{R}$ эквивалентно условию $c\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) \in \Omega$.

Последнее условие можно записать в виде формулы

$$\forall \sigma \in \Sigma \quad \forall a_1, \dots, a_{n(\sigma)} \in \mathfrak{A} \\ \left(a_1, \dots, a_{n(\sigma)} \in c\vartheta(\mathfrak{R}(\mathfrak{A})) \ \& \ \left(\bigotimes_{j=1}^{k(\sigma)} u_{\sigma,j,l}(\bar{a}) = u_{\sigma,j,r}(\bar{a}) \right) \rightarrow v_{\sigma,l}(\bar{a}) = v_{\sigma,r}(\bar{a}) \right).$$

Условие $a_i \in c\vartheta(\mathfrak{R}(\mathfrak{A}))$ эквивалентно условию $\exists n \in \mathbb{N} \quad a_i \in c\vartheta(\mathfrak{R}_n(\mathfrak{A}))$, которое записывается формулой

$$\begin{aligned} \exists n, m \in \mathbb{N}, \quad g_1, \dots, g_m \in \text{Tr}(\mathfrak{A}), \quad b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m \in \mathfrak{A} \\ \left(c = g_1(b_1) \ \& \ a_i = g_m(c_m) \ \& \ \bigotimes_{j=2}^m g_{j-1}(c_{j-1}) = g_j(b_j) \right. \\ \left. \ \& \ \bigotimes_{j=1}^m ((b_j \mathfrak{R}_n(\mathfrak{A}) c_j) \vee (b_j \mathfrak{R}_n(\mathfrak{A}) c_j)) \right) \end{aligned}$$

или, что то же самое, истинна одна из бесконечного множества формул

$$\begin{aligned} \exists b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m \in \mathfrak{A} \quad \overline{\mathcal{A}}_{n,m,g_1,\dots,g_m}(c, a_i, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m), \\ n, m \in \mathbb{N}, \quad g_1, \dots, g_m \in \text{Tr}(\mathfrak{A}), \end{aligned}$$

где $\overline{\mathcal{A}}_{n,m,g_1,\dots,g_m}$ – описанная выше формула. Условие $b\mathfrak{R}_n(\mathfrak{A})c$ можно сформулировать в виде

$$\begin{aligned} \exists \delta \in \Delta, \quad d_1, \dots, d_{n(\delta)} \in \mathfrak{A} \\ \left(\bigotimes_{j=1}^{k(\delta)} (u_{\delta,j,l}(\bar{d}), u_{\delta,j,r}(\bar{d})) \in \vartheta(\mathfrak{R}_{n-1}(\mathfrak{A})) \right) \\ \ \& \ ((b = v_{\delta,l}(\bar{d}) \ \& \ c = v_{\delta,r}(\bar{d})) \vee (c = v_{\delta,l}(\bar{d}) \ \& \ b = v_{\delta,r}(\bar{d}))), \end{aligned}$$

что эквивалентно выполнению одной из множества формул

$$\exists d_1, \dots, d_{n(\delta)} \in \mathfrak{A} \quad \overline{\mathcal{B}}_{n,\delta}(b, c, d_1, \dots, d_{n(\delta)}),$$

где через $\overline{\mathcal{B}}_{n,\delta}$ обозначена записанная выше бескванторная формула. Она не является формулой языка 1-й ступени, однако эквивалентна бесконечной дизъюнкции таких формул.

Введем множество Γ_1 индексов – последовательностей вида $\gamma = (m, g_1, \dots, g_m, \delta_1, \dots, \delta_m)$, $m \in \mathbb{N}$, $g_1, \dots, g_m \in \text{Tr}(\mathfrak{A})$, $\delta_1, \dots, \delta_m \in \Delta$ и формулы

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{C}}_\gamma(x, y, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m, z_{1,1}, \dots, z_{1,k(\delta_1)}, \dots, z_{m,k(\delta_m)}) \\ \equiv x = g_1(b_1) \ \& \ y = g_m(c_m) \ \& \ \bigwedge_{j=1}^m g_{j-1}(c_{j-1}) \\ = g_j(b_j) \ \& \ \bigwedge_{j=1}^m \overline{B}_{n,\delta_j}(b_j, c_j, z_{j,1}, \dots, z_{j,k(\delta_j)}). \end{aligned}$$

С помощью подобных формул можно свести формулировку условия $a \in \text{cv}(\mathfrak{R}_n(\mathfrak{A}))$ к формулировке условий $a \in \text{cv}(\mathfrak{R}_{n-1}(\mathfrak{A}))$. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{1,\delta}(b, c, d_1, \dots, d_{n(\delta)}) &\equiv \overline{\mathcal{B}}_{1,\delta}(b, c, d_1, \dots, d_{n(\delta)}) \equiv \bigwedge_{j=1}^{k(\delta)} u_{\delta,j,l}(\overline{d}) \\ &= u_{\delta,j,r}(\overline{d}_j) \ \& \ ((b = v_{\delta,l}(\overline{d}) \ \& \ c = v_{\delta,r}(\overline{d})) \vee (c = v_{\delta,l}(\overline{d}) \ \& \ b = v_{\delta,r}(\overline{d}))). \end{aligned}$$

Назовем индексы γ из Γ_1 *Г-индексами 1-го уровня*. Если Г-индексы $(n-1)$ -го уровня уже определены, $\gamma_0 = (m, g_1, \dots, g_m, \delta_1, \dots, \delta_m)$ – Г-индекс 1-го уровня и $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ – Г-индексы $(n-1)$ -го уровня, $k = \sum_{j=1}^m k(\sigma)$, то последовательность $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ назовем *Г-индексом n-го уровня*. Через Γ обозначим множество всех Г-индексов. Для Г-индекса γ 1-го уровня через $\mathcal{A}_\gamma$ обозначим следующую формулу:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\gamma(x, y, \overline{z}) &= \mathcal{A}_\gamma(x, y, z_{l,1}, \dots, z_{l,m}, z_{r,1}, \dots, z_{r,m}, z_{1,1}, \dots, z_{1,k(\delta_1)}, \dots, z_{m,k(\delta_m)}) \\ &\equiv \left(x = g_1(b_{l,1}) \ \& \ y = g_m(b_{r,m}) \ \& \ \bigwedge_{j=2}^m g_{j-1}(z_{r,j-1}) = g_j(z_{l,j}) \right. \\ &\quad \left. \& \ \bigwedge_{j=1}^m \mathcal{B}_{1,\delta}(z_{l,j}, z_{r,j}, z_{j,1}, \dots, z_{j,k(\delta_j)}) \right) \end{aligned}$$

без связанных вхождений переменных.

Если для Г-индексов уровня меньше n формулы $\mathcal{A}_\gamma$ уже определены, то для индекса γ уровня $n-1$ обозначим через $\mathcal{B}_{n,\delta,\gamma_1,\dots,\gamma_{k(\delta)}}$ формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n,\delta,\gamma_1,\dots,\gamma_{k(\delta)}}(x, y, \overline{z}) &\equiv \bigwedge_{j=1}^{k(\delta)} \mathcal{A}_{\gamma_j}(u_{\delta,j,l}(\overline{z}_0), u_{\delta,j,l}(\overline{z}_0)\overline{z}_j) \\ &\ \& \ ((x = v_{\delta,l}(\overline{z}_0) \ \& \ y = v_{\delta,r}(\overline{z}_0)) \vee (y = v_{\delta,l}(\overline{z}_0) \ \& \ x = v_{\delta,r}(\overline{z}_0))), \end{aligned}$$

также не содержащую связанных вхождений переменных, а через $\mathcal{A}_\gamma$ формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\gamma(x, y, \overline{z}) &\equiv \left(x = g_1(z_{l,1}) \ \& \ y = g_m(z_{r,m}) \ \& \ \bigwedge_{j=2}^m g_{j-1}(z_{r,j-1}) = g_j(z_{l,j}) \right. \\ &\quad \left. \& \ \bigwedge_{j=1}^m \mathcal{B}_{n,\delta,\gamma_1,\dots,\gamma_{k(\delta)}}(z_{l,j}, z_{r,j}, \overline{z}_j) \right). \end{aligned}$$

Тогда условие $a_i \in c\vartheta(\mathfrak{R}(\mathfrak{A}))$ эквивалентно выполнению одной из формул $\exists \bar{z} \mathcal{A}_\gamma(c, a_j, \bar{z})$ для некоторого γ из Γ .

Обозначим через Λ множество кортежей вида

$$\lambda = (\sigma, \gamma_1, \dots, \gamma_{k(\sigma)}), \quad \sigma \in \Sigma, \quad \gamma_1, \dots, \gamma_{k(\sigma)} \in \Gamma_1,$$

а через $\mathcal{D}_\lambda$ формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\lambda(x_1, \dots, x_{n(\sigma)}, \bar{z}) \equiv & \bigwedge_{j=1}^{n(\sigma)} \mathcal{A}_{\gamma_j}(c, x_j, \bar{z}_j) \\ & \bigwedge_{j=1}^{k(\sigma)} \bigwedge_{l=1}^{r(\gamma_j)} (u_{\sigma,j,l}(\bar{x}) = u_{\sigma,j,r}(\bar{x})) \rightarrow (v_{\sigma,l}(\bar{x}) = v_{\sigma,r}(\bar{x})) \end{aligned}$$

без связанных переменных. Тогда, как нетрудно заметить, условие принадлежности $c\vartheta(\mathfrak{R}(\mathfrak{A})) \in \Omega$ эквивалентно системе квазитожеств $\{\exists \bar{x}, \bar{z} \mathcal{D}_\lambda(\bar{x}, \bar{z})\}_{\lambda \in \Lambda}$.

ТЕОРЕМА 2. *Множество формул $\{\exists \bar{x}, \bar{z} \mathcal{D}_\lambda(\bar{x}, \bar{z})\}_{\lambda \in \Lambda}$ образует базис квазитожеств произведения квазимногообразий $\Omega \stackrel{\mathcal{L}}{*} \mathfrak{R}$ поляризованного класса алгебр $\mathcal{L}$.*

3. Приложение к теории ℓ -групп. Рассмотрим класс $\mathcal{L}_\ell$ ℓ -групп, т.е. алгебр сигнатуры $\langle e, \cdot, {}^{-1}, \vee, \wedge \rangle$, являющихся группами и решетками одновременно, причем групповые и решеточные операции согласованы. Основные определения можно найти в книге В.М. Копытова [4]. Известно, что

- 1) подалгебрами, соответствующими конгруэнциям на ℓ -группах, являются ℓ -идеалы – выпуклые нормальные замкнутые относительно решеточных операций подгруппы;
- 2) ℓ -идеал, порожденный подмножеством H , является множеством значений термов $((f \wedge |h_1|^{t_1} \cdots |h_k|^{t_k}) \vee |h_k|^{t_k^{-1}} \cdots |h_1|^{t_1^{-1}}), f, t_1, \dots, t_k \in G, h_1, \dots, h_k \in H, k \in \mathbb{N}$;
- 3) квазитожества произвольного квазимногообразия Ω_ℓ ℓ -групп могут быть записаны в виде

$$\Phi_\sigma \equiv \forall x_1, \dots, x_{n(\sigma)} u_\sigma(x_1, \dots, x_{n(\sigma)}) = e \longrightarrow v_\sigma(x_1, \dots, x_{n(\sigma)}) = e.$$

Обозначим через $\Omega_\ell(G)$ наименьший ℓ -идеал ℓ -группы G , фактор-группа по которому лежит в Ω_ℓ , и определим по индукции цепочку ℓ -идеалов $J_n(H)$:

$$\begin{aligned} J_0(H) &= H \cup e; \\ J_n(H) &= \left(f \wedge \prod_{j=1}^k |v_{\sigma_j}(\bar{g}_j)|^{t_j} \right) \vee \left(\prod_{j=1}^k |v_{\sigma_j}(\bar{g}_j)|^{t_j} \right)^{-1}, \\ & \quad f, t_1, \dots, t_k \in G, \quad g_i \in J_{n-1}(H). \end{aligned}$$

Тогда в их объединении мы получим ℓ -идеал, порожденный множеством H .

ТЕОРЕМА 1'. Имеем $\Omega_\ell(G) = \bigcup_{n=0}^\infty J_n(\emptyset)$, $G/\Omega_\ell(G) \in \Omega$.

Пусть квазимногообразия ℓ -групп Ω_ℓ и $\mathfrak{R}_\ell$ заданы множествами квазитождеств $\Sigma = \{\Phi_\sigma\}$ и $\Delta = \{\Psi_\delta\}$ соответственно.

Определим индексы 1-го уровня $\gamma = (m, \delta_1, \dots, \delta_m)$, $m \in \mathbb{N}$, $\delta_j \in \Delta$, и формулу

$$\mathcal{A}_\gamma(x, f, t_1, \dots, t_m, y_{1,1}, \dots, y_{1,k(\delta_1)}, \dots, y_{m,k(\delta_m)}) \\ \equiv x = \left(f \wedge \prod_{j=1}^m |v_{\sigma_j}(\bar{y}_j)|^{t_j} \right) \vee \left(\prod_{j=1}^k |v_{\sigma_j}(\bar{y}_j)|^{t_j} \right)^{-1}.$$

Если индексы $n-1$ -го уровня уже определены, $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ — индексы уровня меньше n и $\gamma_0 = (m, \delta_1, \dots, \delta_m)$ — индекс 1-го уровня, то $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ — индекс n -го уровня. Множество всех индексов γ обозначим через Γ . Если формулы $\mathcal{A}_{\gamma_j}(x, \bar{z})$ для индексов γ_j уровня $n-1$ уже определены, то

$$\mathcal{A}_\gamma(x, f, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}) \equiv \bigwedge_{j=1}^m \mathcal{A}_{\gamma_j}(u_{\delta_j}(\bar{y}_j), \bar{z}_j) \\ \& x = \left(f \wedge \prod_{j=1}^m |v_{\sigma_j}(\bar{y}_j)|^{t_j} \right) \vee \left(\prod_{j=1}^k |v_{\sigma_j}(\bar{y}_j)|^{t_j} \right)^{-1}.$$

Тогда условие $g \in \Omega_\ell(G)$ записывается в виде

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \exists f, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z} \mathcal{A}_\gamma(g, f, \bar{y}, \bar{t}, \bar{z}).$$

Обозначим множество кортежей $\lambda = (\sigma, \gamma_1, \dots, \gamma_{n(\sigma)})$, $\sigma \in \Sigma$, $\gamma_j \in \Gamma$, через Λ и для λ из Λ рассмотрим формулу

$$\mathcal{D}_\lambda(x_1, \dots, x_{n(\sigma)}, \bar{z}) \equiv \bigwedge_{j=1}^{n(\sigma)} \mathcal{A}_{\gamma_j}(x_j, \bar{z}_j) \& u_\sigma(\bar{x}) = e \rightarrow v_\sigma(\bar{x}) = e.$$

ТЕОРЕМА 2'. Множество формул $\{\exists \bar{x}, \bar{z} \mathcal{D}_\lambda(\bar{x}, \bar{z})\}_{\lambda \in \Lambda}$ образует базис квазитождеств произведения $\Omega_\ell \overset{\Sigma}{*} \mathfrak{R}_\ell$ квазимногообразий ℓ -групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1972.
- [2] Смирнов Д. М. Многообразия алгебр. Новосибирск: Наука, 1992.
- [3] Мальцев А. И. Об умножении классов алгебраических систем // Сиб. матем. ж. 1967. Т. 8. № 2. С. 346–365.
- [4] Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.