Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Пустовойтов, О наилучших приближениях аналогами “своих” и “не своих” гиперболических крестов, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 466–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:04:55

О наилучших приближениях аналогами “своих” и “не своих” гиперболических крестов

Н. Н. Пустовойтов

В статье приводятся точные порядки приближений классов H_q^Ω в случае, когда $\Omega(t)$ содержит как степенные, так и логарифмические множители. Также найдены точные порядки наилучших приближений этих классов аналогами “не своих” гиперболических крестов.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm8458

Введение. Хорошо известны многочисленные результаты об оптимальных порядках наилучших приближений классов Соболева $W_{q,\alpha}^r$ и Никольского H_q^r тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов $\Gamma(N, \gamma)$ и ступенчатых гиперболических крестов Q_n^r (обозначения взяты из [1]), которые порождаются поверхностями уровня функции $\Omega(t_1, \dots, t_d) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$. В работе автора [2] рассмотрены приближения классов H_q^Ω тригонометрическими полиномами с гармониками из множеств $Q(N)$, порожденных поверхностями уровня функции $\Omega(t)$.

В предлагаемой работе приводятся точные порядки наилучших приближений классов H_q^Ω в случае, когда функция $\Omega(t)$ содержит как степенные, так и логарифмические множители (определения ниже).

Для наилучших приближений классов Соболева и Никольского известен эффект “не своих” гиперболических крестов. Это означает, что существуют множества $Q_n^{r'}$ и $\Gamma(N, \gamma')$ (“не свои” гиперболические кресты), немного более широкие, чем “свой” гиперболические кресты, такие, что количество элементов множеств Q_n^r и $Q_n^{r'}$ (соответственно $\Gamma(N, \gamma)$ и $\Gamma(N, \gamma')$) по порядку совпадают, однако, наилучшие приближения тригонометрическими полиномами с гармониками из “не своих” гиперболических крестов $Q_n^{r'}$ ($\Gamma(N, \gamma')$) по порядку лучше, чем приближения “своими” гиперболическими крестами Q_n^r ($\Gamma(N, \gamma)$). Это явление впервые было обнаружено Теляковским в работе [3] для классов Соболева. В дальнейшем приближения “не своими” гиперболическими крестами классов Никольского изучались в работах Бугрова [4], [5], Никольской [6]. Наиболее полно приближения “не своими” гиперболическими крестами классов Соболева и Никольского рассмотрены в уже упоминавшейся работе Темлякова [1].

В данной работе показано, что если функция $\Omega(t)$ содержит наряду со степенными, также и логарифмические множители, то при определенных различиях в показателях логарифмических множителей также наблюдается эффект “не своих” гиперболических крестов. Для упомянутой здесь функции $\Omega(t)$ для размерности 2 в работе [7] изучены ортопоперечники классов H_q^Ω , а в работе [8] (также для размерности 2) изучен эффект “не своих” гиперболических крестов. В предлагаемой работе рассматривается произвольная размерность d . Формулировки приводимых здесь результатов приведены в [9]. Отметим, что эти оценки позволяют в некоторых случаях получать правильные по порядку оценки сверху ортопоперечников классов H_q^Ω .

1. Обозначения. Оценка количества элементов приближающих множеств. Рассмотрим функцию $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$, определенную следующим образом. Положим для $t_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$

$$\Omega(t) = \begin{cases} \prod_{j=1}^d \frac{t_j^r}{(\log 1/t_j)_+^{b_j}}, & t_j > 0, j = 1, \dots, d, \\ 0, & \prod_{j=1}^d t_j = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $(\log 1/t_j)_+ = \max\{1, \log 1/t_j\}$, причем логарифм берется (как и всюду ниже) по основанию 2.

Зададим класс функций

$$H_q^\Omega = \{f(x) = f(x_1, \dots, x_d) : f(x) \in L_q^0, \Omega(f, t)_q \leq \Omega(t)\}.$$

Здесь рассматриваются функции $f(x)$ от d вещественных переменных, имеющие период 2π по каждой переменной. Запись $f(x) \in L_q^0$ означает, что

$$f(x) \in L_q(\pi_d) \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d,$$

причем $\pi_d = [-\pi, \pi]^d$. Функция $\Omega(t)$ задается равенством (1). Кроме того,

$$\Omega(f, t)_q = \Omega^l(f, t)_q = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=1, \dots, d}} \|\Delta_h^l f(x)\|_q$$

– смешанный модуль непрерывности порядка l ($t = t_1, \dots, t_d$, $h = (h_1, \dots, h_d)$). Разность $\Delta_h^l f(x)$ означает взятие разности порядка l по переменной x_j с шагом h_j . Считаем, что $0 < r < l$.

Так же, как и в работе [2], приближающие множества определяются поверхностями уровня функции (1). А именно,

$$\Gamma(N) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) : |k_j| \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \Omega\left(\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_d}\right) \geq \frac{1}{N} \right\},$$

т.е.

$$\Gamma(N) = \left\{ k : |k_j| \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \prod_{j=1}^d |k_j|^r (\log |k_j|)_+^{b_j} \leq N \right\}.$$

Также рассмотрим множества

$$\mathfrak{a}(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, \prod_{j=1}^d 2^{rs_j} s_j^{b_j} \leq N \right\},$$

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \mathfrak{a}(N)} \rho(s),$$

где

$$\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : k_j \in \mathbb{Z}, 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d\}$$

– двоичная пачка. Также нам понадобятся множества $\theta(N) = \mathfrak{a}(2^l N) \setminus \mathfrak{a}(N)$. Или подробнее

$$\theta(N) = \left\{ s : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, d, N < \prod_{j=1}^d 2^{rs_j} s_j^{b_j} \leq 2^l N \right\}. \quad (2)$$

В нашей работе речь идет о порядковых равенствах и порядковых неравенствах. Запись $A(N) \ll B(N)$ означает, что существует число C , не зависящее от N , такое, что $A(N) \leq CB(N)$. Аналогично понимается неравенство $A(N) \gg B(N)$. Порядковое равенство $A(N) \asymp B(N)$ означает, что $A(N) \ll B(N) \ll A(N)$.

Как показано в [2], $|\theta(N)| \asymp (\log N)^{d-1}$, где $|D|$ обозначает количество элементов множества D .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что $Q(N) \subset \Gamma(N) \subset Q(2^{r d + \sum |b_j|} N)$, откуда следует, что $|\Gamma(N)| \asymp |Q(N)|$.

Оценим $|\Gamma(N)|$:

$$|\Gamma(N)| = 2^d |\Gamma_+(N)|, \quad \text{где } \Gamma_+(N) = \{k \in \Gamma(N), k_j > 0, j = 1, \dots, d\}.$$

Непосредственным подсчетом с использованием рассуждений из доказательства утверждения 1 из [7] доказываются следующие леммы.

ЛЕММА 1. Верно следующее порядковое равенство:

$$\int_1^A \frac{1}{\tau (\log \tau)_+^{\alpha/r}} \cdot \left(\log \frac{A^r (\log A)_+^\alpha}{\tau^r (\log \tau)_+^\alpha} \right)_+^{-\gamma/r} d\tau \asymp \phi_1(A, r, \alpha, \gamma),$$

где

$$\phi_1(A, r, \alpha, \gamma) = \begin{cases} (\log A)^{-\alpha/r - \gamma/r + 1}, & \alpha < r, \gamma < r; \\ (\log A)^{-\gamma/r} \log \log A, & \alpha = r, \gamma \leq r; \\ (\log A)^{-\alpha/r} \log \log A, & \alpha < r, \gamma = r; \\ (\log A)^{-\alpha/r}, & \alpha \leq r, \gamma > r; \\ (\log A)^{-\gamma/r}, & \alpha > r, \gamma \leq r; \\ (\log A)^{-\delta/r}, & \delta = \min\{\alpha, \gamma\} > r. \end{cases}$$

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha \leq \gamma \leq r, \xi > 0$. Тогда

$$\int_1^A \frac{1}{\tau (\log \tau)_+^{\alpha/r}} \left(\log \frac{A^r (\log A)_+^\alpha}{\tau^r (\log \tau)_+^\alpha} \right)_+^{-\gamma/r} \left(\log \log \frac{A^r (\log A)_+^\alpha}{\tau^r (\log \tau)_+^\alpha} \right)_+^\xi d\tau \asymp \phi_2(A, r, \alpha, \gamma, \xi),$$

где

$$\phi_2(A, r, \alpha, \gamma, \xi) = \begin{cases} (\log A)^{-\gamma/r-\alpha/r+1} (\log \log A)^\xi, & \gamma < r, \\ (\log A)^{-\alpha/r} (\log \log A)^{\xi+1}, & \alpha \leq r, \gamma = r. \end{cases}$$

Сформулируем и докажем теорему о количестве элементов множества $\Gamma_+(N)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_d$. Тогда для $|\Gamma_+(N)|$ верны следующие порядковые равенства

- если $b_1 = \dots = b_\nu = r < b_{\nu+1} \leq \dots \leq b_d$, то

$$|\Gamma_+(N)| \asymp N^{1/r} (\log N)^{-1} (\log \log N)^{\nu-1};$$

- если $b_\mu < r$, $b_{\mu+1} = \dots = b_\nu = r$, $b_{\nu+1} > r$, $\mu \geq 1$, $\nu \leq d$, то

$$|\Gamma_+(N)| \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_\mu/r + (\mu-1)} (\log \log N)^{\nu-\mu};$$

- если $b_\mu < r < b_{\mu+1}$, то

$$|\Gamma_+(N)| \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_\mu/r + (\mu-1)};$$

- если $r \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_d$, причем $b_2 > r$, то

$$|\Gamma_+(N)| \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r};$$

- если $b_1 \leq \dots \leq b_d < r$, то

$$|\Gamma_+(N)| \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_1/r - \dots - b_d/r + d-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вторую оценку, т.е. рассмотрим случай

$$b_\mu < r, \quad b_{\mu+1} = \dots = b_\nu = r, \quad b_{\nu+1} > r.$$

Если $k_j^r (\log k_j)^{b_j} \asymp N$, то $\log k_j \asymp \log N$, $k_j \asymp N^{1/r} (\log N)^{-b_j/r}$.

Обозначим

$$M_j(N) = N^{1/r} (\log N)^{-b_j/r},$$

$$M'_j(N) = M_j \left(\frac{N}{\prod_{i=1}^{j-1} k_i^r (\log k_i)_+^{b_i}} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\Gamma_+(N)| &\asymp \int_1^{M_1(N)} dk_1 \int_1^{M'_2(N)} dk_2 \dots \int_1^{M'_d(N)} dk_d \\ &\asymp \int_1^{M_1(N)} dk_1 \dots \int_1^{M'_{d-1}(N)} \frac{N^{1/r}}{\prod_{j=1}^{d-1} k_j (\log k_j)_+^{b_j/r}} \\ &\quad \times \left(\log \frac{N}{\prod_{j=1}^{d-1} k_j^r (\log k_j)_+^{b_j}} \right)_+^{-b_d/r} dk_{d-1} \end{aligned}$$

(по лемме 1 $d - \nu - 1$ раз)

$$\asymp \int_1^{M_1(N)} dk_1 \cdots \int_1^{M'_{\nu-2}(N)} \frac{N^{1/r}}{\prod_{j=1}^{\nu-2} k_j (\log k_j)_+^{b_j/r}} \left(\log \frac{N}{\prod_{j=1}^{\nu-2} k_j^r (\log k_j)_+^{b_j}} \right)_+^{-1} \\ \times \left(\log \log \frac{N}{\prod_{j=1}^{\nu-2} k_j^r (\log k_j)_+^{b_j}} \right)_+ dk_{\nu-2}$$

(по лемме 2 $\nu - \mu - 2$ раз)

$$\asymp \int_1^{M_1(N)} dk_1 \cdots \int_1^{M'_\mu(N)} \frac{N^{1/r}}{\prod_{j=1}^\mu k_j (\log k_j)_+^{b_j/r}} \left(\log \frac{N}{\prod_{j=1}^\mu k_j^r (\log k_j)_+^{b_j}} \right)_+^{-1} \\ \times \left(\log \log \frac{N}{\prod_{j=1}^\mu k_j^r (\log k_j)_+^{b_j}} \right)_+^{\nu-\mu-1} dk_\mu.$$

Если $\mu = 1$, то по лемме 2 получаем результат. Если $\mu = 2$, то применяем лемму 2 еще 2 раза. Если $\mu \geq 3$, то применяем лемму 2 еще 3 раза и получаем оценку из второго случая.

Остальные оценки доказываются аналогично с использованием лемм 1 и 2.

2. Наилучшие приближения. Перейдем к рассмотрению наилучших приближений. Через $E_{Q(N)}(f)_p$ обозначим наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими (вещественными) полиномами с гармониками из $Q(N)$, а величина $E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p$ определяется так:

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p = \sup_{f \in H_q^\Omega} E_{Q(N)}(f)_p.$$

В работе [2] доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega(t)$ определяется равенством (1) с $0 < r < l$. Предположим, что параметры q и p удовлетворяют одному из следующих соотношений:

- 1) $1 \leq q = p < \infty$;
- 2) $1 < p < q \leq \infty$, $q \geq 2$;
- 3) $1 \leq p < q \leq 2$.

Тогда

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p \asymp \frac{1}{N} (\log N)^{(d-1)/q_0}, \quad q_0 = \min\{q; 2\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq q < p < \infty$ и $\Omega(t)$ определяется равенством (1) с $1/q - 1/p < r < l$. Тогда

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p \asymp \frac{1}{N} \left(\sum_{s \in \theta(N)} 2^{\|s\|_1(1/q-1/p)p} \right)^{1/p},$$

где $\theta(N)$ см. в (2), $\|s\|_1 = s_1 + \cdots + s_d$.

Конкретизируем оценку из теоремы 3 для нашего случая. Так как $\Omega(t)$ определяется равенством (1), то для $s \in \theta(N)$ будет

$$2^{\|s\|_1 \alpha} \asymp \frac{N^{\alpha/r}}{\prod_{j=1}^d s_j^{(\alpha/r)b_j}}.$$

ЛЕММА 3. Для суммы $\sigma = \sum_{s \in \theta(N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\gamma_j}$ верны следующие порядковые равенства (считаем $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_d$):

- если $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_d < 1$, то

$$\sigma \asymp (\log N)^{d-1-\gamma_1-\dots-\gamma_d};$$

- если $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} = \dots = \gamma_d = 1$, то

$$\sigma \asymp (\log N)^{\nu-1-\gamma_1-\dots-\gamma_\nu} (\log \log N)^{d-\nu};$$

- если $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} = \dots = \gamma_{\nu+\mu} = 1 < \gamma_{\nu+\mu+1} \leq \dots \leq \gamma_d$, $\nu + \mu \leq d$, то

$$\sigma \asymp (\log N)^{\nu-1-\gamma_1-\dots-\gamma_\nu} (\log \log N)^\mu;$$

- если $\gamma_1 = \dots = \gamma_\nu = 1 < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_d$, то

$$\sigma \asymp \frac{(\log \log N)^{\nu-1}}{\log N};$$

- если $1 < \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_d$, то

$$\sigma \asymp (\log N)^{-\gamma_1};$$

- если $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_\nu < 1 < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_d$, то

$$\sigma \asymp (\log N)^{\nu-1-\gamma_1-\dots-\gamma_\nu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать индукцией по размерности. Предположим, что лемма 3 верна для размерности $d-1$. Докажем ее для размерности d .

Пусть $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_d < 1$. Тогда, используя предположение индукции, получим

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{s \in \theta(N)} \prod_{j=1}^d s_j^{-\gamma_j} \asymp \sum_{s_d=1}^{C \log N} s_d^{-\gamma_d} \left(\log \frac{N}{2^{r s_d} s_d^{b_d}} \right)^{d-2-\gamma_1-\dots-\gamma_{d-1}} \\ &= \sum_{s_d \leq 1/(2r) \log N} + \sum_{s_d > 1/(2r) \log N} = \sigma_1 + \sigma_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\asymp (\log N)^{d-2-\gamma_1-\dots-\gamma_{d-1}} \sum_{s_d=1}^{1/(2r) \log N} s_d^{-\gamma_d} \asymp (\log N)^{d-1-\gamma_1-\dots-\gamma_d}, \\ \sigma_2 &\asymp (\log N)^{-\gamma_d} \sum_{s_d=1/(2r) \log N}^{C \log N} \left(\frac{1}{r} \log N - s_d \left(1 + \frac{b_d \log s_d}{r s_d} \right) \right)^{d-2-\gamma_1-\dots-\gamma_{d-1}} \\ &\asymp (\log N)^{-\gamma_d} \sum_{u=1}^{C_1 \log N} u^{d-2-\gamma_1-\dots-\gamma_{d-1}} \asymp (\log N)^{d-1-\gamma_1-\dots-\gamma_d}, \end{aligned}$$

так как $d-2-\gamma_1-\dots-\gamma_{d-1} > -1$. Оценка в первом случае доказана.

Рассмотрим второй случай

$$\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} = \dots = \gamma_d = 1.$$

По предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} \sigma &\asymp \sum_{s_d=1}^{C \log N} s_d^{-\gamma_d} \left(\log \frac{N}{2^{rs_d} s_d^{b_d}} \right)^{\nu-1-\gamma_1-\dots-\gamma_\nu} \left(\log \log \frac{N}{2^{rs_d} s_d^{b_d}} \right)^{d-1-\nu} \\ &= \sum_{s_d \leq 1/(2r) \log N} + \sum_{s_d > 1/(2r) \log N} = \sigma_1 + \sigma_2, \\ \sigma_1 &\asymp (\log N)^{\nu-1-\gamma_1-\dots-\gamma_\nu} (\log \log N)^{d-1-\nu} \sum_{s_d=1}^{1/(2r) \log N} s_d^{-1} \\ &\asymp (\log N)^{\nu-1-\gamma_1-\dots-\gamma_\nu} (\log \log N)^{d-\nu}, \\ \sigma_2 &\asymp (\log N)^{-\gamma_d} \sum_{s_d > 1/(2r) \log N} \left(\frac{1}{r} \log N - s_d \left(1 + \frac{b_d \log s_d}{rs_d} \right) \right)^{\nu-1-\gamma_1-\dots-\gamma_\nu} \\ &\quad \times \left(\log \left(\frac{1}{r} \log N - s_d \left(1 + \frac{b_d \log s_d}{rs_d} \right) \right) \right)_+^{d-1-\nu} \\ &\asymp (\log N)^{-\gamma_d} \sum_{u=1}^{C_1 \log N} u^{\nu-1-\gamma_1-\dots-\gamma_\nu} (\log u)_+^{d-1-\nu}. \end{aligned}$$

Оценим сумму $\sum_{u=1}^{C_1 \log N} u^\alpha (\log u)^\beta$, где $\alpha > -1$, $\beta \geq 1$. С одной стороны,

$$\sum_{u=1}^{C_1 \log N} u^\alpha (\log u)^\beta \ll (\log \log N)^\beta \sum_{u=1}^{C_1 \log N} u^\alpha \asymp (\log \log N)^\beta (\log N)^{\alpha+1}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^{C_1 \log N} u^\alpha (\log u)^\beta &\gg \sum_{u=(C_1/2) \log N}^{C_1 \log N} u^\alpha (\log u)^\beta \\ &\gg (\log \log N)^\beta \sum_{u=(C_1/2) \log N}^{C_1 \log N} u^\alpha \asymp (\log \log N)^\beta (\log N)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma_2 \asymp (\log N)^{\nu-1-\gamma_1-\dots-\gamma_\nu} (\log \log N)^{d-1-\nu},$$

откуда получаем вторую оценку.

Остальные оценки доказываются аналогично.

Полагая

$$\gamma_j = \frac{p/q - 1}{r} b_j,$$

с учетом леммы 3 можно сформулировать теорему 3 следующим образом:

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 \leq q < p < \infty$ и $\Omega(t)$ определяется равенством (1) с $1/q - 1/p < r < l$. Тогда

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_p \asymp N^{(1/r)(1/q-1/p-r)} \phi_3(N, d, q, p, r),$$

где для $\phi_3(N, d, q, p, r)$ верны следующие порядковые равенства

- если $b_1 \leq \dots \leq b_d < r/(p/q - 1)$, то

$$\phi_3(N, d, q, p, r) \asymp (\log N)^{(d-1)/p - ((1/q-1/p)/r)(b_1 + \dots + b_d)},$$

- если $b_1 \leq \dots \leq b_\nu < b_{\nu+1} = \dots = b_d = r/(p/q - 1)$, то

$$\phi_3(N, d, q, p, r) \asymp (\log N)^{(\nu-1)/p - ((1/q-1/p)/r)(b_1 + \dots + b_\nu)} (\log \log N)^{(d-\nu)/p};$$

- если $b_1 \leq \dots \leq b_\nu < b_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\mu} = r/(p/q - 1) < b_{\nu+\mu+1} \leq \dots \leq b_d$, то

$$\phi_3(N, d, q, p, r) \asymp (\log N)^{(\nu-1)/p - ((1/q-1/p)/r)(b_1 + \dots + b_\nu)} (\log \log N)^{\mu/p};$$

- если $b_1 = \dots = b_\nu = r/(p/q - 1) < b_{\nu+1} \leq \dots \leq b_d$, то

$$\phi_3(N, d, q, p, r) \asymp \frac{(\log \log N)^{(\nu-1)/p}}{(\log N)^{1/p}};$$

- если $r/(p/q - 1) < b_1 \leq \dots \leq b_d$

$$\phi_3(N, d, q, p, r) \asymp (\log N)^{-((1/q-1/p)/r)b_1},$$

- если $b_1 \leq \dots \leq b_\nu < r/(p/q - 1) < b_{\nu+1} \leq \dots \leq b_d$

$$\phi_3(N, d, q, p, r) \asymp (\log N)^{(\nu-1)/p - ((1/q-1/p)/r)(b_1 + \dots + b_\nu)}.$$

3. Эффект “не своих” гиперболических крестов. В нашем случае можно видеть, что этот эффект возможен тогда, когда некоторые $b_j > r$. Будем считать, что $b_\nu \leq r < b_{\nu+1}$. В этом случае роль “своих” гиперболических крестов играют множества $Q(N)$. Роль “не своих” гиперболических крестов будут играть множества

$$Q'(N) = \bigcup_{s \in \mathfrak{ae}^l(N)} \rho(s), \quad \text{где } \mathfrak{ae}^l(N) = \left\{ s : s_j \in \mathbb{N}, \prod_{j=1}^d 2^{rs_j} s_j^{b'_j} \leq N \right\},$$

$b'_j = b_j$ при $j = 1, \dots, \nu$ и $r < b'_j < b_j$ при $j = \nu + 1, \dots, d$.

Если $r < b_1 = \dots = b_\nu < b_{\nu+1} \leq \dots \leq b_d$, то

$$b'_j = b_j, \quad j = 1, \dots, \nu, \quad b_1 < b'_j < b_j, \quad j = \nu + 1, \dots, d.$$

Как следует из теоремы 1 и замечания 1, $|Q'(N)| \asymp |Q(N)|$. Из теоремы 2 при $1 < q < \infty$ имеем

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_q \asymp \frac{1}{N} (\log N)^{(d-1)/q_0}, \quad q_0 = \min\{q; 2\}.$$

Оценим приближения $E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q$. Обозначим $\theta'(N) = \mathfrak{ae}^l(2^l N) \setminus \mathfrak{ae}^l(N)$, $\theta(N)$ определено выше.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < q < \infty$. Предположим, что $b_{\nu+1} - b'_{\nu+1} \leq \dots \leq b_d - b'_d$. Тогда

$$E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q \asymp \frac{1}{N} \phi_4(N, d, q_0, b, b'),$$

где $q_0 = \min\{q; 2\}$, а для функции $\phi_4(N, d, q_0, b, b')$ верны следующие порядковые равенства:

- если $b_{\nu+1} - b'_{\nu+1} \leq \dots \leq b_d - b'_d < 1/q_0$, то

$$\phi_4(N, d, q_0, b, b') \asymp (\log N)^{(d-1)/q_0 - (b_{\nu+1} - b'_{\nu+1}) - \dots - (b_d - b'_d)},$$

- если $b_{\nu+1} - b'_{\nu+1} \leq \dots \leq b_{\nu+\xi} - b'_{\nu+\xi} < b_{\nu+\xi+1} - b'_{\nu+\xi+1} = \dots = b_d - b'_d = 1/q_0$, то

$$\begin{aligned} \phi_4(N, d, q_0, b, b') \\ \asymp (\log N)^{(\nu+\xi-1)/q_0 - (b_{\nu+1} - b'_{\nu+1}) - \dots - (b_{\nu+\xi} - b'_{\nu+\xi})} (\log \log N)^{(d-\xi-\nu)/q_0}; \end{aligned}$$

- если $b_{\nu+1} - b'_{\nu+1} \leq \dots \leq b_{\nu+\xi} - b'_{\nu+\xi} < b_{\nu+\xi+1} - b'_{\nu+\xi+1} = \dots = b_{\nu+\xi+\mu} - b'_{\nu+\xi+\mu} = 1/q_0 < b_{\nu+\xi+\mu+1} - b'_{\nu+\xi+\mu+1} \leq \dots \leq b_d - b'_d$, то

$$\phi_4(N, d, q_0, b, b') \asymp (\log N)^{(\nu+\xi-1)/q_0 - (b_{\nu+1} - b'_{\nu+1}) - \dots - (b_{\nu+\xi} - b'_{\nu+\xi})} (\log \log N)^{\mu/q_0};$$

- если $b_{\nu+1} - b'_{\nu+1} = \dots = b_{\nu+\xi} - b'_{\nu+\xi} = 1/q_0 < b_{\nu+\xi+1} - b'_{\nu+\xi+1} \leq \dots \leq b_d - b'_d$, то

$$\phi_4(N, d, q_0, b, b') \asymp (\log N)^{(\nu-1)/q_0} (\log \log N)^{\xi/q_0};$$

- если $1/q_0 < b_{\nu+1} - b'_{\nu+1} \leq \dots \leq b_d - b'_d$, то

$$\phi_4(N, d, q_0, b, b') \asymp (\log N)^{(\nu-1)/q_0};$$

- если $b_{\nu+1} - b'_{\nu+1} \leq \dots \leq b_{\nu+\xi} - b'_{\nu+\xi} < 1/q_0 < b_{\nu+\xi+1} - b'_{\nu+\xi+1} \leq \dots \leq b_d - b'_d$, то

$$\phi_4(N, d, q_0, b, b') \asymp (\log N)^{(\nu+\xi-1)/q_0 - (b_{\nu+1} - b'_{\nu+1}) - \dots - (b_{\nu+\xi} - b'_{\nu+\xi})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем оценки сверху:

$$E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q \ll \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d \setminus \mathfrak{A}'(N)} (\Omega(2^{-s}))^{q_0} \right)^{1/q_0}$$

(лемма 1 из [2])

$$\ll \left(\sum_{s \in \theta'(N)} (\Omega(2^{-s}))^{q_0} \right)^{1/q_0}.$$

Для $s \in \theta'(N)$ имеем:

$$\text{из } \prod_{j=1}^d 2^{rs_j} s_j^{b'_j} \asymp N \quad \text{следует} \quad \Omega(2^{-s}) \asymp \frac{1}{N \prod_{j=\nu+1}^d s_j^{b_j - b'_j}}.$$

Поэтому

$$E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q \ll \frac{1}{N} \left(\sum_{s \in \theta'(N)} \frac{1}{\prod_{j=\nu+1}^d s_j^{(b_j - b'_j)q_0}} \right)^{1/q_0}.$$

Легко видеть, что лемма 3, сформулированная для $\theta(N)$, остается справедливой и для $\theta'(N)$. Следовательно, из леммы 3, полагая $\gamma_1 = \dots = \gamma_\nu = 0$, получаем требуемые оценки сверху.

Для получения оценок снизу в случае $1 < q < 2$ рассмотрим функцию

$$f_q(x) = B \sum_s \Omega(2^{-s}) 2^{\|s\|_1(1/q-1)} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)},$$

которая уже использовалась в [2] и ранее аналог этой функции использовался при изучении наилучших приближений классов Никольского.

Как следует из [2],

$$E_{Q'(N)}(f_q)_q \gg \left(\sum_{s \in \theta'(N)} (\Omega(2^{-s}))^q \right)^{1/q}.$$

Поскольку для $s \in \theta'(N)$

$$\Omega(2^{-s}) \asymp \frac{1}{N \prod_{j=\nu+1}^d s_j^{b_j-b'_j}},$$

то

$$E_{Q'(N)}(f_q)_q \gg \frac{1}{N} \left(\sum_{s \in \theta'(N)} \frac{1}{\prod_{j=\nu+1}^d s_j^{(b_j-b'_j)q}} \right)^{1/q}.$$

Далее, используя лемму 3 с $\gamma_1 = \dots = \gamma_\nu = 0$, получаем требуемые оценки снизу при $1 < q < 2$.

Пусть теперь $2 \leq q < \infty$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_s \Omega(2^{-s}) e^{i(k^s, x)},$$

где $k^s \in \rho(s)$. Тогда по теореме Литтлвуда–Пэли

$$\|E_{Q'(N)}(f)\|_q \gg \left(\sum_{\theta'(N)} (\Omega(2^{-s}))^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда, аналогично предыдущему случаю, по лемме 3 получаем оценки снизу для $2 \leq q < \infty$. Теорема 5 доказана.

При $q = 1, \infty$ верна оценка сверху

$$E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q \ll \frac{1}{N} \phi_4(N, d, 1, b.b').$$

Теорема 5 показывает, что наилучшие приближения множествами тригонометрических полиномов с гармониками из $Q'(N)$ по порядку лучше, чем наилучшие приближения тригонометрическими полиномами с гармониками из $Q(N)$, хотя количества элементов множеств $Q(N)$ и $Q'(N)$ по порядку совпадают. Таким образом, определенные различия в показателях логарифмических множителей также приводят к эффекту “не своих” гиперболических крестов, как и определенные различия в показателях степенных множителей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, Тр. МИАН СССР, **178**, 1986, 3–113.
- [2] Н. Н. Пустовойтов, “Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности”, *Матем. заметки*, **65**:1 (1999), 107–117.
- [3] С. А. Теляковский, “Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 426–444.
- [4] Я. С. Бугров, “Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной”, *Матем. сб.*, **64(106)**:3 (1964), 410–418.
- [5] Я. С. Бугров, “Конструктивная характеристика классов функций с доминирующей смешанной производной”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. V*, Сборник работ под редакцией С. М. Никольского, Тр. МИАН СССР, **131**, 1974, 25–32.
- [6] Н. С. Никольская, “Приближение периодических функций класса SH_p^r суммами Фурье”, *Сиб. матем. журн.*, **16**:4 (1975), 761–780.
- [7] Н. Н. Пустовойтов, “Ортопоперечники некоторых классов периодических функций двух переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:1 (2000), 123–144.
- [8] Н. Н. Пустовойтов, “О приближении и характеристизации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида”, *Anal. Math.*, **29**:3 (2003), 201–218.
- [9] Н. Н. Пустовойтов, “Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители”, *Anal. Math.*, **34**:3 (2008), 187–224.

Н. Н. Пустовойтов

Московский государственный технический
университет “МАМИ”
E-mail: pustovaitovnick@mail.ru

Поступило

07.05.2009

Исправленный вариант

17.02.2011