Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Верещагин, Асимптотическое поведение сингулярных в нуле решений уравнения синус-Гордон, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 329–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm846>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:09:09

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ В НУЛЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН

В. Л. Верещагин

Поставлен вопрос об асимптотическом исследовании радиально симметричных решений уравнения синус-Гордон, сводимых к третьему трансценденту Пенлеве. Изучаются решения, имеющие сингулярность в начале координат. Получено асимптотическое разложение такого решения в области конечных значений независимой переменной, так что главным членом является модулированная эллиптическая функция. Выписаны соответствующие уравнение модуляций и сдвиг фазы.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Широко известное эллиптическое уравнение синус-Гордон

$$u_{tt} + u_{yy} + \sin u + f = 0 \quad (1.1)$$

имеет класс сингулярных в нуле решений с особенностями вида

$$u \approx \alpha \log \frac{1}{x} + \beta + o(1), \quad x^2 = y^2 + t^2 \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

(α, β – параметры), которые выделяются среди множества других своим особым значением для приложений. Так, эти решения служат для моделирования точечных дефектов в физике конденсированного состояния. Их видная роль в скалярных теориях поля обусловлена тем, что в отличие от гладких решений (1.1) сингулярные имеют конечную энергию

$$E = \int \left[\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_y^2 - \cos u + \cos u_0 - f(u - u_0) \right] dt dy.$$

Таким образом, решения с особенностями вида (1.2) могут быть использованы для описания связанных состояний в теории поля. Более подробное обсуждение прикладного значения решений (1.2), а также соответствующая библиография приведены в статье [1]. Эта работа положила начало асимптотическому исследованию упомянутых сингулярных решений (1.2) с точки зрения метода изомонодромных деформаций. Авторы изучали случай радиально симметричного уравнения (1.1):

$$u_{xx} + \frac{1}{x} u_x + \sin u + f = 0, \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00049.

которое при $f = 0$ является специальным видом уравнения Пенлеве третьего типа (P_3). Оказалось, что решения уравнения (1.3), имеющие в начале координат особенность вида (1.2), стремятся к асимптотическому пределу на бесконечности (см. [2]):

$$u(x) = 2\pi k + \gamma \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(x^{-1})], \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

где K – целое число. Асимптотические формулы для третьего трансцендента Пенлеве при больших значениях x были получены с помощью метода усреднения в работе [3]. Специальный интерес вызывает поведение этих решений в конечной области – на не очень больших расстояниях они образуют волновой пакет типа ряда солитонов. Проведенные авторами работы [1] численные эксперименты описывают упомянутые осцилляции с помощью следующих графов:

Рис. 1

Здесь разные кривые соответствуют разным значениям параметра α в формуле (1.2). Величина R обозначает координату последнего солитонного пика. Заметно, что с ростом значения параметра α решение формирует характерную "узеловую" зону осцилляций, причем линейная зависимость правой границы R зоны от параметра α иллюстрируется на рис. 2.

Перечисленными наблюдениями была определена главная цель данной работы – с помощью формализма усреднения описать асимптотическое (при $\alpha \rightarrow \infty$) поведение сингулярных решений уравнения (1.3) для $f = 0$ в области конечных значений переменной x . Основным результатом является представление главного члена этой асимптотики в виде модулированной эллиптической функции, определяющей упомянутые выше осцилляции. Метод квантования однозонного потенциала, описанный в статье [4], задает модуляции параметров эллиптической функции. Далее, в п. 3, ставится задача вычисления асимптотического распределения нулей функции $\sin u$ с помощью метода изонодромных деформаций (см. [5]). В следующем пункте применение метода ВКБ [6]

Рис. 2

в окрестности точек поворота позволяет вычислить множители Стокса – первые интегралы третьего уравнения Пенлеве (1.3). Пятый пункт посвящен вычислению нулей функции $\sin u$ и, как следствие, фазы упомянутой выше эллиптической функции.

2. Метод усреднения для уравнений Пенлеве. Шесть уравнений Пенлеве известны как интегрируемые нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Вероятно, наиболее наглядным образом этот факт иллюстрируется наличием матричного коммутативного представления

$$D_\lambda L_j - D_x A_j + [L_j, A_j] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (2.1)$$

где $L_j = L_j(u, u', x, \lambda)$, $A_j = A_j(u, u', x, \lambda)$, $D_\lambda = \partial/\partial\lambda - 2 \times 2$ -матрицы, рационально зависящие от спектрального параметра λ , так что равенство (2.1) эквивалентно j -му уравнению Пенлеве. Матрицы L_j, A_j приведены в статье [7]. Введем теперь величину $X = X(x)$ и заменим ею все переменные x , явно входящие в матрицы L_j, A_j : $L_j = L_j(u, u', X, \lambda)$, $A_j = A_j(u, u', X, \lambda)$. Тогда верны следующие предложения, иллюстрируемые ниже на конкретном примере третьего уравнения Пенлеве.

Предложение 2.1. Пусть ε – некоторое положительное число. Тогда выполнение равенства

$$\varepsilon D_\lambda L_j - D_x A_j + [L_j, A_j] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (2.2)$$

эквивалентно системе

$$X' = \varepsilon, \quad u'' - P_j(u, u', X) = 0, \quad (2.3)$$

где $u'' = P_j(u, u', x)$ – j -е уравнение Пенлеве.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Решение уравнения (2.2) при $\varepsilon = 0$, $X = \text{const}$ может быть представлено в виде*

$$u_0(x) = f_j(\tau + \varphi; \bar{a}), \quad (2.4)$$

где $\tau = xU$, f_j – эллиптическая функция (см. [8]), $U = U(X)$, $\varphi = \varphi(X)$; $\bar{a}(X)$ – параметры, определяющие функцию f_j .

Предположим теперь, что ε – малая положительная величина. Будем искать решение системы (2.3) в виде формального ряда по ε :

$$u(x) = \varepsilon^{-1}u_{-1}(X) + u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + O(\varepsilon^2), \quad (2.5)$$

так что параметры $\bar{a}(X)$, определяющие функцию $u_0 = f_j$, подчиняются некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению, называемому системой Уизема или уравнением модуляций.

Главный член ряда (2.5) (величина порядка ε^{-1}) может быть легко определен для P_3 путем подстановки (2.5) в само уравнение Пенлеве:

$$u_{-1} = \log X. \quad (2.6)$$

Таким образом, нужно найти следующий член разложения (2.4) в виде

$$u_0(\tau, X) = f_j\left(\frac{S(X)}{\varepsilon} + \varphi(X); \bar{a}(X)\right), \quad D_X S = U. \quad (2.7)$$

ЛЕММА 2.1. *Система Уизема для уравнений Пенлеве имеет следующий вид:*

$$D_X \det A_j = \overline{a_{22}D_\lambda l_{11}} + \overline{a_{11}D_\lambda l_{22}} - \overline{a_{12}D_\lambda l_{21}} - \overline{a_{21}D_\lambda l_{12}}, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (2.8)$$

где $A_j = (a_{mn})$, $L_j = (l_{mn})$, $m, n = 1, 2$; черта сверху означает усреднение по периоду эллиптической функции f_j (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что из уравнения (2.2) при $\varepsilon = 0$ вытекает независимость спектральных характеристик матрицы A_j от переменной x . В частности, выполняется условие $\partial_x \det A_j = 0$. Введение формальной переменной X индуцирует следующую замену правила дифференцирования функций вида (2.4): $\partial_x \mapsto U\partial_\tau + \varepsilon\partial_X$. Для малого параметра $\varepsilon > 0$ уравнение (2.2) обеспечивает выполнение равенства $a'_{n,m} = \varepsilon\partial_\lambda l_{n,m} + [L_j, A_j]_{n,m}$. Подставляем последнее условие в тождество

$$\partial_x \det A_j = a'_{11}a_{22} + a_{11}a'_{22} - a'_{12}a_{21} - a_{12}a'_{21},$$

меняем закон дифференцирования и получаем по модулю величин порядка $O(\varepsilon^2)$ следующее:

$$(U\partial_\tau + \varepsilon\partial_X) \det A_j = \varepsilon(a_{22}\partial_\lambda l_{11} + a_{11}\partial_\lambda l_{22} - a_{12}\partial_\lambda l_{21} - a_{21}\partial_\lambda l_{12}).$$

Далее усредняем, т.е. интегрируем по периоду τ . Процедура усреднения уничтожает величины, являющиеся полными производными по τ , из чего вытекает требуемое.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Существует только один коэффициент полинома по λ , чья динамика по X не тривиальна (исключением является шестое уравнение Пенлеве). Обозначим его F_j . Таким образом, система Уизема может быть записана в виде одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка на величину F_j .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Система Уизема (2.8) обеспечивает выполнение следующего формального условия:*

$$(\varepsilon^{-1}u_{-1} + u_0)'' - P_j(\varepsilon^{-1}u_{-1} + u_0, (\varepsilon^{-1}u_{-1} + u_0)', x) = O(\varepsilon). \quad (2.9)$$

В конкретном случае третьего уравнения Пенлеве ($j = 3$)

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \sin u = 0 \quad (2.10)$$

приведенные выше формулы имеют следующий вид:

$$A = i \left(\frac{\cos u}{\lambda^2} - \frac{x^2}{16} \right) \sigma_3 - \frac{ixu'}{4\lambda} \sigma_1 + \frac{i \sin u}{\lambda^2} \sigma_2; \quad L = -\frac{ix\lambda}{8} \sigma_3 - \frac{iu'}{2} \sigma_1, \quad (2.11)$$

где

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система (2.2) выглядит так:

$$X' = \varepsilon, \quad X(u'' + \sin u) + X'u' = 0, \quad (2.12)$$

прямое вычисление определителя матрицы A_j дает равенство

$$\lambda^4 \det A = \frac{\lambda^4 X^4}{256} - \frac{\lambda^2 X^2}{8} F + 1, \quad (2.13)$$

где параметр F появляется в качестве константы интегрирования второго уравнения системы (2.12) при $\varepsilon = 0$:

$$F = \cos u - \frac{1}{2}(u')^2. \quad (2.14)$$

Подставляя конкретные матричные элементы в формулу (2.8), получаем

$$D_X \det A = \frac{X^3}{64} - \frac{X \overline{\cos u}}{4\lambda^2}.$$

С другой стороны, дифференцируем по X равенство (2.13) и выводим явный вид уравнения модуляций (ср. с [3])

$$D_X F = -\frac{2}{X}(\overline{\cos u} - F) = \frac{1}{X} \left[\frac{17}{16}(F + \sqrt{F^2 - 1}) \frac{E}{K} - 2F \right], \quad (2.15)$$

где E, K – полные эллиптические интегралы:

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}}, \quad E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-kz^2}{1-z^2}} dz, \quad k = \frac{2\sqrt{F^2 - 1}}{F + \sqrt{F^2 - 1}}.$$

Рис. 3

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Общее решение дифференциального уравнения модуляций (2.15) является решением следующего уравнения:

$$\int_{F_0}^{F(X)} \frac{df}{\frac{17}{16}(f + \sqrt{f^2 - 1}) \frac{E}{K} - 2f} = \log X. \quad (2.16)$$

Типичное поведение параметра F как функции от X отражено на рис. 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Условие (2.14) определяет эллиптический анзац (2.4) следующим образом (функции Вейерштрасса выбраны исходя из соображений простоты их интегрирования):

$$u_0 = \pi(2n + 1) - i \log \{4[\wp(x + \varphi | g_2, g_3)]\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.17)$$

где $\wp$ — функция Вейерштрасса, g_2, g_3 — задающие ее параметры;

$$g_2 = \frac{1}{3}F^2 - \frac{1}{4}, \quad g_3 = \frac{1}{24}F - \frac{1}{27}F^3; \quad e_1 = \frac{1}{6}F, \quad e_{2,3} = -\frac{1}{12}F \pm \frac{1}{4}\sqrt{F^2 - 1}.$$

Формула (2.17) может быть переписана в терминах функций Якоби, что иллюстрирует соответствие (2.17) решению уравнения математического маятника. Эллиптическая функция в формуле (2.17) претерпевает вырождение в случае $x = 0$ ($F \rightarrow \infty$, модуль соответствующего синуса Якоби обращается в нуль) и в случае конечного значения переменной $\varepsilon x_0 = X_0$, где $F(X_0) = 1$ и модуль синуса Якоби равен 1. Последнее вырождение может быть описано на языке функций Вейерштрасса как слияние вещественных точек ветвления $e_{2,3}$ и превращение их в комплексно-сопряженную пару.

Последующая часть данной работы посвящена асимптотической по малому параметру $\varepsilon = \alpha^{-1}$, $\alpha \rightarrow \infty$ (см. (1.2)) оценке сдвига фазы φ в формуле (2.17).

3. Линейная задача и метод изомонодромных деформаций. Рассмотрим линейное матричное дифференциальное уравнение

$$D_\lambda \Psi = A \Psi, \quad (3.1)$$

где A задана формулой (2.11), Ψ – неизвестная 2×2 -матрица. Проведем замену переменных $x = \alpha X$, $\xi = \alpha \lambda$ и с учетом (2.14) получим из (3.1) следующее уравнение:

$$D_\xi \Psi = A \Psi, \quad A = \alpha \left[i \sigma_3 \left(-\frac{X^2}{16} + \frac{\cos u}{\xi^2} \right) - \frac{iX \sqrt{2F + 2 \cos u}}{4\xi} \sigma_1 + \frac{i \sin u}{\xi^2} \sigma_2 \right]. \quad (3.2)$$

Пусть $\mu(\xi)$ – собственные значения матрицы A , точки поворота ξ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, – нули функции $\mu(\xi)$. В плоскости комплексных значений параметра ξ условиями

$$\operatorname{Re} \left[i \alpha \int_{\xi_j}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta \right] = 0 \quad (3.3)$$

определим так называемые линии Стокса (см. рис. 4). Они делят плоскость на семь областей Ω_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 6$. В каждой из них определим каноническое решение задачи (3.2), удовлетворяющее условию нормировки:

$$\begin{aligned} \Psi_j &= [I + O(\xi^{-1})] \exp \left(-\frac{i \alpha X^2}{16} \xi \sigma_3 \right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \xi \in \Omega_j, \quad j \neq 0, \\ \Phi &= \Psi_0 = i[I + O(\xi^{-1})] \exp(-i \alpha \xi^{-1} \sigma_3), \quad \xi \rightarrow 0, \quad \xi \in \Omega_0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рис. 4

Следующим образом зададим матрицы Стокса:

$$\Psi_{j+1} = \Psi_j S_j, \quad j = 0, 1, \dots, 6. \quad (3.5)$$

ТЕОРЕМА 3.1 (ср. с [9], [7]). *Функция u , определяющая формулу (3.2), удовлетворяет уравнению P_3 (2.10) тогда и только тогда, когда матрицы Стокса S_j не зависят от переменной x .*

Теперь рассмотрим задачу (3.2) в точках X_n таких, что $\cos u(X_n) = 1$:

$$D_\xi \Psi = -i\alpha \left[\sigma_3 \left(\frac{X^2}{16} - \xi^{-2} \right) + \frac{X\sqrt{2F+2}}{4\xi} \sigma_1 \right]. \quad (3.6)$$

Здесь и далее для краткости вместо X_n пишем X .

Очевидно, что, вычислив величины X_n , мы сможем легко оценить сдвиг фазы φ эллиптической функции (2.17). Следующий пункт будет посвящен приближенному вычислению матриц Стокса. Для этого понадобится использование аппарата метода ВКБ и теории спецфункций.

4. Построение приближенной Ψ -функции вдали от точек поворота и в их малой окрестности. Система (3.6) имеет большой параметр α в правой части, поэтому ее решения допускают ВКБ-приближения следующего вида:

$$\Psi = [T + O(\alpha^{-1} \mu^{-3/2})] \exp \left[-i\alpha \int_{\xi_0}^{\xi} (\mu \sigma_3 - T^{-1} D_\zeta T) d\zeta \right] C, \quad (4.1)$$

где

$$T = \sqrt{\frac{d_1}{\mu}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_1 - \mu}{d_2} \\ \frac{\mu - d_1}{d_2} & 1 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \frac{X^2}{16} - \xi^{-2}, \quad d_2 = \frac{X\sqrt{2F+2}}{4\xi}, \quad (4.2)$$

$$\mu = \frac{X\sigma_3}{16\xi^2} \sqrt{\xi^4 + \frac{32F}{X^2} \xi^2 + \frac{256}{X^4}}. \quad (4.3)$$

Точки поворота ξ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — нули функции $\mu(\xi)$:

$$\xi_{1,2,3,4} = \frac{4i}{X} [(-1)^n \sqrt{F+1} + (-1)^m \sqrt{F-1}]; \quad m, n = 1, 2,$$

C — некоторая постоянная по ξ матрица.

Уравнение (4.2) задает риманову поверхность (μ, ξ) , канонические циклы на которой определим так, как показано на рис. 5. Тогда выполняется следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. *Фазовые интегралы в формуле (4.1) удовлетворяют следующим оценкам:*

$$\int_{\xi_2}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta = \frac{X^2}{16} \xi - \frac{1}{4} \oint_{2b-a} \mu(\zeta) d\zeta + O(\xi^{-1}), \quad \xi \in \Gamma_2, \quad \xi \rightarrow \infty; \quad (4.4)$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta = \frac{X^2}{16} \xi + \frac{1}{4} \oint_a \mu(\zeta) d\zeta + O(\xi^{-1}), \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Рис. 5

Доказательство использует следующее наблюдение:

$$\int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} \mu(\zeta) d\zeta = \left[\int_{\xi_2}^{-\xi_2} - \oint_{b-a/2} \right] \mu(\zeta) d\zeta.$$

Формула (4.5) доказывается аналогичным образом.

Определим матричные функции Ψ_j в областях Ω_j , $j = 1, 2, 3$, как решения системы (3.6) с граничным условием

$$\Psi_j = [I + O(\xi^{-1})] \exp\left(-\frac{i\alpha X^2 \xi}{16} \sigma_3\right), \quad \xi \in \Gamma_j, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Канонические решения Ψ_j системы (3.6), нормированные граничным условием (4.5), имеют следующую асимптотику при $\alpha \rightarrow \infty$:*

$$\Psi_1(\xi) = T[1 + o(1)] \exp\left[-i\alpha\sigma_3 \left(\int_{\xi_1}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta - \frac{1}{4} \oint_a \mu(\zeta) d\zeta\right)\right], \quad \xi \in \Omega_1; \quad (4.7)$$

$$\Psi_3(\xi) = T[1 + o(1)] \exp\left[-i\alpha\sigma_3 \left(\int_{\xi_2}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta + \frac{1}{4} \oint_{2b-a} \mu(\zeta) d\zeta\right)\right], \quad \xi \in \Omega_3. \quad (4.8)$$

Доказательство. Формулы (4.7) и (4.8) отличаются от (4.1) лишь выбором правого матричного множителя C . По лемме 4.1 функции Ψ_1, Ψ_3 имеют асимптотику (4.6) на кривых Γ_1, Γ_3 соответственно. Внутри областей Ω_1, Ω_3 функции Ψ_1, Ψ_3 приближенно удовлетворяют уравнению (3.6) в соответствии с теорией ВКБ.

Легко видеть, что ВКБ-приближение (4.7), (4.8) справедливы лишь вне достаточно малой окрестности точек поворота ξ_j . Однако, матрицы Стокса станем вычислять путем продолжения функций Ψ_1, Ψ_3 на отрезок $[\xi_1, \xi_2]$, что легче сделать с помощью анализа их поведения именно в окрестности точек поворота.

ЛЕММА 4.2. *Существуют решения системы (3.6) в окрестности точек поворота ξ_j , $j = 1, 2$, имеющие асимптотику*

$$\Psi(\xi, \alpha, X) = \alpha^{1/6} \begin{pmatrix} \omega(\zeta) & -i\bar{\omega}(\zeta) \\ i\omega(\zeta) & \bar{\omega}(\zeta) \end{pmatrix} D + O[\alpha^{-1/6} \zeta^{3/4} \exp(\pm 4i\gamma_j \zeta^{3/2})], \quad (4.9)$$

где $\xi \in \Gamma_j$, $\zeta = \alpha^{2/3}(\xi - \xi_j)$, $\gamma_j^2 = X^4(\xi_j^2 - \xi_{3-j}^2)/(4608\xi_j^3)$, $j = 1, 2$, D – постоянная по ζ матрица, а функции $\omega, \bar{\omega}$ – линейно независимые решения уравнения Эйри

$$\omega_{\zeta\zeta} + 36\gamma^2\zeta\omega = 0. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что в окрестности точки ξ_j фазовая функция μ имеет асимптотику

$$\mu = 6\gamma_j\alpha^{-1/3}\zeta^{1/2} + O((\xi - \xi_j)^{3/2}). \quad (4.11)$$

Пусть ψ_1, ψ_2 – компоненты вектор-столбца матрицы Ψ . Тогда задача (3.6) эквивалентна следующей системе:

$$\chi_{1,\xi} = -\frac{i\alpha X^2}{16\xi^2}(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\chi_2, \quad \chi_{2,\xi} = -\frac{i\alpha X^2}{16\xi^2}(\xi + \xi_1)(\xi + \xi_2)\chi_1, \quad (4.12)$$

где $\chi_{1,2} = \psi_1 \pm i\psi_2$. Из (4.12) выводим уравнение

$$\chi_{2,\xi\xi} = \frac{i\alpha X^2}{16\xi^2} \left(\xi_1 + \xi_2 + 2\frac{\xi_1\xi_2}{\xi} \right) \chi_1 - \frac{\alpha^2 X^4}{256\xi^4} (\xi^2 - \xi_1^2)(\xi^2 - \xi_2^2) \chi_2. \quad (4.13)$$

В окрестности точки поворота ξ_j ищем решения уравнения (4.13) в виде ряда с главными членами $\omega_{1,2}$:

$$\chi_{1,2} = \omega_{1,2} + O(\alpha^{-1/3}). \quad (4.14)$$

Подставляя (4.14) в (4.13), получим в главном порядке

$$\omega_{2,\zeta\zeta} + 36\gamma_j^2\zeta\omega_2 = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad (4.15)$$

где $\zeta = \alpha^{2/3}(\xi - \xi_j)$. Отсюда выводим оценки

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\omega_2 + O(\alpha^{-1/3}), \quad \psi_2 = \frac{i}{2}\omega_2 + O(\alpha^{-1/3})$$

и вместе с ними требование леммы.

Асимптотическое поведение функций Эйри на линиях Стокса известно (см. [6]), поэтому мы можем фиксировать базисные решения $\omega, \bar{\omega}$ уравнения Эйри (4.10) асимптотиками на лучах $\arg \zeta = -\frac{2}{3} \arg \gamma$:

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) &= \zeta^{-1/4} [1 + O(\zeta^{-3/2})] \exp\left(-4i\gamma\zeta^{3/2} - \frac{\pi i}{4}\right), \\ \bar{\omega}(\zeta) &= \zeta^{-1/4} [1 + O(\zeta^{-3/2})] \exp\left(4i\gamma\zeta^{3/2} + \frac{\pi i}{4}\right), \end{aligned} \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

Тогда эти функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\zeta e^{-2\pi i/3}) &= e^{-\pi i/3} [\bar{\omega}(\zeta) - \omega(\zeta)], & \bar{\omega}(\zeta e^{2\pi i/3}) &= e^{\pi i/3} \omega(\zeta), \\ \omega(\zeta e^{2\pi i/3}) &= e^{\pi i/3} [\omega(\zeta) - \bar{\omega}(\zeta)], & \omega(\zeta e^{-2\pi i/3}) &= e^{-\pi i/3} \bar{\omega}(\zeta). \end{aligned} \quad (4.17)$$

С помощью этих соотношений продолжим функции Ψ_1 и Ψ_3 на отрезок $[\xi_1, \xi_2]$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Канонические решения Ψ_j , $j = 1, 2, 3$, имеют следующие асимптотики на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$:*

$$\Psi_{1,3}(\xi) = \sqrt{6}T[1 + O(\alpha^{-1}\mu^{-3/2})] \exp\left[-i\alpha\sigma_3 \int_{\xi_{1,2}}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta\right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_j, \quad j = 1, 2, \quad (4.18)$$

$$\Psi_2(\xi) = \sqrt{6}T[1 + O(\alpha^{-1}\mu^{-3/2})] \exp\left[-i\alpha\sigma_3 \int_{\xi_2}^{\xi} \mu(\zeta) d\zeta\right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} D_2, \quad (4.19)$$

$$D_1 = \exp\left[\frac{i\alpha}{4} \oint_a \mu(\zeta) d\zeta\right], \quad D_2 = \exp\left[\frac{i\alpha}{4} \oint_{2b-a} \mu(\zeta) d\zeta\right]. \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вывода формулы (4.18) рассмотрим поведение Ψ -функции в окрестности точки ξ_1 . Формулы (4.7) и (4.9) описывают решения одной системы (3.6), поэтому в некоторой общей области, где переменная $\xi - \xi_1$ мала, а ζ велика, они должны отличаться на постоянный множитель. Этот множитель D в формуле (4.9) определим из условия на асимптотики на границе Γ_1 в окрестности точки ξ_1 . Оценим величину (4.7) при $\xi \rightarrow \xi_1$, $\xi \in \Gamma_1$:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \left[\alpha^{1/6} \zeta^{-1/4} \sqrt{\frac{d_1}{6\gamma_1}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + O(\alpha^{-1/2} \zeta^{-3/4}) \right] \\ &\times \exp\{-i\sigma_3[4\gamma_1 \zeta^{3/2} + O(\alpha^{-2/3} \zeta^{5/2})]\} D_1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Подставив асимптотики функций Эйри (4.16) в формулу (4.9) и сравнив главные члены с формулой (4.21), получим

$$D = \sqrt{\frac{d_1}{\gamma_1}} \exp\left(\frac{\pi i \sigma_3}{4}\right) D_1. \quad (4.22)$$

Для продолжения функции Γ_1 на отрезок $[\xi_1, \xi_2]$ нужно в формуле (4.9) ζ заменить на $\zeta e^{2\pi i/3}$. С помощью (4.17) получаем

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, \alpha) &= \Psi_1(\xi_1 + \zeta \alpha^{-2/3} e^{-2\pi i/3}, \alpha)|_{\zeta e^{2\pi i/3}} \\ &= \alpha^{1/6} \begin{pmatrix} \omega(\zeta e^{-2\pi i/3}) & -i\bar{\omega}(\zeta e^{-2\pi i/3}) \\ i\omega(\zeta e^{-2\pi i/3}) & \bar{\omega}(\zeta e^{-2\pi i/3}) \end{pmatrix}_{\zeta e^{2\pi i/3}} D + O(\alpha^{-1/6} \zeta^{3/4} \exp(\pm 4i\gamma_1 \zeta^{3/2})) \\ &= \alpha^{1/6} e^{-\pi i/3} \begin{pmatrix} \bar{\omega}(\zeta) & -i[\bar{\omega}(\zeta) - \omega(\zeta)] \\ i\omega(\zeta) & \bar{\omega}(\zeta) - \omega(\zeta) \end{pmatrix}_{\zeta e^{2\pi i/3}} D + O(\alpha^{-1/6} \zeta^{3/4} \exp(\pm 4i\gamma_1 \zeta^{3/2})) \\ &= \alpha^{1/6} e^{-\pi i/3} \begin{pmatrix} \bar{\omega} & -i\omega \\ i\bar{\omega} & \omega \end{pmatrix}_{\zeta e^{2\pi i/3}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D + O(\alpha^{-1/6} \zeta^{3/4} \exp(\pm 4i\gamma_1 \zeta^{3/2})) \\ &= -i\alpha^{1/6} \zeta^{-1/4} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \exp\left[i\sigma_3\left(4\gamma_1 \zeta^{3/2} e^{\pi i} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D \\ &\quad + O(\alpha^{-1/6} \zeta^{3/4} \exp(\pm 4i\gamma_1 \zeta^{3/2})). \end{aligned} \quad (4.23)$$

С другой стороны, функция Ψ_1 имеет на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$ вид (4.1) с некоторым правым множителем C_1 . Сравнивая асимптотику (4.1) на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$ при $\xi \rightarrow \xi_1$ и (4.23) при $\zeta \rightarrow \infty$, выводим

$$C_1 = \sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_1,$$

откуда вытекает формула (4.18). Аналогичным образом могут быть выведены формулы (4.19) и (4.20), причем в последнем случае поворот по переменной ζ в (4.9) в окрестности точки ξ_2 производится против часовой стрелки.

5. Асимптотическое распределение нулей и сдвиг фазы эллиптического анзаца. Представления для Ψ -функций (4.18)–(4.20) позволяют явно оценить матрицы Стокса S_1 и S_2 (см. (3.5)) как выражения через параметры F, X, α , определяющие коэффициенты системы (3.6). Процедура обращения таких формул дает асимптотическое описание распределения нулей X_m функции $\sin u$

Величины $S_1^{-1} = \Psi_2^{-1} \Psi_1$ и $(S_2 S_1)^{-1} = \Psi_3^{-1} \Psi_1$ станем вычислять на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$ (см. рис. 2). Для этого используем формулы (4.18)–(4.20).

ТЕОРЕМА 5.1. *Матрицы Стокса могут быть представлены следующими формулами:*

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{g} & -\frac{1}{h} \\ \frac{h}{g} & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 S_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{g-1}{h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

где

$$h = \exp \left[\frac{i\alpha}{2} \oint_a \mu(\zeta) d\zeta \right], \quad g = \exp \left[i\alpha \oint_b \mu(\zeta) d\zeta \right],$$

$$\int \mu(\zeta) d\zeta = -\frac{X_m}{4} \int \frac{1}{\nu^2} \sqrt{\nu^4 + F\nu^2 + 1} d\nu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью формул (4.18), (4.19) получаем следующее:

$$\Psi_3^{-1} \Psi_1 = D_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \exp \left[i\alpha \sigma_3 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \mu(\zeta) d\zeta \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-g}{h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом выводится соотношение

$$\Psi_2^{-1} \Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{h} \\ \frac{h}{g} & 1 + \frac{1}{g} \end{pmatrix},$$

что дает требуемое.

Теперь, считая g, h фиксированными параметрами, разрешим равенства (5.1) относительно величины X_m . Легко выразить интегралы по циклам a, b фазовой функции $\mu(\nu)$ через полные эллиптические интегралы

$$\oint \mu(\zeta) d\zeta = -\frac{iX}{4\sqrt{2F+2}} \oint \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt,$$

откуда следует

$$\oint_a \mu(\zeta) d\zeta = -iX \sqrt{\frac{F+1}{8}} E, \quad \oint_b \mu(\zeta) d\zeta = -iX \sqrt{\frac{F+1}{8}} E', \quad k^2 = \frac{2}{F+1}. \quad (5.2)$$

Периоды соответствующей эллиптической функции определяются соотношением

$$\omega = kK, \quad \omega' = ikK'. \quad (5.3)$$

Станем искать нули X_m в виде асимптотических рядов по малому параметру α^{-1} :

$$\alpha X_m = 2m\omega + z_0 + O(\alpha^{-1}); \quad (5.4)$$

из соображений вещественности аргумента в формулу (5.4) входит только вещественный период 2ω . Следовательно, имеем

$$i\alpha \oint_{a,b} \mu(\zeta) d\zeta = -\alpha X_m \sqrt{\frac{F+1}{8}} E^{(\prime)} = -mKE^{(\prime)} - z_0 E^{(\prime)} \sqrt{\frac{F+1}{8}}.$$

Используя (5.1), выводим следующую систему:

$$\begin{aligned} 2 \log h &= -i\alpha \oint_a \mu(\zeta) d\zeta = -mKE - \frac{z_0 E}{2k}, \\ \log g &= -i\alpha \oint_b \mu(\zeta) d\zeta = -mKE' - \frac{z_0 E'}{2k}, \end{aligned}$$

откуда с помощью тождества Лежандра $EK' + E'K - KK' = \pi/2$ получаем равенства по модулю πm :

$$2 \log h = -mKE - \frac{z_0 E}{2k}, \quad 2 \log h = -2mK(K' - E') - \frac{2z_0 E'}{k}.$$

Решая последнюю систему относительно z_0 , выводим

$$z_0 = \frac{2k}{E(2E' - K')} [2(K' - E') \log h - E \log g], \quad k^2 = \frac{2}{F+1}. \quad (5.5)$$

Результатом этих вычислений является следующая теорема

ТЕОРЕМА 5.2. *Радиально-симметричное сингулярное в нуле решение уравнения синус-Гордон (1.1) для случая $f = 0$, описываемое третьим трансцендентом Пен-леве (2.10), с особенностью вида*

$$u = \alpha \log \frac{1}{x} + \beta + o(1), \quad x \rightarrow 0,$$

может быть представлено в виде асимптотического по малому параметру α^{-1} , $\alpha \rightarrow \infty$, ряда (2.5) с главными членами

$$u = \alpha \log x + \pi - i \log \left\{ 4 \left[\wp(x + z_0 | g_2, g_3) - \frac{1}{6} F \right] \right\} + o(1), \quad (5.6)$$

где

$$g_2 = \frac{1}{3} F^2 - \frac{1}{4}, \quad g_3 = \frac{1}{24} F - \frac{1}{27} F^3,$$

$\wp$ – p -функция Вейерштрасса, величина F удовлетворяет уравнению модуляций (2.15), а сдвиг фазы z_0 определен формулой (5.5).

Рис. 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в проверке выполнения условия (2.9) для $j = 3$ и формулы (5.6). Члены порядка $O(\varepsilon^{-1})$ исчезают очевидным образом. Выполнение равенства в порядке $O(1)$ обеспечивает метод Уизема, строящий член асимптотического ряда $u_0(x)$ в виде возмущения решения уравнения математического маятника (2.14). Последний факт наглядно иллюстрируется полученной численным путем в работе [1] фазовой картиной для решения P_3 (2.10)–(1.2) (см. рис. 6).

Кривые пронумерованы в порядке возрастания значения параметра α .

В заключение автор выражает глубокую признательность В. Ю. Новокшенову за постановку задачи и постоянную помощь.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новокшенов В. Ю., Шагалов А. Г. Решения типа связанных состояний для эллиптического уравнения синус-Гордон // ТМФ. 1997. Т. 111. №1. С. 15–31.
- [2] Новокшенов В. Ю. Об асимптотике общего вещественного решения третьего уравнения Пенлеве // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. №5. С. 1161–1165.
- [3] Novokshenov V. Yu. Radial-symmetric solution of the cosh-Laplace equation and the distribution of its singularities. Preprint № 64, SFB 288. Berlin, 1993.
- [4] Vereschagin V. L. Nonlinear quasiclassics and the Painlevé equations // solv-int/9707004. 1997.
- [5] Итс А. Р. “Изомонодромные” решения уравнений нулевой кривизны // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. №3. С. 32–63.
- [6] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [7] Jimbo M., Miwa T. Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II // Phys. D. 1981. V. 2. №3. P. 407–448.
- [8] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.
- [9] Flaschka H., Newell A. C. Monodromy and spectrum preserving deformations. I // Comm. Math. Phys. 1980. V. 76. P. 67–116.