Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Папин, Об единственности решений начально-краевой задачи для системы теплопроводной двухфазной смеси, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 636–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8461>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:03:04

Об единственности решений начально-краевой задачи для системы теплопроводной двухфазной смеси

А. А. Папин

Рассмотрим следующую квазилинейную систему уравнений составного типа:

$$(\rho_i^0 s_i)_t + (\rho_i^0 s_i v_i)_x = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\rho_i^0 s_i (v_{it} + v_i v_{ix}) - (\mu_i s_i v_{ix})_x = -s_i p_{ix} + \varphi_i + \rho_i^0 s_i g, \quad (2)$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad \varphi_1 = K(v_2 - v_1), \quad \varphi_2 = -\varphi_1, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^2 c_i \rho_i^0 s_i (\theta_t + v_i \theta_x) = (\chi \theta_x)_x, \quad (4)$$

решаемую в области $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, 1)$, при краевых, начальных и дополнительных условиях

$$v_i|_{x=0, x=1} = 0, \quad \theta_x|_{x=0, x=1} = 0, \quad v_i|_{t=0} = v_i^0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta^0(x), \quad s_1|_{t=0} = s^0(x), \quad (5)$$

$$\int_0^1 p_1(x, t) dx = 0.$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное движение между непроницаемыми теплоизолированными стенками двухфазной смеси несжимаемых жидкостей [1]. Здесь (x, t) – эйлеровы координаты; v_i , s_i , p_i – соответственно скорость, объемная концентрация и давление i -й фазы; θ – абсолютная температура среды ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$); g – плотность массовых сил; постоянные $\rho_i^0 > 0$, $\mu_i > 0$, $c_i > 0$ – соответственно истинная плотность, коэффициент динамической вязкости и теплоемкость i -й фазы при постоянном объеме; коэффициент взаимодействия фаз $K(s_1)$, коэффициент теплопроводности смеси $\chi(s_1)$ и разность давлений $p_c(s_1, \theta)$ – заданные достаточно гладкие функции своих аргументов. Искомыми являются функции s_i , v_i , p_i , θ . Относительно функций $s^0(x)$, $\theta^0(x)$ предполагается выполнение неравенств

$$0 < m_0 \leq s^0(x) \leq M_0 < 1, \quad 0 < k_1^{-1} \leq \theta^0(x) \leq k_1 < \infty$$

для всех $x \in [0, 1]$ и при фиксированных постоянных m_0 , M_0 , k_1 .

В данной работе под *обобщенным решением задачи (1)–(5)* понимается совокупность функций (s_i, v_i, p_i, θ) , $i = 1, 2$, из пространств

$$s_i \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad s_{it} \in L_2(Q_T), \quad (v_i, \theta) \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)),$$

$$p_i \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad (v_{it}, \theta_t, p_{ix}) \in L_2(Q_T),$$

удовлетворяющих уравнениям (1)–(4) почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов. В работе [2] доказано существование такого решения и установлены следующие дополнительные свойства:

$$0 < m = \text{const} \leq s_1(x, t) \leq M = \text{const} < 1, \quad \theta(x, t) > 0, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$\int_0^T \left(\max_{0 \leq x \leq 1} |s_{1x}(x, t)|^2 + \|s_{1xx}(t)\|^2 \right) dt < \infty, \quad \|u(t)\|^2 = \int_0^1 u^2(x, t) dx. \quad (6)$$

Работа выполнена при поддержке программы Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.2.2.4/4278).

ТЕОРЕМА 1. При выполнении условия (6) обобщенное решение задачи (1)–(5) единственно.

При доказательстве единственности обобщенного решения задачи (1)–(5) используется вспомогательная задача, которая строится следующим образом. Из уравнений (1) имеем, что $s_1 v_1 + s_2 v_2 = 0$. Положим

$$u = \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2, \quad \beta_i = \frac{\mu_i}{\mu}, \quad i = 1, 2, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2, \quad s \equiv s_1, \quad s_2 = 1 - s.$$

Тогда

$$v_1 = \frac{(1-s)u}{a_\mu(s)}, \quad v_2 = \frac{-su}{a_\mu(s)}, \quad a_\mu(s) = \beta_1(1-s) + \beta_2 s.$$

Подставляя v_1 и v_2 в уравнения (1)–(4) и исключая давления, приходим к следующей задаче для функций s, u, p_1, θ :

$$s_t + (a(s)u)_x = 0, \quad a(s) = \frac{s(1-s)}{a_\mu}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_t - \nu(b_0(s)u_x)_x + \nu_1 \frac{b_0(s)}{a_\mu^3(s)a(s)} u(s_x)^2 + \frac{b_0(s)K}{\rho^0 a_\mu(s)s(1-s)} u \\ = -a_2(s)uu_x + \nu \left(b_0(s) \frac{a'(s)}{a(s)} - b'_0(s) \right) u_x s_x - a_3(s)u^2 s_x + b_0(s)g_0 + \frac{b_0(s)}{\rho^0} p_{cx}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} p_{1x} = \left(\mu_1 s \left(\frac{1-s}{a_\mu(s)} u \right)_x - \mu_2 (1-s) \left(\frac{s}{a_\mu(s)} u \right)_x - \rho^0 \frac{a_\rho(s)}{a_\mu(s)} a(s)u^2 \right)_x \\ - (\rho_1^0 - \rho_2^0)(a(s)u)_t + \rho^0 a_\rho(s)g - (1-s)p_{cx}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\chi_0(s)\theta_t + c_0 a(s)u\theta_x = (\chi(s)\theta_x)_x, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u|_{x=0, x=1} = \theta_x|_{x=0, x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = u^0(x), \quad s|_{t=0} = s^0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta^0(x), \\ \int_0^1 p_1(x, t) dx = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \nu = \frac{\mu}{\rho^0}, \quad \rho^0 = \rho_1^0 + \rho_2^0, \quad \nu_1 = \nu\beta_1\beta_2, \\ b_0(s) = \frac{a_\mu(s)}{a_\rho(s)}, \quad a_\rho(s) = \alpha_1(1-s) + \alpha_2 s, \quad \alpha_i = \frac{\rho_i^0}{\rho^0}, \quad i = 1, 2, \\ a_1(s) = \frac{\alpha_1(1-s)^2 - \alpha_2 s^2}{a_\mu^2}, \quad a'_1(s) \equiv \frac{da_1}{ds}, \\ a_2(s) = b_0(s)a_1(s) + \frac{a(s)b'_0(s)}{b_0(s)}, \quad a_3(s) = \frac{1}{2} a'_1(s)b_0(s) + \frac{a'(s)b'_0(s)}{b_0(s)}, \\ g_0 \equiv (\alpha_1 - \alpha_2)g, \quad \chi_0(s) = c_1 \rho_1^0 s + c_2 \rho_2^0 (1-s), \quad c_0 = c_1 \rho_1^0 - c_2 \rho_2^0. \end{aligned}$$

Заметим, что вместо s, u, p_1, θ можно в качестве исконых взять функции s, v_1, p_1, θ . Но тогда в уравнении для v_1 появляется вторая производная концентрации s .

Основная трудность при исследовании задачи (7)–(11) связана с сильной нелинейностью уравнений (7), (8). Поэтому возникает необходимость привлечения дополнительно уравнения для производной s_x . Для этого уравнениям (2) придадим вид

$$(s_i R_i)_t + (s_i v_i R_i)_x = -s_i p_{ix} + \varphi_i + \rho_i^0 s_i g, \quad (12)$$

где $R_i = \rho_i^0 v_i + \mu_i s_{ix}/s_i$, $i = 1, 2$. Исключая в (12) давления p_1 и p_2 , приходим к следующему уравнению для $R(x, t) = R_1(x, t) - R_2(x, t) = \mu s_x/a(s) + b(s)u$, $b(s) \equiv \rho^0 a_\rho/a_\mu$:

$$R_t + U(s, u)R_x = -\frac{1}{2\mu} a''(s)a(s)uR(R - b(s)u) - \frac{K}{a(s)a_\mu^2} u - \frac{\delta}{\mu} \frac{a(s)}{a_\mu^2} u \left(u_x + \frac{\beta_1(1-s) - \beta_2 s}{\mu a_\mu^2} u(R - b(s)u) \right) + \rho^0 g_0 + p_{cx}. \quad (13)$$

Здесь $U(s, u) \equiv a'(s)u$, $\delta = \mu_2 \rho_1^0 - \mu_1 \rho_2^0$ и $R|_{t=0} = \mu s_x^0/a(s^0) + b(s^0)u^0$.

Из определения обобщенного решения и с учетом (6) для s, u, R, θ имеем

$$0 < m = \text{const} \leq s(x, t) \leq M = \text{const} < 1, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|u_x(t)\| + \max_{0 \leq t \leq T} \|s_x(t)\| + \max_{0 \leq t \leq T} \|\theta_x(t)\| \\ & + \int_0^T \left(\max_{0 \leq x \leq 1} |u_x(x, t)|^2 + \max_{0 \leq x \leq 1} |s_x(x, t)|^2 + \max_{0 \leq x \leq 1} |\theta_x(x, t)|^2 \right) dt + \int_0^T \|R_x(t)\| dt \\ & \equiv N < \infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $(s^{(1)}, u^{(1)}, \theta^{(1)})$ и $(s^{(2)}, u^{(2)}, \theta^{(2)})$ суть два решения задачи (7)–(11). Их разность $s = s^{(1)} - s^{(2)}$, $u = u^{(1)} - u^{(2)}$, $\theta = \theta^{(1)} - \theta^{(2)}$, $R = R^{(1)} - R^{(2)}$ есть решение линейной однородной системы

$$s_t + c_1 s + c_2 u + c_3 R + c_4 u_x = 0, \quad (15)$$

$$u_t - \nu(d_0 u_x + d_1 s)_x + d_2 s + d_3 u + d_4 R + d_5 u_x + d_6 \theta + d_7 \theta_x = 0, \quad (16)$$

$$\theta_t + h_1 s + h_2 u + h_3 \theta_x - (h_5 \theta_x + h_4 s)_x - h_4 R = 0, \quad (17)$$

$$R_t + e_0 R_x + e_1 s + e_2 u + e_3 R + e_4 u_x + e_5 \theta + e_6 \theta_x = 0 \quad (18)$$

с нулевыми начальными и граничными условиями. Коэффициенты

$$\begin{aligned} c_i(x, t), \quad i = 1, \dots, 4, \quad d_j(x, t), \quad j = 1, \dots, 7, \\ h_k(x, t), \quad k = 1, \dots, 6, \quad e_n(x, t), \quad n = 0, \dots, 6, \end{aligned}$$

легко восстанавливаются из вида коэффициентов уравнений (7), (8), (10) и (13), причем $d_0 = b_0(s^{(2)}) > 0$, $h_5 = \chi(s^{(2)})/\chi_0(s^{(2)}) > 0$, а коэффициенты $c_3 = a'(s^{(2)})a(s^{(2)})u^{(2)}/\mu$, $c_4 = a(s^{(2)})$, $d_0, h_5, e_0 = a'(s^{(2)})u^{(2)}$ ограничены для всех $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$.

Кроме того, учитывая связь $s^{(i)}$ и $R^{(i)}$, имеем $s_x = r_1 s + r_2 R + r_3 u$, где

$$\mu r_1(x, t) = R^{(1)} \Delta a(s) - u^{(1)} \Delta(a(s)b(s)), \quad \mu r_2(x, t) = a(s^{(2)}), \quad \mu r_3(x, t) = -a(s^{(2)})b(s^{(2)}),$$

$$\Delta b(\tau) \equiv \frac{b(\tau^{(1)}) - b(\tau^{(2)})}{\tau^{(1)} - \tau^{(2)}}$$

и функции r_2, r_3 являются ограниченными.

Поскольку $\int_0^1 s(x, t) dx = 0$, для s имеет место оценка

$$\begin{aligned} s^2(x, t) & \leq 2\|s(t)\| \cdot \|s_x(t)\| \\ & \leq C \left(\max_{0 \leq x \leq 1} |R^{(1)}(x, t)| \|s(t)\|^2 + \|s(t)\| \cdot \|R(t)\| + \|s(t)\| \cdot \|u(t)\| \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Для $u(x, t)$ также имеем, что $u^2(x, t) \leq 2\|u(t)\| \cdot \|u_x(t)\|$.

Из уравнения (15) после умножения на $s(x, t)$, интегрирования и применения неравенства Коши с $\varepsilon_1 > 0$, с учетом (19) и условий (14) выводим

$$\frac{d}{dt} \|s(t)\|^2 \leq \varepsilon_1 \|u_x(t)\|^2 + C(\varepsilon_1) \max \left(1, \max_{0 \leq x \leq 1} |R^{(1)}(x, t)| \right) z(t),$$

где

$$z(t) = \|u(t)\|^2 + \|s(t)\|^2 + \|R(t)\|^2 + \|\theta(t)\|^2,$$

а через C будем обозначать постоянные, зависящие от величин

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in Q_T} s^{(i)}(x,t), \quad \max_{(x,t) \in Q_T} \theta^{(i)}(x,t), \quad \max_{(x,t) \in Q_T} |u^{(i)}(x,t)|, \quad i = 1, 2, \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|u_x(t)\|, \quad \max_{0 \leq t \leq T} \|s_x(t)\|, \quad \max_{0 \leq t \leq T} \|\theta_x(t)\|. \end{aligned}$$

Из уравнения (16) после умножения на $u(x, t)$ и последующего интегрирования выводим ($\nu_0 = \nu \min_{0 \leq s \leq 1} b_0(s)$, $\varepsilon_2 > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \nu_0 \|u_x(t)\|^2 \\ \leq \varepsilon_2 (\|\theta_x(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2) + C(\varepsilon_2) \left(\max_{0 \leq x \leq 1} |R^{(2)}(x, t)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |\theta_x^{(1)}(x, t)| \right) z(t). \end{aligned}$$

Из уравнения (17) аналогично получаем ($\bar{\nu}_0 = \min h_5(s)$, $\varepsilon_3 > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\theta(t)\|^2 + \bar{\nu}_0 \|\theta_x(t)\|^2 \\ \leq \varepsilon_3 (\|\theta_x(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2) + C(\varepsilon_3) \left(\max_{0 \leq x \leq 1} |R^{(1)}(x, t)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |\theta_x^{(1)}(x, t)|^2 \right) z(t). \end{aligned}$$

Наконец, из уравнения (18) выводим ($\varepsilon_4 > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|R(t)\|^2 \leq \varepsilon_4 (\|\theta_x(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2) \\ + C(\varepsilon_4) \left(\|R(t)\|^2 \left(\max_{0 \leq x \leq 1} |e_{0x}(x, t)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |e_3(x, t)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |e_4(x, t)| \right. \right. \\ \left. \left. + \max_{0 \leq x \leq 1} |e_5(x, t)| + \max_{0 \leq x \leq 1} e_6^2(x, t) \right) \right. \\ \left. + \max_{0 \leq x \leq 1} |e_5(x, t)| \|\theta(t)\|^2 + \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| \|R(t)\| e_2^2(t) \right. \\ \left. + \max_{0 \leq x \leq 1} |s(x, t)| \|R(t)\| e_1^2(t) \right). \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты e_4, e_6 ограничены, а для остальных справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |e_1| &\leq C(1 + |R^{(1)}(x, t)| + |u_x^{(1)}(x, t)| + |\theta_x^{(1)}(x, t)| + |R_x^{(1)}(x, t)|), \\ |e_2| &\leq C(1 + |R^{(1)}(x, t)|^2 + |u_x^{(1)}(x, t)| + |R_x^{(1)}(x, t)|), \\ |e_3| &\leq C(1 + |R^{(1)}(x, t)|), \\ |e_5| &\leq C(|s_x^{(1)}(x, t)| + |\theta_x^{(1)}(x, t)|). \end{aligned}$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| \|R(t)\| \leq 2z(t), \quad \max_{0 \leq x \leq 1} |s(x, t)| \|R(t)\| \leq C \max_{0 \leq x \leq 1} |R^{(1)}(x, t)| z(t), \\ \|e_1(t)\| \leq C(1 + \|R_x^{(1)}(t)\|). \end{aligned}$$

Складывая почленно полученные неравенства и выбирая $\varepsilon_1 - \varepsilon_4$ из условия $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i = \min(\nu_0, \bar{\nu}_0)/2$, приходим к неравенству

$$\frac{dz}{dt} \leq A(t)z(t), \quad z(0) = 0,$$

в котором

$$A(t) = C(1 + \max_{0 \leq x \leq 1} |s_x^{(1)}(x, t)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |u_x^{(1)}(x, t)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |\theta_x^{(1)}(x, t)|^2 + \|R_x^{(1)}(t)\|).$$

В силу условий (14) имеем $A(t) \in L_1(0, T)$. Отсюда следует $s = 0$, $u = 0$, $\theta = 0$. После этого из (9), (11) однозначно определяется давление p_1 . Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р.И. Нигматулин, *Динамика многофазных сред*, Ч. 1, 2, Наука, М., 1987.
[2] А. А. Папин, *Динамика сплошной среды*, **114**, (1999), 64–70.

А. А. Папин

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

E-mail: papin@ab.ru

Поступило

29.04.2009