Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Б. Сабитов, Нелокальная задача для уравнения
параболо-гиперболического типа в прямоугольной обла-
сти, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 596–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:10:25

Нелокальная задача

для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области

К. Б. Сабитов

Для уравнения смешанного типа

$$(1 - \operatorname{sgn} t)u_{tt} + (1 - \operatorname{sgn} t)u_t - 2u_{xx} = 0$$

в области $\{(x, t) \mid 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где α, β – заданные положительные действительные числа, изучена задача с граничными условиями

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad u(x, -\alpha) - u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы ряда Фурье. Установлена устойчивость решения по нелокальному условию $\varphi(x)$.

Библиография: 4 названия.

1. Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} = 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

Задача. Найти в области D функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_+), \quad (1.2)$$

$$Lu(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-, \quad (1.3)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (1.4)$$

$$u(x, -\alpha) - u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.5)$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad D_+ = D \cap \{t > 0\}, \quad D_- = D \cap \{t < 0\}.$$

Отметим, что нелокальное условие типа (1.5) впервые появилось в работе [1] при изучении задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, для уравнения Чаплыгина. В [2] были предложены такого типа задачи для уравнений эллиптического типа. В работе [3] для уравнения (1.1) в прямоугольной области D изучена начально-граничная задача, в которой вместо условия (1.5) задано начальное условие $u(x, -\alpha) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Здесь на основании этой работы установлен критерий единственности решения нелокальной задачи (1.2)–(1.5). При этом само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи Штурма–Лиувилля. По аналогии с работой [4] установлена устойчивость решения по нелокальному условию (1.5) в нормах пространств $L_2[0, 1]$ и $C(\overline{D})$.

2. Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1.2)–(1.5). Рассмотрим функции

$$u_k(t) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, t) \sin \pi k x \, dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

На основании (2.1) введем функции

$$v_\varepsilon(t) = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, t) \sin \pi k x \, dx, \quad (2.2)$$

где ε – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (2.2) по t при $t \in (0, \beta)$ один раз, а при $t \in (-\alpha, 0)$ два раза и учитывая уравнение (1.1), получим

$$v'_\varepsilon(t) = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_t \sin \pi k x \, dx = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx} \sin \pi k x \, dx, \quad (2.3)$$

$$v''_\varepsilon(t) = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{tt} \sin \pi k x \, dx = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx} \sin \pi k x \, dx. \quad (2.4)$$

В интегралах из правых частей равенств (2.3) и (2.4), интегрируя по частям два раза и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом граничных условий (1.4), получим

$$u'_k + \lambda_k^2 u_k(t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.5)$$

$$u''_k + \lambda_k^2 u_k(t) = 0, \quad t < 0, \quad \lambda_k = \pi k. \quad (2.6)$$

Дифференциальные уравнения (2.5) и (2.6) имеют общие решения

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t, & t < 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

где a_k , b_k и c_k – произвольные постоянные.

Поскольку решение $u(x, t) \in C^1(\overline{D})$, то для функций (2.7) выполнены условия сопряжения

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u'_k(0+0) = u'_k(0-0). \quad (2.8)$$

Функции (2.7) удовлетворяют условиям (2.8) только тогда, когда $a_k = c_k$ и $b_k = -c_k \lambda_k$. С учетом последних равенств функции (2.7) принимают вид

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ c_k \cos \lambda_k t - \lambda_k c_k \sin \lambda_k t, & t < 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Теперь для нахождения постоянных c_k воспользуемся нелокальным условием (1.5) и формулой (2.1):

$$u_k(-\alpha) - u_k(\beta) = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \sin \pi k x \, dx = \varphi_k. \quad (2.10)$$

Тогда из (2.10) на основании (2.9) получим

$$c_k = \frac{\varphi_k}{\delta_{\alpha\beta}(k)} \quad (2.11)$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \cos \lambda_k \alpha + \lambda_k \sin \lambda_k \alpha - e^{-\lambda_k^2 \beta} \neq 0. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.11) в (2.9), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t) = \begin{cases} \varphi_k \delta_{\alpha\beta}^{-1}(k) e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \varphi_k \delta_{\alpha\beta}^{-1}(k) (\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t), & t < 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Пусть теперь $\varphi(x) \equiv 0$, тогда $\varphi_k \equiv 0$ и из формул (2.13) и (2.1) следует, что

$$\int_0^1 u(x, t) \sin \pi k x \, dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\{\sin kx\}$ в пространстве $L_2[0, 1]$ следует, что $u(x, t) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку $u(x, t)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β и $k = p$ нарушено условие (2.12), т.е. $\delta_{\alpha\beta}(p) = 0$. Тогда однородная задача (1.2)–(1.5) (где $\varphi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x, t) = \begin{cases} e^{-\lambda_p^2 t} \sin \pi p x, & t > 0, \\ (\cos \lambda_p t - \lambda_p \sin \lambda_p t) \sin \pi p x, & t < 0. \end{cases}$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

ТЕОРЕМА 1. *Если существует решение задачи (1.2)–(1.5), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (2.12) при всех $k \in \mathbb{N}$.*

3. Представим выражение $\delta_{\alpha\beta}(k)$ в следующем виде:

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{1 + \lambda_k^2} \sin(\lambda_k \alpha + \gamma_k) - e^{-\lambda_k^2 \beta}, \quad (3.1)$$

где $\gamma_k = \arcsin(1/\sqrt{1 + \lambda_k^2}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Из представления (3.1) видно, что выражение $\delta_{\alpha\beta}(k) = 0$ только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_k} \left[(-1)^n \arcsin \frac{e^{-\lambda_k^2 \beta}}{\sqrt{1 + \lambda_k^2}} + \pi n - \gamma_k \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку $\delta_{\alpha\beta}(k)$ является знаменателем дроби (2.11), то для обоснования существования решения задачи (1.2)–(1.5) необходимо показать, что существуют числа α и β такие, что при больших k выражение $\delta_{\alpha\beta}(k)$ отделено от нуля.

ЛЕММА 1. Если α является положительным рациональным числом, то существует положительная постоянная C_0 такая, что при достаточно больших k и любых $\beta > 0$ справедлива оценка

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| \geq C_0 > 0. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha = p$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда из (3.1) имеем

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = |\pm 1 - e^{-(k\pi)^2\beta}| \geq |1 - e^{-(k\pi)^2\beta}| = 1 - e^{-(k\pi)^2\beta} > \frac{1}{2}$$

при $k > k_0 = (1/\pi)(\ln 2/\beta)^{1/2}$ и произвольном $\beta > 0$.

Пусть теперь $\alpha = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$. Разделим kp на q с остатком: $kp = sq + r$, $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < q$. Тогда из (3.1) получим

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| = \left| \sqrt{1 + (k\pi)^2} (-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \gamma_k\right) - e^{-(k\pi)^2\beta} \right|.$$

Если $r = 0$, то этот случай сводится к уже рассмотренному выше случаю $\alpha = p \in \mathbb{N}$.

Пусть $r > 0$. Поскольку $\gamma_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, то существует постоянная $k_1 > 0$ такая, что при всех $k > k_1$ выполнено $\gamma_k < \pi/2q$. Тогда

$$\begin{aligned} |\delta_{\alpha\beta}(k)| &\geq \left| \sqrt{1 + (k\pi)^2} \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \gamma_k\right) - e^{-(k\pi)^2\beta} \right| \\ &\geq \sqrt{1 + (k\pi)^2} \left| \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \gamma_k\right) \right| - e^{-(k\pi)^2\beta} \\ &> k\pi \left| \sin\left(\frac{\pi(q-1)}{q} + \frac{\pi}{2q}\right) \right| - 1 = k\pi \sin \frac{\pi}{2q} - 1 = kC_0 > 0 \end{aligned}$$

при $k > \max\{k_1, k_2\}$, $k_2 = 2/(\pi \sin(\pi/2q))$ и любом $\beta > 0$. Лемма доказана.

Теперь при определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ и число α покажем, что функция

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin \pi k x, \quad (3.3)$$

где $u_k(t)$ определяются формулой (2.13), удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3).

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условие (2.12) и оценка (3.2). Тогда при больших k справедливы оценки

$$\begin{aligned} |u_k(t)| &\leq C_1 k |\varphi_k|, \quad |u'_k(t)| \leq C_2 k^2 |\varphi_k|, \quad t \in [-\alpha, \beta], \\ |u''_k(t)| &\leq C_3 k^3 |\varphi_k|, \quad t \in [-\alpha, 0]; \end{aligned}$$

C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость данных оценок следует из (2.13) на основании леммы 1.

Формально из (3.3) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_t(x, t) = -\sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi_k \lambda_k^2}{\delta_{\alpha\beta}(k)} e^{-\lambda_k^2 t} \sin \pi k x, \quad t > 0, \quad (3.4)$$

$$u_{xx}(x, t) = -\sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi_k (\pi k)^2}{\delta_{\alpha\beta}(k)} e^{-\lambda_k^2 t} \sin \pi k x, \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$u_{tt}(x, t) = -\sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi_k \lambda_k^2}{\delta_{\alpha\beta}(k)} (\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t) \sin \pi k x, \quad t < 0, \quad (3.6)$$

$$u_{xx}(x, t) = -\sqrt{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi_k (\pi k)^2}{\delta_{\alpha\beta}(k)} (\cos \lambda_k t - \lambda_k \sin \lambda_k t) \sin \pi k x, \quad t < 0. \quad (3.7)$$

Ряды (3.3)–(3.7) в силу лемм 1 и 2 мажорируются рядом

$$C_4 \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 |\varphi_k|. \quad (3.8)$$

Для сходимости ряда (3.8) достаточно, чтобы

$$\varphi(x) \in C^4[0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0.$$

Тогда ряд (3.8) оценивается сходящимся рядом

$$C_5 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\varphi_k^{(IV)}|}{k}, \quad (3.9)$$

где

$$\varphi_k^{(IV)} = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi^{(IV)}(x) \sin \pi k x \, dx, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(IV)}|^2 \leq \|\varphi^{(IV)}\|_{L_2}^2 = \int_0^1 |\varphi^{(IV)}(x)|^2 \, dx.$$

Из сходимости ряда (3.9) в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно ряды (3.3)–(3.7) в соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Поэтому функция $u(x, t)$, определенная рядом (3.3), удовлетворяет условию (1.2). Подставляя ряды (3.3)–(3.5) в уравнение (1.1) при $t > 0$, а ряды (3.3), (3.6), (3.7) – в уравнение (1.1) при $t < 0$, убеждаемся в том, что функция (3.3) удовлетворяет и условию (1.3).

Следовательно, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Если*

$$\varphi(x) \in C^4[0, 1], \quad \varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, 2,$$

и выполнены условия (2.12) и (3.2), то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5) и оно определяется рядом (3.3).

4. В этом пункте установим устойчивость решения задачи (1.2)–(1.5) по ее нелокальному условию (1.5). Пусть

$$\begin{aligned}\|u(x, t)\|_{L_2} &= \left(\int_0^1 |u(x, t)|^2 dx \right)^{1/2}, \\ \|\varphi^{(i)}(x)\|_{L_2} &= \left(\int_0^1 |\varphi^{(i)}(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \\ \|u(x, t)\|_{C(\overline{D})} &= \max_{\overline{D}} |u(x, t)|.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть α – положительное рациональное число. Тогда для решения задачи (1.2)–(1.5) имеют место оценки:

$$\|u(x, t)\|_{L_2} \leq C_6 \|\varphi'(x)\|_{L_2}, \quad (4.1)$$

$$\|u(x, t)\|_{C(\overline{D})} \leq C_7 \|\varphi''(x)\|_{L_2}, \quad (4.2)$$

где постоянные C_6 и C_7 не зависят от $\varphi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку система $\{\sqrt{2} \sin k\pi x\}$ ортонормирована в $L_2[0, 1]$, то из (3.3) и леммы 2 имеем

$$\|u(x, t)\|_{L_2}^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leq C_1^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 |\varphi_k|^2. \quad (4.3)$$

Тогда в силу представления $\varphi_k = \varphi_k^{(1)}/\lambda_k$, где $\varphi_k^{(1)} = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi'(x) \cos \lambda_k x dx$, из неравенства (4.3), получим

$$\|u(x, t)\|_{L_2}^2 \leq \left(\frac{C_1}{\pi} \right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} [\varphi_k^{(1)}]^2 \leq \left(\frac{C_1}{\pi} \right)^2 \|\varphi'(x)\|_{L_2}^2.$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (4.1).

Пусть (x, t) – произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда, используя формулу (3.3) и представление $\varphi_k = -\varphi_k^{(2)}/\lambda_k^2$, где $\varphi_k^{(2)} = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi''(x) \sin \lambda_k x dx$, на основании леммы 2 и неравенства Коши–Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned}|u(x, t)| &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t)| \leq C_1 \sum_{k=1}^{+\infty} k |\varphi_k| \leq \frac{C_1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} |\varphi_k^{(2)}| \\ &\leq \frac{C_1}{\pi^2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(2)}|^2 \right)^{1/2} = \frac{C_1}{\pi\sqrt{6}} \|\varphi''(x)\|_{L_2},\end{aligned}$$

где $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$, из которого непосредственно следует оценка (4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что аналогично изучается задача (1.2)–(1.5), в которой условие (1.5) заменено условием

$$u_t(x, -\alpha) - u_t(x, \beta) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда α является иррациональным числом, вопрос об обосновании корректности решения задачи (1.2)–(1.5) остается открытым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. И. Франкль, “Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уклонения”, *ПММ*, **20**:2 (1956), 196–202.
- [2] А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, “О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач”, 4, **185** (1969), 739–740.
- [3] К. Б. Сабитов, “Задача Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического в прямоугольной области”, *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 273–279.
- [4] Н. И. Ионкин, “Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием”, *Дифференц. уравнения*, **13**:2 (1977), 294–304.

К. Б. Сабитов

Стерлитамакский филиал АН Республики Башкортостан

E-mail: Sabitov_fmfm@mail.ru

Поступило

22.05.2009