Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Беломытцева, О продолжении неполных матриц до вполне непрерывных операторов, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 453–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 08:23:36

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О продолжении неполных матриц до вполне непрерывных операторов

Е. Г. Беломытцева

1. Введение. При решении некоторых задач интерполяции между пространствами операторов приходится сталкиваться с задачей продолжения бесконечной треугольной неполной матрицы до матрицы вполне непрерывного оператора в l_2 . Возникает вопрос, о том существенно ли предположение о треугольности неполной матрицы, т.е. для каких неполных матриц, кроме треугольных, при естественных условиях возможно продолжение до матрицы вполне непрерывного оператора. Впервые неполные матрицы, соответствующие подмножествам индексов, отличным от треугольных, появились в работе [1]. В общем виде для неполной матрицы, заданной на произвольном множестве индексов, задача не решена до сих пор. Очевидно, эта задача тесно связана с задачей продолжения неполной матрицы до матрицы ограниченного оператора. Задача о продолжении в общем случае не решена и для ограниченных операторов. В работе Арвесона [2] найдено необходимое и достаточное условие продолжения для верхнетреугольной неполной матрицы до матрицы ограниченного оператора в l_2 . Задача о продолжении верхнетреугольной неполной матрицы до матрицы вполне непрерывного оператора рассматривалась в [3]. В настоящей работе найдено необходимое и достаточное условие существования ограниченного и вполне непрерывного продолжения для специального класса неполных матриц, значительно расширяющих класс треугольных неполных матриц.

2. Основные определения. *Неполной матрицей* мы будем называть совокупность комплексных чисел $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in F}$, где $F \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Если множество $F = \{(i, j) : i \leq j\}$, то неполная матрица называется *верхнетреугольной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неполная матрица A будет называться *прямоугольной*, если $F = F_1 \times F_2$, где $F_1, F_2 \subset \mathbb{Z}$.

Далее прямоугольную неполную матрицу будем называть *прямоугольной подматрицей*.

Любая прямоугольная подматрица $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in F_1 \times F_2}$ задает линейный оператор, действующий из пространства финитных последовательностей $\{\xi_j\}$, где $j \in F_2$, в пространство всех последовательностей $\{\eta_i\}$, где $i \in F_1$.

Под $l_2(\mathbb{Z})$ будем понимать гильбертово пространство двусторонних скалярных последовательностей $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ с нормой $\|x\| = (\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i|^2)^{1/2}$.

Очевидно, что если неполная матрица $\{a_{ij}\}_{i,j \in F}$ допускает продолжение до матрицы ограниченного оператора в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$, то для любых $F_1, F_2 \in \mathbb{Z}$ таких, что $F_1 \times F_2 \subset F$, прямоугольная подматрица $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in F_1 \times F_2}$ неполной матрицы $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in F}$ порождает ограниченный оператор, действующий из $l_2(F_2)$ в $l_2(F_1)$, причем нормы всех таких операторов равномерно ограничены. Из результатов Арвесона (см. [2]) вытекает,

что данное необходимое условие существования продолжения неполной матрицы до матрицы ограниченного оператора в $l_2(\mathbb{Z})$ является и достаточным для верхнетреугольной неполной матрицы.

Если неполная матрица $\{a_{ij}\}_{i,j \in F}$ допускает продолжение до матрицы вполне непрерывного оператора в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$, то все ее прямоугольные подматрицы порождают вполне непрерывные операторы в соответствующих пространствах. Более того, нормы соответствующих операторов стремятся к нулю в следующем смысле.

Пусть $f(A)$ – скалярная функция, заданная на некотором множестве $\mathfrak{A}$ прямоугольных подматриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, будет называться *стремящейся к нулю на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $\Delta_\varepsilon \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ такое, что для всех $A \in \mathfrak{A}$, лежащих в дополнении к Δ_ε , справедливо неравенство $|f(A)| < \varepsilon$.

Нетрудно видеть, что если неполная матрица продолжается до матрицы вполне непрерывного оператора в $l_2(\mathbb{Z})$, то функция

$$f(A) = \|A\|_{l_2(F_2) \rightarrow l_2(F_1)}$$

стремится к нулю на бесконечности, где $A = \{a_{ij}\}_{(i,j) \in F_1 \times F_2}$, поскольку нормы подматриц матрицы вполне непрерывного оператора ведут себя таким образом. В работе [3] показано, что упомянутые выше необходимые условия существования продолжения неполной матрицы до матрицы вполне непрерывного оператора являются и достаточными в случае верхнетреугольных неполных матриц. В этом случае условие стремления к нулю норм прямоугольных подматриц сводится к тому, что нормы в соответствующих пространствах l_2 прямоугольных подматриц вида $\{a_{ij}\}_{i \leq k \leq j}$ стремятся к нулю при $k \rightarrow \pm\infty$.

3. Продолжение квазитреугольных неполных матриц. Очевидно, что если какая-то неполная матрица допускает продолжение до матрицы ограниченного или вполне непрерывного оператора в l_2 , то после произвольной перестановки ее строк и столбцов новая неполная матрица будет допускать соответствующее продолжение. Ясно, что структура верхнетреугольной неполной матрицы может разрушиться при перестановке строк и столбцов. Оказывается, что класс треугольных матриц можно существенно расширить так, что новый класс неполных матриц будет инвариантен относительно перестановок строк и столбцов и будет наследовать хорошие свойства верхнетреугольных неполных матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Неполную матрицу $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in F}$ будем называть *квазитреугольной*, если найдутся такие функции $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ и $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, что множество F состоит из (i, j) таких, что $\psi(i) \leq \varphi(j)$.

Содержательными оказываются уже случаи $F = \{(i, j) : i \leq cj\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – произвольная квазитреугольная неполная матрица. Тогда

- 1) для продолжения A до матрицы ограниченного оператора в $l_2(\mathbb{Z})$ необходимо и достаточно, чтобы все ее прямоугольные подматрицы $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in F_1 \times F_2}$ порождали ограниченные операторы, действующие из пространства $l_2(F_2)$ в пространство $l_2(F_1)$, и нормы этих подматриц были равномерно ограничены;
- 2) для продолжения A до матрицы вполне непрерывного оператора в $l_2(\mathbb{Z})$ необходимо и достаточно, чтобы все ее прямоугольные подматрицы $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in F_1 \times F_2}$ порождали вполне непрерывные операторы, действующие из пространства $l_2(F_2)$ в пространство $l_2(F_1)$, и нормы этих подматриц стремились к нулю на бесконечности.

Доказательство этой теоремы опирается на возможность представления квазиреугольной неполной матрицы в виде блочной верхнетреугольной неполной матрицы. Далее можно применить результаты [2] и [3].

Заметим, что кажущееся естественным нулевое продолжение неполной матрицы до матрицы ограниченного оператора даже для верхнетреугольной неполной матрицы не всегда возможно, если ненулевое продолжение существует (см. [4]).

Нетрудно привести примеры не квазиреугольных неполных матриц, допускающих продолжение до матрицы ограниченного или вполне непрерывного оператора, если выполняется упомянутое выше необходимое условие, т.е. равномерная ограниченность или стремление к нулю норм прямоугольных подматриц. В качестве примера можно взять неполную матрицу $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in F}$, где $F = \{(i, j) : i + j = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$ (бесконечная “шахматная доска”), которая является блочной диагональной неполной матрицей.

Тот факт, что теорема 1 не может быть распространена на произвольные неполные матрицы, следует, например, из следующего примера. Рассмотрим неполную матрицу $\{a_{ij}\}_{i+j=3p}$, где $p \in \mathbb{Z}$ и все $a_{ij} = 1$. Нетрудно видеть, что все ее прямоугольные подматрицы одномерны. Поэтому эта неполная матрица удовлетворяет условию равномерной ограниченности всех прямоугольных подматриц. Однако она не может быть продолжена даже на $l_2(F)$, где $F = \{3^j\}_{j \geq 0}$, т.е. не допускает продолжения до ограниченного оператора в l_2 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. G. Dodds, T. K. Dodds, B. de Pagter, F. A. Sukochev, *J. Funct. Anal.*, **148**:1 (1997), 28–69. [2] W. Arveson, *J. Funct. Anal.*, **20**:3 (1975), 208–233. [3] Е. Г. Беломытцева, *Сборник трудов молодых ученых математического факультета ВГУ*, ВГУ, Воронеж, 2003, 20–28. [4] K. R. Davidson, *Nest Algebras. Triangular Forms for Operator Algebras on Hilbert Space*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **191**, Longman Sci. Tech., Harlow, 1988.

Е. Г. Беломытцева

Воронежский государственный университет

E-mail: bell1975@km.ru

Поступило

05.06.2009