Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Маркова, О некоторых свойствах функции длины,
Матем. заметки, 2010, том 87, выпуск 1, 83–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:38:23

О некоторых свойствах функции длины

О. В. Маркова

В работе исследуются длина таких конструкций, как фактор-алгебра, прямая сумма алгебр и подалгебра, фигурирующих в классической теореме Биркгофа. Получена верхняя оценка длины локальных алгебр.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Кольцо $\mathcal{A}$, являющееся также векторным пространством над полем $\mathbb{F}$, называется *алгеброй* над $\mathbb{F}$ или *$\mathbb{F}$ -алгеброй*, если для любого $\lambda \in \mathbb{F}$ и любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$. Алгебра называется *конечномерной*, если соответствующее векторное пространство имеет конечную размерность над $\mathbb{F}$. Алгебра называется *конечнопорожденной*, если в ней существует такое конечное подмножество $\mathcal{S} = \{a_1, \dots, a_k\}$, называемое *системой порождающих*, что каждый элемент алгебры является линейной комбинацией конечного числа произведений элементов из $\mathcal{S}$, включая пустое произведение, равное единичному элементу. Легко видеть, что любая конечномерная алгебра порождается своим базисом, т.е. является конечнопорожденной. Понятия теории колец и алгебр, использованные в статье, можно найти, например, в [1].

Пусть $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ – непустое конечное множество (алфавит). Конечные последовательности букв из B назовем *словами*. Пусть B^* обозначает множество всех слов в алфавите B , F_B – свободную полугруппу над алфавитом B , т.е. B^* с операцией конкатенации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Длина слова $b_{i_1} \dots b_{i_t}$, где $b_{i_j} \in B$, равна t . Будем считать 1 (пустое слово) словом от элементов B длины 0.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1. Пусть B^i обозначает множество всех слов в алфавите B длины, не большей i , $i \geq 0$. Пусть $B^{=i}$ обозначает множество всех слов в алфавите B длины, равной i , $i \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Произведения элементов из порождающего множества $\mathcal{S}$ можно рассматривать как образы элементов свободной полугруппы $F_{\mathcal{S}}$ при естественном гомоморфизме, и их также можно называть словами от образующих и использовать естественные обозначения $\mathcal{S}^i$ и $\mathcal{S}^{=i}$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2. Положим $\mathcal{S}^0 = \{1_{\mathcal{A}}\}$, если алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $1_{\mathcal{A}}$; иначе положим $\mathcal{S}^0 = \emptyset$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3. Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$, где $\langle S \rangle$ обозначает линейную оболочку (множество всех конечных линейных комбинаций с коэффициентами из $\mathbb{F}$)

множества S . Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle = \mathbb{F}$ для алгебр с единицей, и $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = 0$ иначе. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\{a_1, \dots, a_k\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как $\mathcal{S}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$. Из определения $\mathcal{S}^i$ для $i, j > 0$ получаем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{i+j} &= \mathcal{S}^i \mathcal{S}^j \cup \mathcal{S}^1, \\ \mathcal{L}_{i+j}(\mathcal{S}) &= \langle \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) \mathcal{L}_j(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle, \\ \mathcal{L}_0(\mathcal{S}) &\subseteq \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{L}_h(\mathcal{S}) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Тогда из конечномерности $\mathcal{A}$ получаем, что найдется такой номер h , что $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Длиной системы порождающих $\mathcal{S}$* называется наименьшее неотрицательное целое число k , для которого $\mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{k+1}(\mathcal{S})$. Обозначим длину системы порождающих $\mathcal{S}$ через $l(\mathcal{S})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если для некоторого $h \geq 0$ выполнено $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$, то

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \mathcal{L}_h(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$$

и также $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geq h$. Значит, $l(\mathcal{S})$ определена корректно. Поскольку $\mathcal{S}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}$, верно $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Длиной алгебры $\mathcal{A}$* называется $l(\mathcal{A}) = \max_{\mathcal{S}} l(\mathcal{S})$, где максимум берется по всем системам порождающих этой алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Слово $v \in \mathcal{S}^j$ называется *сократимым над $\mathcal{S}$* , если найдется такой номер $i < j$, что $v \in \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$, т.е. v представляется в виде линейной комбинации слов меньшей длины.

Пусть далее $M_n(\mathbb{F})$ обозначает алгебру матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$, $T_n(\mathbb{F})$ – подалгебру верхнетреугольных матриц в $M_n(\mathbb{F})$, $D_n(\mathbb{F})$ – подалгебру диагональных матриц в $T_n(\mathbb{F})$.

Задача вычисления длины полной алгебры матриц как функции порядка матриц возникла в работах [2], [3] в связи с возможным применением в механике. В общей формулировке она была поставлена Пазом в [4] и до сих пор не решена. Известные верхние оценки длины алгебры матриц не являются линейными.

Вопрос о связи длины алгебры $\mathcal{A}$ с двумя ее инвариантами $d = \dim \mathcal{A}$ и $m = m(\mathcal{A}) = \max\{\deg a, a \in \mathcal{A}\}$ – максимальной степенью минимального многочлена элементов алгебры, рассматривается в работе [5], а именно, получена следующая верхняя оценка.

ТЕОРЕМА 1 [5; теорема 3.1]. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, и пусть

$$f(d, m) = m \sqrt{\frac{2d}{m-1} + \frac{1}{4}} + \frac{m}{2} - 2.$$

Тогда для произвольной системы порождающих $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{A}$ выполнено

$$l(\mathcal{S}) < f(d, m(\mathcal{S})) \quad \text{и} \quad l(\mathcal{A}) < f(d, m).$$

Как при вычислении длин конкретных алгебр, так и при построении общей теории, важную роль играет исследование теоретико-кольцевых свойств функции длины.

В разделе 2 данной работы исследуется длина таких конструкций, как фактор-алгебра, прямая сумма алгебр и подалгебра, фигурирующих в классической теореме Биркгофа [6], [7; теорема 3.1].

В разделе 3 получена верхняя оценка длины локальной алгебры как функция индекса нильпотентности ее радикала Джекобсона и размерности фактора по радикалу.

2. О трех свойствах длины. 1. Покажем, что при переходе от алгебры к ее фактор-алгебрам длина не возрастает.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – алгебры над $\mathbb{F}$ и $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – эпиморфизм. Тогда $l(\mathcal{B}) \leq l(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $K = \ker \varphi$. Тогда по теореме о гомоморфизме $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/K$. Рассмотрим систему порождающих $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} = \{b_1, \dots, b_m\}$ алгебры $\mathcal{B}$ длины $l(\mathcal{S}_{\mathcal{B}}) = l(\mathcal{B})$. Пусть $a_1, \dots, a_m$ – такие элементы $\mathcal{A}$, что $\varphi(a_j) = b_j$, $j = 1, \dots, m$. И пусть $e_1, \dots, e_k \in K$ образуют базис K . Тогда $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_k\}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}$.

Пусть $N = l(\mathcal{S}_{\mathcal{A}})$. Покажем, что $l(\mathcal{S}_{\mathcal{B}}) \leq N$. Для этого покажем, что для произвольного элемента $w \in \mathcal{L}_{N+1}(\mathcal{S}_{\mathcal{B}})$ верно $w \in \mathcal{L}_N(\mathcal{S}_{\mathcal{B}})$. По определению w найдется такой многочлен $P_{N+1} \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ степени не большей $N+1$, что $w = P_{N+1}(b_1, \dots, b_m)$. Тогда если положить $v = P_{N+1}(a_1, \dots, a_m)$, то $\varphi(v) = w$. По построению $v \in \mathcal{L}_{N+1}(\mathcal{S}_{\mathcal{A}})$; следовательно, $v \in \mathcal{L}_N(\mathcal{S}_{\mathcal{A}})$, т.е. найдется такой многочлен $P_N \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_{m+k} \rangle$ степени не большей N , что $v = P_N(a_1, \dots, a_m, e_1, \dots, e_k)$. Поскольку K – идеал в $\mathcal{A}$, то найдется такой многочлен $Q_N \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_m \rangle$, что $v = Q_N(a_1, \dots, a_m) + r$, $r \in K \subseteq \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_{\mathcal{A}})$. Значит,

$$\begin{aligned} w &= \varphi(v) = \varphi(Q_N(a_1, \dots, a_m) + r) \\ &= \varphi(Q_N(a_1, \dots, a_m)) = Q_N(b_1, \dots, b_m) \in \mathcal{L}_N(\mathcal{S}_{\mathcal{B}}). \end{aligned}$$

Следовательно, $l(\mathcal{B}) = l(\mathcal{S}_{\mathcal{B}}) \leq l(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}) \leq l(\mathcal{A})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – алгебры над $\mathbb{F}$ и $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Тогда $l(\mathcal{A}) = l(\mathcal{B})$.

Следующий пример показывает, что из равенства длин в теореме 2 не следует, что φ – изоморфизм алгебр.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{A} = T_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = D_n(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел. Существует естественный гомоморфизм $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, действующий следующим образом:

$$\pi: \begin{pmatrix} a_{1,1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

При этом $\dim \mathcal{A} = n(n+1)/2 > n = \dim \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$. Однако из [8; теорема 1] и [9; теорема 4.5] получаем, что $l(\mathcal{A}) = l(\mathcal{B}) = n-1$.

Следующий пример показывает, что неравенство в теореме 2 может быть строгим.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathcal{A} = T_n(\mathbb{F}_2)$, $\mathcal{B} = D_n(\mathbb{F}_2)$, где $n > 2$ и $\mathbb{F}_2$ – поле из двух элементов. Существует естественный гомоморфизм $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, описанный в примере 1. Из [8; теорема 1] и [9; теорема 6.1] получаем, что $l(\mathcal{A}) = n - 1 > [\log_2(n)] = l(\mathcal{B})$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее данного.

2. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – конечномерные ассоциативные алгебры над одним полем $\mathbb{F}$. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – либо одновременно алгебры с единицами, либо без, и $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ обозначает прямую сумму алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Для длины прямой суммы алгебр в [8] автором были получены следующие точные верхняя и нижняя оценки.

ТЕОРЕМА 3 [8; теорема 2]. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{F}$ длин $l_{\mathcal{A}}$ и $l_{\mathcal{B}}$ соответственно. Тогда выполнены следующие неравенства:

$$\max\{l_{\mathcal{A}}, l_{\mathcal{B}}\} \leq l(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \leq l_{\mathcal{A}} + l_{\mathcal{B}} + 1.$$

По индукции оценки в предыдущей теореме обобщаются на произвольное число слагаемых.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, и пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Пусть $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ – конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{F}$ длин $l_1, \dots, l_k$, соответственно. Пусть $\mathcal{A} = \bigoplus_{j=1}^k \mathcal{A}_j$. Тогда выполнены следующие неравенства:

$$\max\{l_1, \dots, l_k\} \leq l(\mathcal{A}) \leq \sum_{j=1}^k l_j + k - 1.$$

Приведем также пример алгебры, длина которой не совпадает с оценками из теоремы 3 и лежит строго между ними.

ПРИМЕР 3. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B} = D_n(\mathbb{F}_2)$, $n \geq 2$. Согласно [9; теорема 6.1] $l(\mathcal{A}) = l(\mathcal{B}) = [\log_2 n] > 0$. Также

$$\begin{aligned} l(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) &= l(D_{2n}(\mathbb{F}_2)) = [\log_2 2n] = [\log_2 n + \log_2 2] \\ &= [\log_2 n + 1] = [\log_2 n] + 1 = l(\mathcal{A}) + 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\max\{l(\mathcal{A}), l(\mathcal{B})\} = l(\mathcal{A}) < l(\mathcal{A}) + 1 = l(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) < 2l(\mathcal{A}) + 1 = l(\mathcal{A}) + l(\mathcal{B}) + 1.$$

3. Пусть $\mathcal{A}$ – конечномерная ассоциативная алгебра над произвольным полем $\mathbb{F}$. В вычислительных задачах часто требуется оценить длину произвольного подмножества $\mathcal{S}'$ в алгебре $\mathcal{A}$, которое может порождать не всю алгебру, а ее собственную подалгебру $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, или, что эквивалентно, найти такое $M \in \mathbb{N}$, что для любой подалгебры $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ будет справедлива оценка $l(\mathcal{A}') \leq M$.

Заметим, что такие характеристики алгебры $\mathcal{A}$ как размерность и максимальная степень минимального многочлена элемента не возрастают при переходе к подалгебрам. Поэтому в силу тривиальной оценки длины $l(\mathcal{A}') \leq \dim \mathcal{A}' - 1$ всегда можно взять $M = \dim \mathcal{A} - 1$, или в более общем случае, если удастся получить верхнюю

оценку длины алгебры вида $l(\mathcal{A}) \leq h(\dim \mathcal{A}, m(\mathcal{A}))$, где функция $h(x, y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является неубывающей по каждой переменной, то также для любой подалгебры $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ верно $l(\mathcal{A}') \leq h(\dim \mathcal{A}', m(\mathcal{A}')) \leq h(\dim \mathcal{A}, m(\mathcal{A}))$.

Но тривиальная оценка может не быть точной. Например, если взять $\mathcal{A} = T_n(\mathbb{F})$, то согласно [9; лемма 4.2] для любой подалгебры $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ справедлива оценка $l(\mathcal{A}') \leq n - 1 = l(\mathcal{A})$. При этом $\dim \mathcal{A} = n(n + 1)/2$, т.е. тривиальную оценку можно улучшить на порядок.

С другой стороны, произвольное подмножество всегда можно вложить в систему порождающих всей алгебры, поэтому естественно было предположить, что длину подалгебры можно оценить длиной содержащей ее алгебры. Однако уже в алгебре матриц порядка 4 можно построить пример, показывающий, что это предположение неверно.

ПРИМЕР 4 [9; пример 9.3, предложение 9.4]. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_4 \subset T_4(\mathbb{F})$, порожденную как векторное пространство матрицами E , $E_{4,4}$, $E_{1,2}$, $E_{1,3}$ и $E_{2,3}$, и ее подалгебру $\mathcal{A}'$, порожденную матрицами E и $A = E_{1,2} + E_{2,3} + E_{4,4}$. Имеем $l(\mathcal{A}') = 3 > l(\mathcal{A}) = 2$.

Возникает следующий естественный вопрос: *какие значения могут принимать разность и отношение длины подалгебры и длины содержащей ее алгебры?*

Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, и пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ – пара, состоящая из $\mathbb{F}$ -алгебры $\mathcal{A}$ и ее подалгебры $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. В следующей теореме показано, что существуют семейства пар данного вида такие, что $l(\mathcal{A}') \geq l(\mathcal{A})$ и разность длин $l(\mathcal{A}') - l(\mathcal{A})$ может принимать сколь угодно большое значение; таким образом получен ответ на первый вопрос. Отношение длин $l(\mathcal{A}')/l(\mathcal{A})$ может быть любым рациональным числом из полуотрезка $(1, 2]$, однако при этом вопрос о значениях отношения длин в общем случае остается открытым.

ТЕОРЕМА 4 [9; теорема 9.19, следствие 9.20]. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Пусть $k, n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. Тогда

- 1) существуют такие алгебры $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \subset M_{2k+2}(\mathbb{F})$, что $l(\mathcal{A}') - l(\mathcal{A}) = k$;
- 2) существуют $N \in \mathbb{N}$ и такие алгебры $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B} \subset M_N(\mathbb{F})$, что

$$\frac{l(\mathcal{B}')}{l(\mathcal{B})} = 1 + \frac{m}{n}.$$

3. О длине локальных алгебр. В данном разделе получена верхняя оценка длины локальной алгебры $\mathcal{A}$ как функция двух инвариантов этой алгебры: индекса нильпотентности ее радикала Джекобсона $J(\mathcal{A})$ и размерности фактор-алгебры $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Ассоциативная алгебра называется *локальной*, если она обладает единственным максимальным правым идеалом.

Согласно основной теореме об эквивалентности различных определений локальности (см. [1; § 5.2]) определение 5 эквивалентно следующему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ называется *локальной*, если фактор-алгебра $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ является алгеброй с делением.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $\mathcal{A}$ – конечномерная локальная $\mathbb{F}$ -алгебра и $J(\mathcal{A})$ – ее радикал Джекобсона, $\mathcal{B} = \mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ и $D = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$. Пусть

$A_1, \dots, A_D \in \mathcal{A}$ – произвольные элементы. Существует такой многочлен $P \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_D \rangle$ степени не большей $D - 1$, что $A_1 A_2 \cdots A_D - P(A_1, \dots, A_D) \in J(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если хотя бы один из элементов $A_1, \dots, A_D$ принадлежит $J(\mathcal{A})$, то условие леммы выполняется тривиально. Поэтому будем считать, что все элементы $A_1, \dots, A_D$ обратимы.

Рассмотрим естественный гомоморфизм алгебр $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $A \mapsto A + J(\mathcal{A})$, $A \in \mathcal{A}$, ядром которого является идеал $J(\mathcal{A})$. Множество

$$\mathcal{S} = \{B_1 = \pi(A_1), \dots, B_D = \pi(A_D)\} \subseteq \mathcal{B}$$

является системой порождающих для некоторой подалгебры $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Используя тривиальную оценку длины, получаем

$$l(\mathcal{S}) \leq l(\mathcal{B}') \leq \dim \mathcal{B}' - 1 \leq \dim \mathcal{B} - 1 = D - 1.$$

Таким образом, любое слово от элементов $\mathcal{S}$ длины D сократимо в смысле определения 4, т.е. найдется такой многочлен $P \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_D \rangle$ степени не большей $D - 1$, что

$$B_1 \cdots B_D = P(B_1, \dots, B_D). \quad (3.1)$$

Пользуясь линейностью и мультипликативностью отображения π , из равенства (3.1) получаем следующие соотношения:

$$\pi(\mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_D) = \pi(P(A_1, \dots, A_D)), \quad \pi(\mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_D - P(A_1, \dots, A_D)) = 0,$$

это и означает, что

$$\mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_D - P(A_1, \dots, A_D) \in J(\mathcal{A}).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $\mathcal{A}$ – конечномерная локальная $\mathbb{F}$ -алгебра. Пусть $J(\mathcal{A})$ – радикал Джексона алгебры $\mathcal{A}$, через N обозначен индекс нильпотентности $J(\mathcal{A})$. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}/J(\mathcal{A})$ и $D = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{B}$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leq DN - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что любое слово длины $q = DN$ сократимо в $\mathcal{A}$ в смысле определения 4, это и означает, что длина любой системы порождающих меньше q .

Пусть $0 \leq t \leq q$, $A_1, \dots, A_{q-t} \in \mathcal{A}$ – обратимые элементы, $B_1, \dots, B_t \in J(\mathcal{A})$. Пусть

$$K_1, \dots, K_{t+1} \subseteq \{1, \dots, q - t\}, \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{t+1} K_i = \{1, \dots, q - t\},$$

и если $K_i \neq \emptyset$, то $K_i = \{k_i, k_i + 1, \dots, k_i + |K_i| - 1\}$. Положим

$$V_i = \begin{cases} \prod_{r \in K_i} A_r, & \text{если } K_i \neq \emptyset, \\ 1_{\mathcal{A}}, & \text{если } K_i = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда произвольное слово W в $\mathcal{A}$ длины q имеет вид

$$W = \prod_{i=1}^t (V_i B_i) \cdot V_{t+1}.$$

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $t \geq N$. Так как $J(\mathcal{A})$ – идеал в $\mathcal{A}$, то $V_i \cdot B_i \in J(\mathcal{A})$ для всех $i = 1, \dots, t$. Тогда $\prod_{i=1}^N (V_i B_i) = 0$ по определению N . Следовательно,

$$\prod_{i=1}^t (V_i B_i) \cdot V_{t+1} = 0 \cdot \left(\prod_{i=N+1}^t (V_i B_i) \cdot V_{t+1} \right) = 0.$$

То есть в этом случае слово $W = 0$, а значит, сократимо.

2) Пусть $t = 0$. В этом случае имеем

$$W = \prod_{j=0}^{N-1} (A_{jD+1} A_{jD+2} \cdots A_{jD+D}).$$

По лемме 1 для каждого $j = 0, \dots, N-1$ найдется многочлен $P_j \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_D \rangle$ степени не большей $D-1$ такой, что

$$A_{jD+1} A_{jD+2} \cdots A_{jD+D} - P_j(A_{jD+1}, \dots, A_{jD+D}) = R_j \in J(\mathcal{A}).$$

По определению индекса нильпотентности радикала $R_0 R_1 \cdots R_N = 0$, т.е.

$$\prod_{j=0}^{N-1} (A_{jD+1} A_{jD+2} \cdots A_{jD+D} - P_j(A_{jD+1}, \dots, A_{jD+D})) = 0.$$

Раскрывая скобки и перенося все слагаемые кроме первого в правую часть равенства получим, что либо $A_1 \cdots A_{DN} = 0$, либо

$$\begin{aligned} W &= A_1 \cdots A_{DN} \\ &= \sum_{i=1}^{DN} \alpha_i A_1 \cdots A_{i-1} A_{i+1} \cdots A_{DN} + \text{слагаемые меньшей длины,} \end{aligned}$$

т.е. слово W сократимо.

3) Пусть $0 < t < N$. Пусть $\mathcal{T}_1$ – множество K_i таких, что $|K_i| < D$, $\mathcal{T}_2$ – множество K_i таких, что $|K_i| \geq D$. Если $s_1 = |\mathcal{T}_1|$, то $|\mathcal{T}_2| = t + 1 - s_1$. Заметим, что $s_1 < t + 1$, так как иначе

$$\sum_{j=1}^{t+1} |K_j| \leq (t+1)(D-1) \leq N(D-1) < ND - t;$$

противоречие.

Если $K_i \in \mathcal{T}_2$, то $|K_i| = q_i D + r_i$, и если $K_j \in \mathcal{T}_1$, то $|K_j| = D - r_j$, для $q_i, r_j \in \mathbb{N}$, $r_i \in \mathbb{Z}_+$, $r_i \leq D-1$, $r_j \leq D$.

Покажем, что $\sum_{i: K_i \in \mathcal{T}_2} q_i \geq N - t$. Действительно, если $\sum_{i: K_i \in \mathcal{T}_2} q_i \leq N - t - 1$, то

$$DN - t = \sum_{i: K_i \in \mathcal{T}_1} |K_i| + \sum_{j: K_j \in \mathcal{T}_2} |K_j|$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j: K_j \in \mathcal{T}_2} q_j + s_1 \right) D + \sum_{j: K_j \in \mathcal{T}_2} r_j - \sum_{i: K_i \in \mathcal{T}_1} r_i \\
&\leq (N - t - 1 + s_1) D + (t + 1 - s_1)(D - 1) - s_1 = DN - t - 1;
\end{aligned}$$

противоречие.

Пусть i такое, что $K_i \in \mathcal{T}_2$. Снова применяя лемму 1 и рассуждая как и в пункте 2), получаем, что существуют элементы $R_{i,1}, R_{i,2}, \dots, R_{i,q_i-1}, R'_{i,q_i} \in J(\mathcal{A})$ и многочлен $P_i \in \mathbb{F}\langle x_1, \dots, x_{q_i D} \rangle$ степени не большей $q_i D - 1$ такие, что

$$\begin{aligned}
V_i &= (R_{i,1} R_{i,2} \cdots R_{i,q_i-1} R'_{i,q_i} + P_i(A_{k_i}, \dots, A_{k_i+q_i D-1})) \cdot A_{k_i+q_i D} \cdots A_{k_i+|K_i|-1} \\
&= R_{i,1} R_{i,2} \cdots R_{i,q_i-1} R'_{i,q_i} + P'_i,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$R_{i,q_i} = R'_{i,q_i} \cdot (A_{k_i+q_i D} \cdots A_{k_i+|K_i|-1}) \in J(\mathcal{A})$$

и P'_i — многочлен от $A_{k_i}, \dots, A_{k_i+|K_i|-1}$ степени не большей $|K_i| - 1$.

Пусть $i < t + 1$ такое, что $K_i \in \mathcal{T}_1$. В этом случае заметим, что элемент $B'_i = V_i B_i \in J(\mathcal{A})$. Если $K_{t+1} \in \mathcal{T}_1$, то положим

$$B'_t = \begin{cases} B_t V_{t+1}, & \text{если } K_t \in \mathcal{T}_2, \\ V_t B_t V_{t+1}, & \text{если } K_t \in \mathcal{T}_1. \end{cases}$$

Подставляя представления для V_i из равенства (3.2) в слово W и раскрывая скобки, получим, что существует многочлен P от элементов $A_1, \dots, A_{q-t}, B_1, \dots, B_t$ степени не большей $q - 1$ такой, что

$$W - P = \prod_k \left(\prod_{a_k} \left(\prod_{j=1}^{q_{a_k}} R_{a_k,j} B_{a_k} \right) \prod_{c_k} B'_{c_k} \right)$$

есть произведение не менее N радикальных элементов $R_{i,j}$, B_i и B'_i ; следовательно, $W - P = 0$, т.е. слово W сократимо.

Таким образом, мы получили, что любое слово длины DN от элементов алгебры $\mathcal{A}$ сократимо в смысле определения 4. Следовательно, $l(\mathcal{A}) \leq DN - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что ранее в [10; лемма 7.8] была получена верхняя оценка длины локальных алгебр вида $\mathcal{A} = \mathbb{F}1_{\mathcal{A}} + J(\mathcal{A})$, где $\mathbb{F}$ — основное поле. Этот результат применялся в [10] к локальным алгебрам над алгебраически замкнутыми полями, для которых это условие выполняется автоматически (см. [1; §3.5, с. 70, лемма]). Если $\mathcal{A} = \mathbb{F}1_{\mathcal{A}} + J(\mathcal{A})$, то $D = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F} = 1$ и $l(\mathcal{A}) \leq DN - 1 = N - 1$. Поэтому для локальных алгебр данного вида оценки из теоремы 5 и [10; лемма 7.8] совпадают, т.е. получено обобщение предыдущего результата.

Следующий пример показывает, что оценка из теоремы 5 является точной.

ПРИМЕР 5. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ — поле действительных чисел. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{F}.$$

Эта алгебра является локальной, ее радикал Джекобсона равен нулю

$$J = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & -d & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{F} \right) \right\rangle.$$

Следовательно, $N = N(J) = 2$. Также $\mathcal{B} = \mathcal{A}/J \cong \mathbb{C}$ – полем комплексных чисел, $D = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{B} = 2$. Алгебра $\mathcal{A}$ порождена матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

значит, согласно [9; лемма 7.7] $l(\mathcal{A}) = 3$. Следовательно, $l(\mathcal{A}) = 3 = DN - 1$.

Автор выражает особую благодарность своему научному руководителю А. Э. Гутерману за внимание к работе и полезные обсуждения, а также рецензенту за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Пирс, *Ассоциативные алгебры*, Мир, М., 1986.
- [2] A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, “The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **2** (1959), 309–336.
- [3] A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, “Further results in the theory of matrix polynomials”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **4** (1960), 214–230.
- [4] A. Paz, “An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables”, *Linear and Multilinear Algebra*, **15**:2 (1984), 161–170.
- [5] C. J. Pappacena, “An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra”, *J. Algebra*, **197**:2 (1997), 535–545.
- [6] G. Birkhoff, “On the structure of abstract algebras”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **31** (1935), 433–454.
- [7] П. Кон, *Универсальная алгебра*, Мир, М., 1968.
- [8] О. В. Маркова, “О длине алгебры верхнетреугольных матриц”, *УМН*, **60**:5 (2005), 177–178.
- [9] О. В. Маркова, “Вычисление длин матричных подалгебр специального вида”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:4 (2007), 165–197.
- [10] A. E. Guterman, O. V. Markova, “Commutative matrix subalgebras and length function”, *Linear Algebra Appl.*, **430**:7 (2009), 1790–1805.

О. В. Маркова

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ov_markova@mail.ru

Поступило

21.04.2009